Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

MASTER 2 – Ingénierie Mathématiques et Modélisation – SMA5B0.

Code UE	N° d'envoi de l'UE
MMAU2T	**1**

Nom de l'UE : Equations aux Dérivées Partielles (3.2)

- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitre 1

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 1, sections 1-2 (dérivées faibles, espaces de Sobolev)
Exercices proposés : 1.1, 1.2

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 1, section 3 (rappels d'analyse fonctionnelle)
Exercices proposés : 1.3, 1.4

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 1, sections 4-5 (théorème de trace, théorème de densité)
Exercice proposé : 1.5
Exercice à faire pour le 1er devoir (à rendre ultérieurement) : 1.6

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 1, sections 6-7 (théorème de compacité, théorème d'injections de Sobolev)
Exercice proposé : 1.14

– -Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/master2.d/tele.d
et me poser des questions par email.

Université Aix Marseille

Master 2 de mathématiques

Equations aux dérivées partielles

Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin

13 octobre 2013

Table des matières

Introduction

Ce cours décrit quelques outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces outils sont utilisés pour obtenir des résultats d'existence (et souvent d'unicité) pour quelques exemples de problèmes d'EDP de natures diverses (elliptique, parabolique ou hyperbolique) linéaires ou non linéaires.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev [1] sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les élements sont des fonctions, et ces fonctions sont telles que leurs puissances et les puissances de leurs dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible, que nous allons préciser) sont intégrables au sense de Lebesque. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach [2]. Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles.

1.1 Dérivées faibles

La notion de dérivée faible apparaît déjà dans un article célebre de Jean Leray [3] paru en 1934, sur les équations de Navier-Stokes ; dans cette article, elle apparaît sous le nom de "quasi-dérivée" ([7] page 205). Cette notion est fondamentale pour l'étude de l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques.

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur Ω c'est-à-dire

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact}\ ; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

De plus, l'ouvert Ω sera toujours muni de la tribu de Borel (ou tribu borélienne), notée $\mathcal{B}(\Omega)$, et de la mesure de Lebesgue, notée λ si $N = 1$ et λ_N si $N > 1$. Les intégrales seront toujours par rapport à cette mesure de Lebesgue, sauf indication contraire.

Le lemme suivant est absolument fondamental, car il permet de confondre $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ avec l'application linéaire $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si, pour tout sous–ensemble compact K de Ω, la restriction $f|_K$ de f à K est un élément de $L^1(K)$.

Lemme 1.1 (Egalité presque partout dans L^1) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et soient f et $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors :*

$$\left[\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \Longleftrightarrow [f = g \ \ p.p.].$$

1. Sergueï Lvovitch Sobolev, (1908-1989) est un mathématicien et physicien russe.
2. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.
3. Jean Leray, 1906 -1998, est un mathématicien français ; il a travaillé sur les équations aux dérivées partielles et sur la topologie algébrique.

Démonstration : La démonstration de ce lemme utilise la régularisation d'une fonction intégrable par la convolution avec une suite de noyaux régularisants : voir [3, Exercice 8.7 page 480]. □

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$: on dit que $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ est le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$ (pour le distinguer du dual continu, qui est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$, après avoir muni $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une topologie, ce qui sera inutile pour ce cours). Si $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le réel $T(\varphi)$ s'appelle l'"action de T sur φ" et sera noté $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}$ ou $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$.
Le lemme 1.1 nous permet de définir la dérivée par transposition d'une fonction L^1_{loc}de la manière suivante :

Définition 1.2 (Dérivée par transposition) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.*

- *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on appelle dérivée par transposition de f par rapport à sa i-ème variable la forme linéaire $D_i f$ sur $C_c^\infty(\Omega)$ définie par :*

$$\langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega f\, \partial_i \varphi \,\mathrm{d}x$$

  où $\partial_i\varphi$ désigne la dérivée partielle classique de φ par rapport à sa i-ème variable. Donc $D_i f$ est un élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ Noter que si $f \in C^1(\Omega)$, alors $D_i f$ n'est autre que $\partial_i f$ car on confond $\partial_i f$ et $T_{\partial_i f}$ (qui est l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ induit par $\partial_i f$). Il s'agit donc bien d'une généralisation de la notion de dérivée.
  Si la forme linéaire $D_i f$ peut être confondue avec une fonction localement intégrable au sens du lemme 1.1, on dit que f admet une dérivée faible.
- *Soit $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$; on définit la dérivée par transposition $D_i T$ de T par :*

$$\langle D_i T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\langle T, \partial_i \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)}, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La notion de dérivée au sens des distributions est un peu plus délicate à définir car elle demande la définition d'une topologie sur $C_c^\infty(\Omega)$. Nous n'en aurons pas besoin dans le cadre de ce cours.
Voici un exemple de dérivée par transposition. La fonction de Heaviside [4], définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x \geq 0, \\ 0 \text{ if } x < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

est localement intégrable. Elle admet donc une dérivée par transposition. Pour calculer cette dérivée, notée DH, on remarque, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$-\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0),$$

et donc DH est la forme linéaire qui à φ associe sa valeur en 0, qu'on appelle aussi "mesure de Dirac en 0" : $DH = \delta_0$. Par contre, cette dérivée n'est pas une dérivée faible, car δ_0 ne peut pas être assimilée à une fonction de L^1_{loc}, au sens où il n'existe pas de fonction $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g\varphi\,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (voir exercice 1.1).
La définition 1.2 permet de définir des dérivées par transposition d'une fonction L^1_{loc} (ou d'un élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) à tous les ordres. Par l'identification d'une fonction L^1_{loc} avec l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ qu'elle représente, on peut aussi définir la notion de dérivée faible à tous les ordres. Plus précisément, pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on définit la dérivée faible $D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N} u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, si elle existe, par

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N} u(x)\, \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ et $\partial_i^{\alpha_i}\varphi$ désigne la dérivée partielle (classique) d'ordre α_i par rapport à la i-ème variable.

4. Oliver Heaviside (1850 - 1925) physicien britannique autodidacte.

Remarque 1.3 (Convergence dans $\mathcal{D}^\star$) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}^\star(\Omega)$. On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, quand $n \to +\infty$, si

$$\langle T_n, \phi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega),C_c^\infty(\Omega)} \to \langle T, \phi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega),C_c^\infty(\Omega)} \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Il s'agit donc de la convergence simple dans l'ensemble des applications de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Lorsque l'on s'intéresse aux distributions, on ajoute une structure topologique à l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ (non décrite dans ce polycopié) et, au lieu de travailler avec $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, on travaille avec l'espace strictement plus petit des applications linéaires continues de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Cet espace est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Toutefois, même lorsque l'on travaille avec l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, la notions de convergence est toujours donnée par (1.2).

1.2 Définition et propriétés

Définition 1.4 (Espaces de Sobolev) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.*

1. *L'espace $H^1(\Omega)$ is defined by :*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N\}.$$

   Dans cette définition, lorsqu'on écrit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous-entend

$$\exists g \in L^2(\Omega); \langle D_i f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega),C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g\varphi \,\mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2. *L'espace $H^m(\Omega)$: For $m \in \mathbb{N}$, we define :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}.$$

3. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\ ;\ |\alpha| \leq m.\}$$

4. *Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.*

On note $(\cdot \mid \cdot)_{L^2}$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$(u \mid v)_{L^2} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x,$$

et $\|.\|_{L^p}$ la norme dans $L^p(\Omega)$., i.e.

$$\|u\|_{L^p} = ((\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.5 (Structure d'espace vectoriel) *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorqu'on les munit du produit scalaire*

$$(u \mid v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u \mid D^\alpha v)_{L^2}.$$

Noter que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1|p}, & si\ 1 \leqslant p < +\infty; \\ \\ \max\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & si\ p = +\infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace de Banach***. On peut montrer que la norme :*

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leqslant p < +\infty; \\ \sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

est une norme équivalente à la norme définie par (1.3) *: ceci est une conséquence de l' équivalence entre les normes dans $\mathbb{R}^q$ où $q = card(\{\alpha \in \mathbb{N}^N\ |\alpha| \leq m\})$. Les deux normes sont notées indifféremment $\|.\|_{m,p}$ ou $\|.\|_{W^{m,p}}$. L'intérêt principal de la norme* (1.3) *est que dans le cas $p = 2$ elle confère à H^m une structure hilbertienne, ce qui n'est pas le cas avec la norme définie par* (1.4)

Remarque 1.6 (Espaces de Sobolev et continuité) En une dimension d'espace ($N = 1$), avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $1 \leq p \leq +\infty$, tout élément de $W^{1,p}(]a, b[)$ (qui est donc une classe de fonctions) peut étre assimilé à une fonction continue, au sens où il existe un représentant de la classe qui est continu (ce représentant continu est unique, voir à ce propos l'exercice 1.3). Ceci tient au fait qu'en dimension 1, toute (classe de) fonction(s) de $W^{1,p}(]a, b[)$ peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée.

$$u \in W^{1,p}(]a, b[) \Longleftrightarrow \left\{ \exists \tilde{u} \in C([a, b]) \text{ et } v \in L^p(]a, b[); u = \tilde{u} \text{ p.p. et } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s)\, ds \right\}.$$

En dimension strictement supérieure à 1, ceci est faux. En particulier $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$, comme le prouve l'exemple suivant : soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, et u la fonction définie sur Ω par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$, avec $\gamma \in]0, 1/2[$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ mais $u \notin L^\infty(\Omega)$ (voir exercice 1.5), et donc en particulier, $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Proposition 1.7 (Séparabilité) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$; l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ is* ***espace séparable*** *(c'est-à-dire un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense).*

La preuve de cette proposition fait l'objet de l'exercice 1.9, où l'on montre aussi par un contre-exemple que le résultat de séparabilité n'est pas vrai pour $p = +\infty$.
La notion de séparabilité est importante, car elle permet d'approcher aussi près que l'on veut n'importe quel élément de l'espace par un élément d'une famille dénombrable : dans le cadre d'un espace de Hilbert, on peut montrer que cette propriété est équivalente à l'existence d'une base hilbertienne (voir par exemple[3, Proposition 6.62]).

Nous rappelons maintenant la notion importante d'espace réflexif.

Définition 1.8 (Espace réflexif) *Soit E un espace vectoriel normé réel. On note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$ muni de sa norme naturelle (E' est un espace de Banach). Pour tout $x \in E$, on définit l'application J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. On a*

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E$$

et donc J_x est une forme linéaire continue sur E', ce qu'on note $J_x \in E''$ où E'' est le bidual de E, c'est-à-dire le dual topologique de E'. On peut montrer par le théorème de Hahn-Banach qu'on rappelle dans le paragraphe suivant, que $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$.
L'application J, définie de E dans E'' par $J(x) = J_x$ pour tout $x \in E$, est donc une isométrie linéaire de E sur son image, notée $\mathrm{Im}(J)$, et on a évidemment $\mathrm{Im}(J) \subset E''$.
*On dit que E est un espace **réflexif** si $\mathrm{Im}(J) = E''$, ce qui revient à dire que J est surjective.*
Notons que tout espace réflexif E est forcément complet puisque le dual d'un espace vectoriel normé quelconque est toujours complet.

Proposition 1.9 (Réflexivité) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $m \in N$. Pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace réflexif**.*

La preuve de ce résultat fait l'objet de l'exercice 1.10.

1.3 Rappels d'analyse fonctionnelle

Commençons par un théorème fondamental :

Théorème 1.10 (Hahn Banach) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et p une fonction convexe définie de E dans $\mathbb{R}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et T une forme linéaire sur F qui vérifie $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Il existe alors un une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$, égale à T sur F, qui prolonge T sur l'espace E tout entier, et qui vérifie encore la condition : $T(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Le corollaire suivant est essentiel :

Corollaire 1.11 *Soit E un espace normé, F un sous-espace de E et T une forme linéaire continue sur F. On peut alors prolonger T en une application continue définie sur E, de même norme que T.*

Un résultat bien connu sur les espaces de dimension finie est donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.12 (CNS sur la dimension) *Un espace de Banach E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Les notions de convergence faible et faible-$\star$ seront fondamentales pour la suite.

Définition 1.13 (Convergence faible et faible-$\star$) *Soit E un espace de Banach*

1. ***Convergence faible** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \to u$ faiblement dans E lorsque $n \to \infty$ si $T(u_n) \to T(u)$ pour tout $T \in E'$.*
2. ***Convergence faible-$\star$** Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ et $u \in E'$. On dit que $T_n \to T$ dans E' faible-$\star$ si $T_n(x) \to T(x)$ pour tout $x \in E$.*

Théorème 1.14 (Compacité faible-$\star$ des bornés du dual d'un espace séparable) *Soit E un espace de Banach séparable, et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E' (c'est-à-dire telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que ($\|T_n\|_{E'} \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $T \in E'$ telle que $T_n \to T$ dans E' faible-$\star$.*

Une application importante de ce théorème est la suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\int_\Omega u_n\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$. Ceci découle du fait qu'il existe une isométrie naturelle entre $L^\infty(\Omega)$ et le dual de $L^1(\Omega)$ et que $L^1(\Omega)$ est séparable.

Théorème 1.15 (Compacité faible des bornés d'un espace réflexif) *Soit E un espace de Banach réflexif, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E (c'est-à-dire telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. ($\|u_n\|_E \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $u \in E$ telle que $u_n \to u$ dans E faiblement.*

Noter qu'un espace de Hilbert est toujours un espace de Banach réflexif.

1.4 Théorèmes de densité

Définition 1.16 (Frontière lipschitzienne) *Un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et des applications $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ telles que :*

1. *$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$.*
2. *$\phi_0 : \Omega_0 \to B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N$ t.q. $||x|| < 1\}$ est bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes,*
3. *Pour tout $i \geq 1$,$\phi_i : \Omega_i \to B_{1,N}$ est bijective et ϕ_i et ϕ_i^{-1} sont lipschitziennes, et $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N$ et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. (Avec $\mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.)*

Théorème 1.17 *Soit Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p \leq +\infty$ alors :*

1. *Si $p < +\infty$, l'ensemble $C^\infty(\overline{\Omega})$ des restrictions à Ω des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Il existe une application linéaire continue $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Des résultats analogues sont vrais avec $W^{m,p}(\Omega)$ $(m > 1)$ au lieu de $W^{1,p}(\Omega)$ mais demandent plus de régularité sur Ω (voir [1]). La démonstration se fait par troncature et régularisation. Un cas particulier fait l'objet de l'exercice 1.16.

On peut montrer aussi que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 1$, $m \in N$ et $1 \leq p < +\infty$. Mais, ceci est faux si on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω avec Ω ouvert borné et $m > 0$. Par exemple, si Ω est un ouvert borné, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$. Son adhérence est un sous espace strict de $H^1(\Omega)$, qu'on note $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.18 (Espace $H_0^1(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.*

1. *On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.*
2. *Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Comme cela a été dit précédemment, si $\Omega = \mathbb{R}^N$ on a $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

1.5 Théorèmes de trace

Théorème 1.19 (Trace) *Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}, x > 0$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une unique application linéaire continue γ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ telle que $\gamma u = u(0, \cdot)$ p.p sur $\mathbb{R}^{N-1}$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle) si $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$.*

Remarque 1.20 (Lien avec la trace classique.) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Alors :

1. Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, on a alors $\gamma u = u$ p.p sur $\partial\Omega$ (au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle).
2. Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.

Voir à ce propos l'exercice 1.15.

Théorème 1.21 *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une unique application γ (linéaire continue) définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et tel que*

$$\gamma u = u \text{ p.p. sur } \partial\Omega \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Ici encore, p.p. est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$.
De plus Ker $\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarquons que si $p > N$, on peut montrer (voir théorème 1.26) que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et γu est alors la valeur de u au bord au sens classique.

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 1.22 (Intégration par parties)

- *Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N (= \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N ; x_1 > 0\})$, alors*

$$\begin{cases} \text{Si } 2 \leq i \leq N, \displaystyle\int_\Omega u\, D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v \,\mathrm{d}x, \ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2, \\ \text{Si } i = 1, \displaystyle\int_\Omega u\, D_1 v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_1 u\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y) \,\mathrm{d}\gamma(y), \ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2, \end{cases}$$

- *si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne, alors, pour tout $i = 1, \ldots, N$,*

$$\int_\Omega u\, D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\, \gamma v(y) n_i(y) \,\mathrm{d}\gamma(y), \ \forall (u,v) \in (H^1(\Omega))^2,$$

où γu désigne la trace de u sur la frontière $\partial\Omega$ et $\mathrm{d}\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure adéquate sur $\partial\Omega$ (c'est-à-dire la mesure de Hausdorff sur $\partial\Omega$ qu'on peut voir comme une mesure de Lebesque $(N-1)$ dimensionnelle), et $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_N)^t$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

1.6 Théorèmes de compacité

Les théorèmes suivants sont une conséquence du théorème de Kolmogorov (voir [4, Théorème 8.5]).

Théorème 1.23 (Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.24 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne, et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Nous aurons aussi besoin d'une version du théorème 1.23 dans les espaces duaux de L^p et $W_0^{1,p}$. Comme, pour $p < +\infty$, le dual de L^p est identifié à l'espace L^q avec $q = p/(p-1)$, et que le dual de $W_0^{1,p}$ est noté $W^{-1,q}$, on obtient le théorème 1.25.

Théorème 1.25 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $1 < q < +\infty$. Toute partie bornée de $L^q(\Omega)$ est relativement compacte dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*
En particulier, pour $q = 2$, L'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H^{-1}(\Omega)$. Toute partie bornée de $L^2(\Omega)$ est donc relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.

1.7 Injections de Sobolev

Le théorème suivant donne les injections de Sobolev ; ces injections établissent le fait qu'une fonction dont une certaine puissance d'elle-même et de sa dérivée est intégrable (c'est-à-dire $u \in W^{1,p}$) est en fait dans un "meilleur" espace (en terme d'intégration ou de régularité). On distingue trois cas différents, selon que la puissance est inférieure strictement, égale, ou supérieure strictement à la dimension de l'espace N.

Théorème 1.26 (Injections de Sobolev) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne, soit égal à $\mathbb{R}^N$.*

1. *Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$, avec $p^\star = \frac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que*

   $$\forall u \in W^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_{L^{p^\star}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}},\ \textit{ce qu'on note } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega);$$

   on a en particulier

   $$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

   Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi

   $$[W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \textit{ si } N = 1.$$

2. *Si $p > N$, alors*

   $$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$

   où , pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α défini par

   $$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{R}; |u(x) - u(y)| \leq k\|x-y\|^\alpha, \forall (x,y) \in \Omega^2\}. \tag{1.5}$$

   La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 1.13.

3. *Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ (et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, voir un contre exemple à l'exercice 1.5.*

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.27 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une conséquence simple du théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) et du théorème de compacité de Rellich (théorème 1.23) est que l'application $u \mapsto$ est compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ si $1 \leq p \leq N$ et $q < p^\star = \frac{pN}{(N-p}$.

Si $p > N$, une conséquence simple de théorème d'injection de Sobolev (théorème 1.26) et du théorème (classique) d'Ascoli est que l'application $u \mapsto$ est compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$.

Bibliographie

1. Mesure, intégration, probabilités, T. Gallouët et R Herbin, Ellipses, 2013
   `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/integ.pdf`
2. Analyse fonctionnelle et résultats principaux sur les Sobolev : [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983
3. Exposé complet sur les espaces de Sobolev : [1] R. A. Adams, Sobolev spaces, 1975

1.8 Exercices

Exercice 1.1 (Exemple de dérivée) *Corrigé 1.1*
Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N,\ |x_i| < 1,\ i = 1, \ldots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

   Indication – *On pourra commencer par le cas $N = 1$ et utiliser une intégration par parties.*

2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

   Indication – *Pour $N = 1$, la question revient à montrer que la mesure de Dirac ne peut pas être associée à une fonction L^1. Pour montrer cela, on peut utiliser le résultat d'intégration suivant : si $g \in L^1(\mathbb{R})$, et si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensemble mesurables dont la mesure tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, alors $\int_{A_n} g(x) dx \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

Exercice 1.2 (Une fonction de dérivée nulle est constante) *Corrigé 1.2*
Soit $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ telle que $Du = 0$. Montrer que

$$\exists a \in \mathbb{R}; u = a \text{ p.p..}$$

Indication – *On pourra considérer d'abord le cas $u \in L^1(]0, 1[)$ et procéder, par exemple, par densité. La fonction u peut être approchée par convolution par des noyaux régularisants ρ_n qu'on prend à support dans $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. En prolongeant u par 0 en dehors de $[0, 1]$, on pose $u_n = u \star \rho_n$. On a alors $u_n' = u \star \rho_n'$. Montrer alors que $u_n'(x) = -< Du, \rho_n(x - \cdot) >$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$, et en conclure que $u_n'(x) = 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$.*
Terminer le raisonnement en utilisant le fait que $u_n 1_{]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[}$ tend vers u dans L^1.
Dans le cas $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ considérer $u_\varepsilon = u 1_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$ et refaire le raisonnement précédent de manière habile. . .

Le raisonnement donné ici se généralise au cas multidimensionnel (voir l'exercice 1.4 et son corrigé). Une autre méthode, plus spécifiquement liée au cas unidimensionnel, est donnée dans le corrigé 1.2.

Exercice 1.3 (Espace de Sobolev en 1d) *Corrigé 1.3*
Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

   (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t) dt$, pour presque tout $x \in]0, 1[$. En déduire que $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0, 1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0, 1[) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$.

Indication – *Introduire la fonction $F(x) = \int_0^x Du(t)\,dt$ (qui est dans L^p), calculer sa dérivée faible et montrer qu'elle est égale à Du. Pour cela, appliquer Fubini en introduisant la fonction caratéristique $1_{[0,x]}$ et en notant que pour $x, t \in [0,1]$, $1_{[0,x]}(t) = 1_{[t,1]}(x)$.*
Montrer alors que F est continue et conclure grâce à l'exercice 1.2.

(b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

Indication – *Ecrire $u(x) = u(s) + \int_s^x Du(t)\,dt$, et intégrer par rapport à s.*

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

Indication – *Majorer $u(x) - u(y)$ par l'inégalité de Hölder.*

2. Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

Indication – *Encore Fubini…*

Exercice 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2) *Corrigé 1.4*
Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :
Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de noyaux régularisants, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned} &\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1,\ \rho \geq 0,\ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1,\\ &\text{et, pour } n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}^N,\ \rho_n(x) = n^N \rho(nx). \end{aligned} \tag{1.6}$$
On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.
Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure.…]
2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a
$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt,$$
et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1 - 2\varepsilon$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$ on a
$$(\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\overline{z})\rho_n(z - \overline{z})d\overline{z}.$$
En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \ldots, D_N u\}^t$,
$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)dt.$$
Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B. (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Exercice 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3) *Corrigé 1.5*
Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Indication – Montrer que la dérivée par transposition de u est une dérivée faible et que cette dérivée faible est égale (presque partout) à sa dérivée classique .

Exercice 1.6 (Laplacien d'un élément de $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = \int u(x) \Delta\varphi(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx.$$

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual (topologique) de $H_0^1(\Omega)$. Déduire de la question précédente que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (c'est-à-dire que l'élément de $\mathcal{D}^\star(\Omega)$, noté Δu, se prolonge de manière unique en un élément de $H^{-1}(\Omega)$, encore notée Δu) et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}.$$

NB. En fait, on montrera au chapitre 2 que sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme notée $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}$. Avec ce choix de norme sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Exercice 1.7 (Petits pièges...) Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose $G(x) = \ln(|x|)$.

1. Montrer que $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et $\Delta G = 0$ (au sens classique) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En déduire que $\Delta G = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Que vaut ΔG dans $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^2)$?
2. Montrer que $G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < +\infty$ et $\nabla G \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour $p < 2$.
3. On prend dans cette question $\Omega =]0, 1[^2$. Montrer que

$$u \in L^2(\Omega), \, \Delta u \in H^{-1}(\Omega) \not\Rightarrow u \in H^1(\Omega).$$

   Montrer que

$$v \in (H^{-1}(\Omega))^2, \, \mathrm{div}(v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \text{ et } \mathrm{rot}(\mathrm{v}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^\star(\Omega) \not\Rightarrow \mathrm{v} \in (\mathrm{L}^2(\Omega))^2.$$

4. (Singularité éliminable) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0. On suppose ici que $u \in H^1(\Omega)$ et que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega \setminus \{0\})$. Montrer que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. [On pourra utiliser astucieusement la fonction $G\ldots$].

Exercice 1.8 (Trois applications de Hahn-Banach) Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.

   Indication – Définir T sur la droite engendrée par x et prolonger T par Hahn Banach.

2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.

   Indication – *Sens $\Rightarrow$: Sens facile.*
   Sens $\Leftarrow$: construire l'application linéaire T sur $\mathbb{R}x \oplus F$ par $T(x) = 1$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$; montrer que T est continue et conclure par Hahn Banach. La continuité de T est le point le plus technique : on peut par exemple remarquer que si $x \notin \overline{F}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \cap F = \emptyset$, et montrer ensuite que $T(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|z\|$ pour tout $z \in G = \mathbb{R}x \oplus F$, ce qui montre la continuité d T sur G.

3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E$" pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E$". (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E$".)

   Indication – *La linéarité et la continuité de J sont faciles. Il reste à montrer le caractére isométrique. Soit $x \in E$. Il est facile de voir que $|J(x)| \leq \|x\|_E$. Pour montrer l'égalité, considérer l'application T de la première question.*

Exercice 1.9 (Séparabilité de L^p) On désigne par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que L^p est séparable.

   Indication – *On pourra onstruire une famille dénombrable dense de $C_c(\mathbb{R})$ en considérant pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n des fonctions qui sont nulles sur $[-n,n]^c$ et qui sont constantes par morceaux et à valeur rationnelles sur tous les intervalles de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \mathbb{Z}$.. Vérifier que les ensembles A_n sont dénombrables, et montrer ensuite que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dense dans L^p.*

2. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

   Indication – *Soit B l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$ et qui ne prenent que les valeurs 0 ou 1. Vérifier que B est une partie non dénombrable de L^∞ et que si A est une partie dense de $L^\infty(\mathbb{R})$ il existe une injection de A dans B.*

Exercice 1.10 (Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$)

Soient (X, T, m) un espace mesuré σ-fini et $1 < p < \infty$, montrer que $L^p(X, T, m)$ est un espace de Banach réflexif.

Exercice 1.11 (Séparabilité et réflexivité d'un s.e.v. fermé)

Soient E un espace de Banach (réel) et F un s.e.v. fermé de E. Montrer que :

1. E séparable $\Rightarrow$ F séparable.
2. E réflexif $\Rightarrow$ F réflexif.

Exercice 1.12 (Fonctions lipschitziennes)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

N.B. : Réciproquement, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors u est lipschitzienne (au sens : il existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ lipschitzienne t.q. $u = v$ p.p.).

Exercice 1.13 (Inégalités de Sobolev pour $p > N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $p > N$.
Si $x \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), on note $x = (x_1, \bar{x})$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$. On note $H = \{(t, (1-|t|)a),\, t \in]-1, 1[,\, a \in B_{N-1}\}$, où $B_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{N-1},\, |x| < 1\}$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne toujours la norme euclidienne.)
Soit $N < p < \infty$.

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(1,0) - u(-1,0)| \leq C_1 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(H)}. \tag{1.7}$$

[On pourra commencer par écrire $u(1,0) - u(0,a)$ comme une intégrale utilisant convenablement $\nabla u(t,(1-t)a)$ pour $t \in]0,1[$, et intégrer pour $a \in B_{N-1}$ pour comparer u(1,0) et sa moyenne sur B_{N-1}. On pourra se limiter au cas $N = 2$, pour éviter des complications inutiles.]

2. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(x) - u(y)| \leq C_2 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x-y|^{1-\frac{N}{p}}. \tag{1.8}$$

[Après, éventuellement, une rotation et une translation, on peut supposer que $x = (b, 0)$ et $y = (-b, 0)$. Se ramener alors à (1.7).]

Pour $\alpha \in]0,1]$ et K sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$, on note

$$C^{0,\alpha}(K) = \{u \in C(K, \mathbb{R}),\ \|u\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ et } \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\},$$

et, si $u \in C^{0,\alpha}(K)$,

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(K)} + \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Noter que $C^{0,\alpha}(K)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

3. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.9}$$

[Cette question est plus délicate... Il faut utiliser (1.8) et le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.]

4. (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.) Montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.10}$$

5. (Injection de Sobolev dans Ω.) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne.
Montrer que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_5 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de Ω, N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_5 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Exercice 1.14 (Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$) *Corrigé 1.6*

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \leq p \leq N$.

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
   (a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.
   (b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.
   (c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \| \, |\nabla u| \, \|_1$.
   (d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.
2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.
3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).
4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Exercice 1.15 (Noyau de l'opérateur "trace")

Soient $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq p < \infty$ et $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ l'opérateur "trace" (vu en cours).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\gamma u = u$ p.p. (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$).

Exercice 1.16 (Prolongement H^2)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra s'inspirer de la démonstration de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$].
2. Montrer qu'il existe un opérateur P linéaire continu de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra chercher P sous la forme $Pu(x_1, y) = \alpha u(-x_1, y) + \beta u(-2x_1, y)$, pour $x_1 \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$].
3. On prend maintenant $p = \infty$. A-t-on $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,\infty}(\Omega)$? Existe-t-il un opérateur P linéaire continu de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$? (justifier vos réponses…).

Exercice 1.17 (Convergence faible et opérateur continu) Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans E quand $n \to +\infty$. Montrer que $T(u_n) \to T(u)$ faiblement dans F. On donne maintenant deux applications de ce résultat.

1. Soit E et F deux espaces de Banach. On suppose que E s'injecte continûment dans F, c'est-à-dire que $E \subset F$ et que l'application $u \mapsto u$ est continue de E dans F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et u dans E. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans E quand $n \to +\infty$. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans F.
2. Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ et u dans $H_0^1(\Omega)$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $D_i u_n \to D_i u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.18 (Fonction non continue appartenant à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$) Dans cet exercice, on construit v t.q. $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $v \notin C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $w \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ t.q. $v = w$ p.p.).
Pour cela, on reprend la fonction de l'exercice 1.5.
Soit $\gamma \in]0, 1/2[$ et u définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$ si $|x| < 1$ et $u(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit u_n en posant $u_n(x) = u(x) - n$ si $n \leq u(x) < n+1$ et $u_n(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \, |\nabla u_n| \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} < +\infty.$$
[Utiliser l'exercice 1.5.]
2. Montrer que u_n prend ses valeurs entre 0 et 1 et que le support de u_n est une boule dont le diamètre tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $x_n = (1/n, 0) \in \mathbb{R}^2$ et on choisit m_n t.q. le support de u_n soit une boule de diamètre plus petit que $(1/2)(1/n - 1/(n+1))$ et t.q. la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ soit strictement croissante. Puis on pose, pour $x \in \mathbb{R}^2$, $v_n(x) = u_{m_n}(x - x_n)$.
3. Montrer que toutes les fonctions v_n ont des supports disjoints.
4. On pose $v = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$. Montrer que la fonction v appartient à $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que v est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas continue en 0.

1.9 Corrigés d'exercices

Corrigé 1.1 (Exemple de dérivée)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, \; i = 1, \ldots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

   Corrigé – *On prend, par exemple, $i = 1$ (les autres valeurs de i se traitent de manière similaire). Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a*
   $$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1 \Big) dy$$
   et donc
   $$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, y) dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, y) dy.$$
   Ceci montre bien que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.

2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

   Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Il existe alors (en particulier) $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ t.q.*
   $$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi(x) dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\times]-1, 1[^{N-1}$.

On choisit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\varphi(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin A_1$ et $\varphi(x) = 1$ si $x = (1, y)$ avec $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{N-1}$ (une telle fonction φ existe). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit alors φ_n par $\varphi_n(1+x_1, y)) = \varphi(1 + nx_1, y)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ (de sorte que $\varphi_n = 0$ hors de A_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a bien $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le choix de φ_n donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x)dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(1, y)dy - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi_n(-1, y)dy \ge 1$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi_n(x)dx| \le \int_{A_n} |g(x)|dx.$$

On a donc $\int_{A_n} |g(x)|dx \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, ce qui est impossible car la mesure de Lebesgue (N-dimensionnelle) de A_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Corrigé 1.2 (Une fonction de dérivée nulle est constante)

Soit $u \in L^1_{loc}(]0, 1[)$ t.q. $Du = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.)

Corrigé – *On se donne $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[)$ t.q. $\int_0^1 \varphi_0(x)dx = 1$.*

Pour $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[)$, on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(t)dt - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\int_0^x \varphi_0(t)dt. \text{ pour } x \in]0, 1[.$$

Avec ce choix de φ on a $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ et donc, comme $Du = 0$,

$$0 = \langle Du, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\varphi' = \psi - (\int_0^1 \psi(t)dt)\varphi_0$, on a donc

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx - \Big(\int_0^1 \psi(t)dt\Big)\Big(\int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx\Big) = 0.$$

On pose $a = \int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx$, on a ainsi

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx = \int_0^1 a\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(]0, 1[).$$

Le lemme 1.1 donne alors $u = a$ p.p..

Corrigé 1.3 (Espace de Sobolev en 1d)

Soit $1 \le p \le \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

(a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt$, pour presque tout $x \in]0, 1[$. En déduire que $u \in C([0, 1], \mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0, 1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0, 1[) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$.

Corrigé – *Pour $x \in [0, 1]$, on pose $F(x) = \int_0^x Du(t)dt$. Comme $Du \in L^1(]0, 1[)$, on a $F \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On peut aussi montrer que F est dérivable p.p. et que $F' = Du$ p.p. mais cela est inutile ici. On s'intéresse plutôt à la dérivée par transposition de F, c'est-à-dire à DF et on va montrer que $DF = Du$.*

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$. On a

$$\langle DF, \varphi\rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 F(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,x[}(t)Du(t)dt\Big)\varphi'(x)dx.$$

En remarquant que $1_{]0,x[}(t) = 1_{]t,1[}(x)$ pour tout $t, x \in]0,1[$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a donc

$$\langle DF, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]t,1[}(x)\varphi'(t)dx \Big) Du(t)dt = \int_0^1 \varphi(t)Du(t)dt,$$

ce qui prouve que $DF = Du$.

On a donc $D(u - F) = 0$ et l'exercice 1.2 donne alors l'existence de $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u - F = C$ p.p. c'est-à-dire

$$u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt \text{ pour presque tout } x \in]0,1[.$$

(b) Montrer que $\|u\|_\infty \le \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

Corrigé – On choisit maintenant pour u (qui est une classe de fonctions) son représentant continu. On a alors pour tout $x \in [0,1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt.$$

On a alors aussi pour tout $x, y \in [0,1]$, $u(x) = u(y) + \int_y^x Du(t)dt$, on en déduit

$$|u(x)| \le |u(y)| + \int_0^1 |Du(t)|dt.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$ (par rapport à y), on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$|u(x)| \le \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} = \|u\|_{W^{1,1}},$$

et donc, en prenant le max sur x et en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^1} + \|Du\|_{L^1} \le \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

(c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.

Corrigé – On choisit toujours pour u son représentant continu. Soit $x, y \in [0,1]$, $y > x$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_x^y Du(t)dt$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(y) - u(x)| \le \Big(\int_x^y |Du(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} |y - x|^{1-\frac{1}{p}} \le \|u\|_{W^{1,p}} |y - x|^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

Corrigé – Il est clair que $u \in L^p(]0,1[)$. Pour montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ il suffit de montrer que $Du = w$ c'est-à-dire que $\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = \int_0^1 w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$. On a

$$\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^t w(x)dx \Big) \varphi'(t)dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]0,t[}(x)w(x)dx \Big) \varphi'(t)dt.$$

On utilise une nouvelle fois le thézorème de Fubini et le fait que $1_{]0,t[}(x) = 1_{]x,1[}(t)$ (pour tout $x, t \in]0,1[$). On obtient

$$\langle Du, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^\star, C_c^\infty} = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 1_{]x,1[}(t)\varphi'(t)dt \Big) w(x)dx = -\int_0^1 \Big(\int_x^1 \varphi'(t)dt \Big) w(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)w(x)dx.$$

Ce qui donne bien $Du = w$.

Corrigé 1.4 (Généralisation de l'exercice 1.2)

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

   Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de noyaux régularisants, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1,\ \rho \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N,\ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1,\\ &\text{et, pour } n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R}^N,\ \rho_n(x) = n^N \rho(nx). \end{aligned} \tag{1.12}$$

   On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

   Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure. . . .]

   Corrigé – *On a $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est donc bien définie sur tout $\mathbb{R}^N$. Le fait que $u_{\varepsilon,n}$ soit de classe C^∞ est classique et les dérivées de $u_{\varepsilon,n}$ sont égales à la convolution de u_ε avec les dérivées de ρ_n. Il est facile aussi de voir que $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction à support compact car u_ε et ρ_n sont des fonctions à support compact.*

   On note B_r la boule de centre 0 et de rayon r. On montre maintenant que pour tout i la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$ si $1/n < \varepsilon$..

   Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \Big(u_\varepsilon \star \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - y) dy.$$

   Si $1/n < \varepsilon$ et $x \in B_{1-2\varepsilon}$, la fonction $\rho_n(x - \cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$. On remarque aussi que

$$\frac{\partial \rho_n(x - \cdot)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - \cdot).$$

   (La notation $\partial/\partial x_i$ désigne la dérivée par rapport à la i-ème variable, à ne pas confondre avec la i-ème composante de x dans la formule précédente. . . .) On obtient ainsi

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(x) = \int_B u(y) \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - y) dy = \langle D_i u, \rho_n(x - \cdot)\rangle_{\mathcal{D}^\star(B), C_c^\infty(B)} = 0.$$

   On a ainsi montré que pour $1/n < \varepsilon$, la fonction $\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}$ est, pour tout i, nulle sur $B_{1-2\varepsilon}$. On en déduit que la fonction $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $x \in B_{1-2\varepsilon}$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(x) - u_{\varepsilon,n}(0) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(tx) \cdot x\, dt = 0.$$

   Comme $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. En considérant les restrictions de ces fonctions à la boule $B_{1-2\varepsilon}$ (sur la laquelle $u_\varepsilon = u$), la suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B_{1-2\varepsilon})$ vers u. Comme $u_{\varepsilon,n}$ est une fonction constante sur $B_{1-2\varepsilon}$ (pour $1/n < \varepsilon$) sa limite (dans L^1) est donc aussi une fonction constante. Ceci montre que la fonction u est constante sur $B_{1-2\varepsilon}$, c'est-à-dire qu'il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a_\varepsilon$ p.p. sur $B_{1-2\varepsilon}$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que a_ε ne dépend pas de ε et que u est constante sur B.

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens "il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p."). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1 - t)x) \cdot (y - x) dt,$$

et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1-2\varepsilon$ et $i \in \{1,\ldots,N\}$ on a

$$(\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i)(z) = \int_B D_i u(\overline{z})\rho_n(z-\overline{z})d\overline{z}.$$

En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a, avec $Du = \{D_1 u, \ldots, D_N u\}^t$,

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt.$$

Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $u_{\varepsilon,n}$ est de classe C^∞. On a donc bien, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,*

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt. \tag{1.13}$$

Dans cette formule $\nabla u_{\varepsilon,n}$ désigne la fonction vectorielle définie par les dérivées classiques de $u_{\varepsilon,n}$.
Pour $z \in \mathbb{R}^N$ et $i \in \{1,\ldots,N\}$ on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(\overline{z})\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(z-\overline{z})d\overline{z}.$$

Si $z \in B_{1-2\varepsilon}$ et $1/n < \varepsilon$, la fonction $\rho_n(z-\cdot)$ appartient à $C_c^\infty(B)$ et est nulle hors de $B_{1-\varepsilon}$ (et sur $B_{1-\varepsilon}$ on a $u_\varepsilon = u$). On en déduit

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial x_i}(z) = \langle D_i u, \rho_n(z-\cdot)\rangle_{\mathcal{D}^\star(B), C_c^\infty(B)} = \int_B D_i u(\bar{z})\rho_n(z-\bar{z})d\bar{z}.$$

Comme $D_i(u)$ est uniformément continue sur $B_{1-\varepsilon}$, on déduit de la formule précédente que $\partial u_{\varepsilon,n}/\partial x_i$ converge vers $D_i u$ uniformément sur $B_{1-2\varepsilon}$. On a donc, pour tout $x, y \in B_{1-2\varepsilon}$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt. = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt.$$

La suite $(u_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_ε. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut donc supposer que cette suite converge p.p. vers u_ε et donc p.p. vers u sur la boule $B_{1-\varepsilon}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité (1.13), on obtient pour presque tout x, y dans $B_{1-2\varepsilon}$

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt. \tag{1.14}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la formule (1.14) est valable pour presque tout $x, y \in B$.

Pour conclure, on fixe un point $x \in B$ pour lequel (1.14) est vraie pour presque tout $y \in B$ et on pose

$$v(y) = u(x) + \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x)dt \text{ pour tout } y \in B.$$

La fonction v est de classe C^1 (car Du est une fonction continue et donc v est dérivable sur tout B et $\nabla v = Du$). Comme $u = v$ p.p., ceci termine la question.

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B. (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Corrigé – *On note Ω l'ouvert remplaçant B. Le raisonnement précédent montre que sur toute boule incluse dans Ω, u est p.p. égale à une constante. Pour que l'égalité soit vraie sur toute la boule (et non seulement p.p.), il suffit de définir v sur Ω par*

$$v(x) = \lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{1}{\lambda_d(B_{x,h})} \int_{B(x,h)} u(y)dy \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

où $B(x,h)$ désigne la boule de centre x et de rayon h et $\lambda_d(B(x,h))$ la mesure de Lebesgue d-dimensionelle de cette boule. On a alors $u = v$ p.p. (v est donc un représentant de la classe u) et sur toute boule incluse dans Ω, v est égale à une constante.

La fonction v est donc localement constante. On en déduit que v est constante sur chaque composante connexe de Ω. En effet, soit $x \in \Omega$ et U la composante connexe de Ω contenant x. On pose $a = v(x)$. L'ensemble $\{y \in U; v(y) = a\}$ est un ouvert non vide de U et l'ensemble $\{y \in U; v(y) \neq a\}$ est aussi un ouvert de U disjoint du précédent. Par connexité de U ce dernier ensemble est donc vide, ce qui prouve que $v = a$ sur tout U.

Corrigé 1.5 (Non généralisation de l'exercice 1.3)

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Corrigé – *La fonction u est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ (en remarquant que $|x| \le \sqrt{2}/2 < 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$). Les dérivées classiques de u sont pour $x = (x_1, x_2)^t \neq 0$*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\gamma(-\ln(|x|))^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|^2},\ i = 1, 2.$$

Il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ (et même $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p < +\infty$). Comme $\gamma < 1/2$, on peut aussi montrer que les dérivées classiques de u sont dans $L^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de remarquer que, pour $a > 0$,

$$\int_0^a \frac{1}{r|\ln(r)|^{2(1-\gamma)}}dr < +\infty.$$

Pour montrer que $u \in H^1(\Omega)$, il suffit donc de montrer que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour $i = 1, 2$, on a

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx. \tag{1.15}$$

On montre maintenant (1.15) pour $i = 1$ (bien sûr, $i = 2$ se traite de manière semblable). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. On pose $L_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1/2, 1/2]$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = -\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx - \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2. \tag{1.16}$$

(On a utilisé ici le fait que $u(\varepsilon, x_2) = u(-\varepsilon, x_2)$.)

Par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx = \int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)dx \ \text{ et } \ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx$$

Il reste à montrer que le deuxième terme du membre de droite de (1.16) tend vers 0. Ceci se fait en remarquant que la fonction φ est régulière, il existe donc C ne dépendant que de φ t.q.

$$|\int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2| \le |\ln(\varepsilon)|^\gamma C\varepsilon.$$

On en déduit bien que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))dx_2 = 0,$$

ce qui termine la démonstration de (1.15) pour $i = 1$. Finalement, on a bien ainsi montré que les dérivées par transposition de u sont représentées par les dérivées classiques et que $u \in H^1(\Omega)$.

Corrigé 1.6 (Inégalités de Sobolev pour $p \le N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'injection de Sobolev pour $1 \le p \le N$.

La démonstration proposée ici est due à L. Nirenberg. Elle consiste à faire d'abord le cas $p = 1$, puis à en déduire le cas $1 < p < N$. Historiquement, la cas $1 < p < N$ à été démontré avant le cas $p = 1$ (et le cas $p = 1$ est longtemps resté un problème ouvert).

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

Corrigé – *Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)dt$ et donc*

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'(t)|dt \leq \|u'\|_1.$$

On en déduit bien $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

(b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.

Corrigé – *la question précédente permet d'initialiser la récurrence, on a pour tout toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.*

Soit maintenant $N \geq 1$. On suppose que pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}.$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ on note $x = (x_1, y)^t$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^N$. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)||u(x_1,y)|^{\frac{1}{N}} dy \\ \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N}{N-1}} dy\Big)^{\frac{N-1}{N}} &\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|dy\Big)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $y \mapsto u(x_1, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R}^N)$), on obtient

$$\|u(x_1,\cdot)\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N}.$$

D'autre part, en appliquant le cas $N = 1$ (démontré à la question (a)) à la fonction $z \mapsto u_(z, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R})$), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$|u(x_1,y)| \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

et donc, en intégrant par rapport à y,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En reportant ces majorations dans (1.17) on obtient pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1,y)|^{\frac{N+1}{N}} dy \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}^{\frac{1}{N}}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à x_1 et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (avec le produit de$N$ fonctions dans L^N, on obtient bien l'inégalité désirée, c'est-à-dire

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}}^{\frac{N}{N+1}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{1/N},$$

ou encore

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N+1}} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}\|_1^{\frac{1}{N+1}}.$$

Ce qui termine la récurrence.

(c) Montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \| |\nabla u| \|_1$.

Corrigé – *La moyenne géométrique de N nombres positifs est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. (Ceci peut se démontrer en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle.)*

On en déduit que

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1.$$

Comme $\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1 \leq \|\,|\nabla u|\,\|_1$ *pour tout* i*, on a bien*

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\,|\nabla u|\,\|_1.$$

(d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.

Corrigé – *Pour* $p = 1$*, on a vu que* $C_{N,p} = 1$ *convient. On suppose maintenant* $1 < p < N$*.*

On pose $\alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$ *(de sorte que* $\alpha\frac{N}{N-1} = p^\star$*) et* $v = |u|^{\alpha-1}u$*.*

Comme $\alpha > 1$ *et* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$*, on a aussi* $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$*. On peut donc appliquer le résultat de la question (c) à la fonction* v*. On obtient*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\alpha\frac{N}{N-1}}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \|\,|\nabla v|\,\|_1.$$

Comme $|\nabla v| = \alpha|u|^{\alpha-1}|\nabla u|$*, l'inégalité de Hölder (avec* p *et* $q = p/(p-1)$*) donne*

$$\|\,|\nabla v|\,\|_1 = \alpha\|\,|u|^{\alpha-1}\,|\nabla u|\,\|_1 \leq \alpha\|\,|u|^{\alpha-1}\,\|_q\|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

Comme $(\alpha-1)q = (\alpha-1)p/(p-1) = p^\star$*, on a donc*

$$\|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(N-1)}{N}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p^\star}\Big)^{\frac{N-1}{N}} \leq \alpha\|u\|_{p^\star}^{\frac{p^\star(p-1)}{p}}\|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

Ce qui donne, avec $C_{N,p} = \alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$*,*

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p.$$

2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.

Corrigé – *Soit* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions appartenant à* $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $u_n \to u$ *dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *quand* $n \to +\infty$*. Par la question précédente, cette suite est de Cauchy dans* $L^{p^\star}$*. Par unicité de la limite (par exemple dans* $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$*) cette limite est nécessairement égale à* u*. On peut alors passer à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans l'inégalité* $\|u_n\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u_n|\,\|_p$ *et on obtient ainsi*

$$\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|\,|\nabla u|\,\|_p \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ceci donne l'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$*.*

L'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *est immédiate car* $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*.*

Soit maintenant $q \in]p, p^\star[$*. Pour montrer que* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *s'injecte continûment dans* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *il suffit d'utiliser l'inégalité classique suivante (qui se démontre avec l'inégalité de Hölder) avec* $p < q < r = p^\star$*.*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta\|u\|_r^{1-\theta}, \tag{1.18}$$

avec $\theta = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in]0,1[$*.*

3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Corrigé – *Le cas* $N = 1$ *est facile. La question 2 donne l'injection continue de* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R})$*. Comme* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *s'injecte aussi continûment dans* $L^1(\mathbb{R})$*, on obtient aussi une injection continu de* $W^{1,1}(\mathbb{R})$ *dans* $L^q(\mathbb{R})$ *pour tout* $q \in]1, +\infty[$ *(en utilisant (1.18) avec* $r = +\infty$*,* $p = 1$ *et* $\theta = 1/q$*).*

On suppose maintenant $N > 1$. On a bien une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R})$ dans $L^N(\mathbb{R})$. Le seul cas à considérer est donc $N < q < +\infty$. Plusieurs démonstration sont possibles. Une première démonstration consiste à utiliser pour $|u|^\alpha$, avec $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité démontrée à la question 1 (c), puis à utiliser l'inégalité de Hölder (pour faire apparaître $|\nabla u|^N$) et l'inégalité (1.18). Enfin, on conclut avec la densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. On donne ci dessous une démonstration probablement plus longue mais qui utilise de manière intéressante le caractère homogène de la norme. de la norme.

Soit $N < q < +\infty$. Il existe alors $p \in]1, N[$ t.q. $p^\star = Np/(N-p) = q$. On va utiliser la question 1 avec cette valeur de p.

On définit φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, par :

$$\begin{aligned}
&\varphi(s) = 0 \text{ si } |s| \le 1,\\
&\varphi(s) = \tfrac{1}{2}(|s|-1)^2 \text{ si } 1 < |s| \le 2,\\
&\varphi(s) = |s| - \tfrac{3}{2} \text{ si } 2 < |s|.
\end{aligned}$$

On a $|\varphi(u)| \le 1$ et $|\varphi'(s)| \le 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$. On a $\varphi(u) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Par question 1 (et la définition φ) on obtient

$$\|\varphi(u)\|_q^p \le C_{N,p}\| \, |\nabla \varphi(u)| \, \|_p \le C_{N,p} \int_{\{|u|\ge 1\}} |\nabla u(x)|^p dx \le C_{N,p} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \Big)^{\frac{p}{N}} \lambda_d(\{|u| \ge 1\}^{1-\frac{p}{N}}.$$

On a $\lambda_d(\{|u| \ge 1\} \le \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx \le 1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \le 1$. On en déduit

$$\|\varphi(u)\|_q^p \le C_{N,p}.$$

Comme $|u|^q \le 2^q \varphi(u)^q + 2^q$, on a donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx = \int_{\{|u|\le 1\}} |u(x)|^q dx + \int_{\{|u|>1\}} |u(x)|^q dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx + 2^q \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(u(x))|^q dx + 2^q \lambda_d(\{|u| > 1\}) \le 1 + 2^q C_{N,p}^{\frac{q}{p}} + 2^q.
\end{aligned}$$

Il existe donc $D_{N,q}$ ne dépendant que N et q t.q $\|u\|_q \le D_{N,q}$ si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|u\|_{W^{1,N}} = 1$ Grâce au caractère homogène de la norme, on a en déduit que $\|u\|_q \le D_{N,q}\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Enfin, par densité de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ on obtient que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_q \le D_{N,q}\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \text{ pour tout } u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui montre bien qu'il y a une injection continue de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.

4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \le p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N-p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Corrigé – *Cette question consiste seulement à utiliser l'existence d'un opérateur P linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $Pu = u$ p.p. dans Ω (opérateur dit de "prolongement" dont l'existence est donnée par le théorème 1.17). En effet, grâce à cette opérateur, la question 4 est une conséquence des questions précédentes (et de l'inégalité (1.18)).*