**1- تعريف النماذج الثنائية**

**2- أهداف وأهمية النماذج الثنائية**

**3- شروط اشتقاق النماذج الثنائية**

**4- خطوات اشتقاق النماذج الثنائية من النماذج الاصلية**

**1- النموذج الثنائي للنماذج الأصلية القانونية (النظامية): لكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات () برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات مشتق منه ومعرَّف حسب الحالة كما يلي:**

**أ- تشكيل النموذج الثنائي لنموذج أصلي قيوده كلها ():** وتتم عملية التحويل كما يلي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نمــــــــــــوذجه الثنــــــــــــــــــــــــــــــــــــــائي** |  |

مثال: ليكن النموذج الرياضي التالي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **النموذج الثنائي** |  |

**مثال 02:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| مثال 03: | **النموذج الثنائي** |  |
| : | **النموذج الثنائي** |  |

**ب- تكوين النموذج الثنائي لنموذج أصلي قيوده كلها (): يكون شكلها كما يلي:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نمــــــــــــوذجه الثنــــــــــــــــــــــــــــــــــــــائي** |  |

**مثال:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ، | ، |

**2- النموذج الثنائي للنماذج المختلطة:** تتجلى هذه الحالات فيما يلي:

**أ- تشكيل النموذج الثنائي لنموذج أصلي قيوده كلها (): وتتم عملية التحويل كما يلي:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نمــــــــــوذجه الثنــــــــــــائي** | ، |

في حالة ما إذا كانت القيود في شكل معادلات فإنه يجب أن نحول هذا الشكل الأصلي للنموذج الخطي إلى الشكل الذي تكون قيوده من الشكل أقل أو يساوي إذا كانت دالة الهدف "Max" أو تحويلها إلى شكل أكبر أوتساوي إذا كانت دالة الهدف من شكل " Min " ، فإذا كان لدينا قيد ما على شكل معادلة أي () فيلزم أن نحوله إلى شكل متراجحة مع العلم أن أي معادلة تعادل متباينتين ذات اتجاهين متعاكسين كما يلي:

هذا يعني أن أي قيد بشكل معادلة يجب أن نعوضه بمتراجحتين متعاكستين الاتجاه كما ذكرنا سابقًا، ثم ننظر بعد ذلك إلى دالة الهدف فإذا كانت في شكل "Min" فإنه يجب تحويل كل القيود الفنية الناتجة إلى شكل أكبر أو تساوي أي:

أما إذا كانت دالة الهدف في شكل "Max" فإنه يجب تحويل كل القيود إلى شكل أصغر أو تساوي أي:

وبالتالي فإن القيد الفني من الشكل يتحول إلى الشكل الموالي إذا كانت دالة الهدف في شكل "Max":

أما في حالة "Min" فيتحول إلى شكل كما يلي:

بعد هذا التحويل نقوم بتكوين نموذج ثنائي مقابل للنموذج الأصلي السابق وذلك باتباع القواعد العامة المشار إليها سابقًا. " فمن الناحية التطبيقية فإنه من أجل تكوين الشكل الثنائي لنموذج خطي أصلي ذو قيود كلها في شكل معادلات يكفي أن نتذكر أن أي قيد في النموذج الأصلي في شكل معادلة يقابله **متغير ثنائي حر** والعكس أيضًا صحيح، إذا كان أي **متغير في النمذج الأصلي حر** فإن ذلك يعني أن القيد الثنائي الذي يقابله يكون في شكل معادلة " (علي، 2015، الصفحات 120-121)

مثال: لتكن النماذج الرياضية التالية:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نموذجــــــــه الثنـــــــــائــــــــي** |  |
| 6 | **نموذجــــــــه الثنـــــــــائــــــــي** |  |

**مثال: ليكن النموذج الرياضي الأصلي التالي:**

**قبل صياغة النموذج في شكله الثنائي يجب تعديل اتجاه متباينة القيد الثالث بضربها في (1-) لتصبح:**

**ويصبح النموذج الأصلي بعد تعديله كما يلي:**

وبعد ذلك يتم صياغة المشكلة في شكلها النهائي كما يلي:

**ب- تشكيل النموذج الثنائي لنموذج أصلي متغيراته حرة : يكون شكلها كما يلي:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نمــــــــــــوذجه الثنــــــــــــــــــــــــــــــــــــــائي** |  |

وهذا الشكل من النماذج الخطية وهو عكس الحالة السابقة (الثنائية)، والنموذج الثنائي المناسب له له يكون من صنف النموذج الأصلي للحالة السابقة، وذلك بإجراء عملية عكسية لها؛ أي تحويل القيود من شكل متباينات إلى شكل معادلات.

مثال:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **يحول إلى الصيغة التالية:** |  |
|  |

**ج- تكوين النموذج الثنائي لنموذج أصلي قيوده تحتوي على مزيج من القيود الفنية (): في حالة ما إذا كان النموذج الأصلي يتكون من مزيج من القيود () فإنه يجب أن نحوِّل هذا الشكل الابتدائي للنموذج الخطي إلى الشكل التي تكون قيوده كلها من الشكل أوأو يساوي إذا كانت دالة الهدف من نوع "Max" أو تحويلها أ=غلى الشكل في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل "Min'، ثم بعد ذلك نكون النموذج الثنائي له باتباع القواعد المذكور سابقًا كما يلي:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **نمــــــــــــوذجه الثنــــــــــــــــــــــــــــــــــــــائي** |  |

**مثال: ليكن النموذج الرياضي التالي:**

قبل صياغة نموذج المشكلة المقابلة يجب إجراء تعديلات الآتية على النموذج الأصلي:

\* تعديل اتجاه متباينة القيد الأول بضربها في (1-) لتصبح:

\* تحويل معادلة القيد الثاني إلى متباينتين مختلفتي الإتجاه كما يلي:

بضرب طرفي المتباينة الأخيرة في (1-) لتصبح:

وفي ضوء ما سبق تصبح صياغة المشكلة الأصلية بعد تعديلها في النموذج التالي ويكون النموذج الثنائي كما يلي:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| مادام القيد الثاني في شكل معادلة فإن المتغير الثنائي الذي يقابله وهو يكون متغيرًا حرًا ويكون النموذج الثنائي بالشكل التالي: | |
| ، | |

**3- العلاقة بين النماذج الثنائية والنماذج الأصلية: تكمن العلاقة بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي في وجود أوجه اتفاق وأوجه اختلاف وتتمثل أوجه الاتفاق في الآتي:** (علاء محمد، 2015، الصفحات 293-294)

-**صياغتهما تتم من مجموعة بيانات واحدة، فالنموذج الثنائي – كما سبق القول- يشتق من نفس بيانات النموذج الأصلي؛**

**- دالة الهدف فيهما متساوية، فدالة الهدف في نموذج تعيم الأرباح (الأرباح المثلى التي يمكن تحقيقها) تتساوى مع دالة الهدف في النموذج المقابل (تكلفة الموارد النادرة التي تساهم في تحقيق الأرباح المثلى مقومة بأسعار لها)؛**

**- حلهما الأمثل واحد فالحل الأمثل لأحدهما يعني الحل الأمثل للآخر,**

**أما أوجه الاختلاف بينهما فتتمثل كما سبق ذكره في مجموعة البيانات التي يعتمد عليها كل منهما.**

**ويتم تبيان العلاقة من خلال الأمثلة التالية:**

مثال: تقوم إحدى المؤسسات الصناعية بإنتاج منتجين هما () يمران خلال عملية التصنيع على ثلاث آلات: يتطلب إنتاج الوحدة أربع (04) ساعات طاقة من الآلة الأولى وساعتين (02) من الآلة الثانية وثلاث ساعات (03) من الآلة الثالثة،بينما يتطلب إنتاج وحدة ست ساعات (06) من الآلة الأولى وساعة واحدة (01) من الآلة الثانية، وثلاث ساعات (03) من الآلة الثالثة، فإذا علمت أن الطاقة المتاحة على الآلات الثلاث هي 48 ساعة، 21 ساعة، 18 ساعة على التوالي، وأن هامش الربح المقدر للوحدة من المنتج الأول 15 دج، ومن المنتج الثاني 30 دج.

**المطلوب:**

- صياغة النموذج الأصلي تحديد تشكيلة الإنتاج المثلى التي تعظم أرباح المؤسسة بإستخدام طريقة السمبلكس؟

- صياغة النموذج الثنائي وتحديد أسعار الظل التي تدني تكلفة الموارد النادرة المتاحة بالمؤسسة باستخدام طريقة السمبلكس؟

- تحقيق ومطابقة الحلول المثلى بين النموذجين؟

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج منتجين وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات من المنتج الأول؛**

**: عدد وحدات من المنتج الثاني؛**

دالة الهدف: دالة هدف من نوع تعظيم تظهر كما يلي:

\*القيود: يمكن الاستعانة بالجدول الموالي لإعداد النموذج الرياضي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| الآلات  المنتجات | المنتج "x1" | المنتج "x2" | الطاقة المتاحة |
| الآلة الأولى | 4 | 6 | 48 |
| الآلة الثانية | 2 | 1 | 21 |
| الآلة الثالثة | 1 | 3 | 18 |
| ربح الوحدة الواحدة | 15 دج | 30 دج |  |

ومنه تظهر القيود كما يلي:

قيد الآلة الأولى:

قيد الآلة الثانية :

قيد الآلة الثالثة :

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**حل النموذج بطريقة السمبلكس:**

1**- تحويل المتراجحات إلى معادلات:** لحل هذا النموذج بطريقة السمبلكس نحول شكل القيود الفنية من متراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفوارق () بعدد القيود إلى طرفها الأيسر وإضافتها بما أن (جميع القيود () أقل أو تساوي وأيضًا بمعاملات صفر إلى دالة الهدف ، ويظهر النموذج بشكله القياسي كما يلي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**2- تكوين جدول الحل الإبتدائي (الجدول الأول): يظهر كما يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **30** | **15** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | **48** | **0** | 0 | 1 | **6** | **4** |  | **0** |
|  | 21 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |  | 0 |
|  | **18** | **1** | 0 | 0 | 3 | 1 |  | **0** |
|  |  | **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | =0 | |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **-30** | **-15** |  | |

يتناسب الحل الإبتدائي مع مرحلة ما قبل النشاط، أي المرحلة التي تبدأ المؤسسة فيها النشاط بعد، وبالتالي تكون متغيرات القرار المعبرة عن كميات الإنتاج المنتجين تساوي الصفر (وعندما تكون الكميات المنتجة تساوي الصفر فإن دالة الهدف وهي دالة أرباح المؤسسة تساوي 0 أيضًا ومن هنا يصبح الحل الابتدائي يتكون من متغيرات الفوارق () وقيمتها على التوالي ().

**3- البحث عن الحل الأمثل (تحسين الحل):** إن الحل الأولي ما هو إلا حل يتم الانطلاق منه للحصول على الحل الأمثل، ولتحسين الحل يتم تحسين الموضح في الجدول الموالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **30** | **15** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | **48** | **0** | 0 | 1 | **6** | **4** |  | **0** |
|  | 21 | 0 | 1 | 0 | **1** | 2 |  | **0**  سط ر المحور  **المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة**  عمود الدوران  المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة  نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران |
|  | **18** | **1** | 0 | 0 | **3** | 1 |  | **0** |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **0** | 0 | =0 | |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **-30** | **-15** |  | |

من الجدول أعلاه نلاحظ أن المتغيرة الداخلة: المتغيرة الخارجة، نقطة الارتكاز "**Pivo**t": 3 فننتقل إلى الجدول الموالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **0** | 0 | 0 | **30** | **51** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | **12** | **-2** | **0** | **1** | **0** | **2** |  | **0**  سط ر المحور  **المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة**  عمود الدوران  نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران  المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة |
|  | 15 |  | 1 | 0 | **0** |  |  | **0** |
|  | **6** |  | 0 | 0 | **1** |  |  | **30** |
|  |  |  | 0 | 00 | **0** |  | =180 | |
|  |  |  | 0 | 0 | **0** |  |  | |

نلاحظ أن سطر () يحوي على قيمة موجبة إذن الحل ليس أمثل تستمر عملية التحسين، والمتغيرة الداخلة، المتغيرة الخارجة، نقطة الإرتكاز "2".

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | 0 | 0 | **30** | **15** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  | 0 |  | 0 | 1 |  | 15 |
| 5 |  | 1 |  | 0 | 0 |  | **0** |
| **4** |  | 0 |  | 1 | 0 |  | **30** |
|  |  | 0 |  | 2 | 5 | =210 | |
|  |  | 0 |  | 0 | 0 |  | |

بما أن قيم سطر التقييم كلها معدومة وسالبة إذن الحل هو حل أمثل أي أن () ، () فعلى المؤسسة إنتاج 6 وحدات من المنتج الأول و4 وحدات من المنتج الثاني لتحقيق ربح قدره (=210).

إيجاد النموذج الثنائي وحله بطريقة السمبلاكس:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **النموذج الثنائي** |  |

**1- تحويل النموذج الثنائي إلى شكله القياسي:**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

**2- تكوين جدول الحل الإبتدائي (الجدول الأول): يظهر كما يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **M** | **M** | **0** | 0 | 18 | **21** | **48** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **15** | **0** | **1** | **0** | -1 | 3 | **2** | **4** |  | **M** |
|  | 30 | 1 | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 6 |  | M |
|  |  | **M** | **M** | **-M** | -M | 6M | 3M | 10M | =45M | |
|  |  | 0 | 0 | +M | +M | 18-6M | 21-3M | 48-10M |  | |

2- البحث عن الحل الأمثل:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | 0 | 0 | 18 | **21** | **48** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **15** | **0** | **1** | **0** | **-1** | **3** | **2** | **4** |  | **M**  متغيرة داخلة أكبر قيمة بالنسبة للمعاملM  عمود الدوران  نقطة الإرتكاز  المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة  سطر الدوران |
|  | 30 | 1 | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 6 |  | M |
|  |  | M | M | **-M** | -M | 6M | 3M | 10M | =45M | |
|  |  | 0 | 0 | +M | +M | 18-6M | 21-3M | 48-10M |  | |

المتغيرة الداخلة،المتغيرة الخارجة، نقطة الارتكاز: 4 فنتحصل على الجدول الموالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | 0 | 0 | **18** | **21** | **48** |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |  |  | 1 |  | 48  متغيرة داخلة أكبر قيمة بالنسبة للمعاملM  عمود الدوران  نقطة الإرتكاز  سطر الدوران |
|  | المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة | 1 |  | 1- |  |  | 2- | 0 |  | M |
|  |  | M | 12- | **-M** | M | **M** | 24-2M | 48 | = | |
|  |  | 0 |  | +M | M | **M** | 2M-3 | 0 |  | |

بما أن سطر التقييم يحوي على معاملات "M" سالبة تستمر عملية التحسين وتكون المتغيرة الداخلة ، المتغيرة الخارجة ، نقطة الارتكاز "" لنتحصل على الجدول الموالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | M | M | 0 | 0 | 18 | 21 | 48 |  | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | **0** |  | 1 |  | 48 |
| 5 |  | -1 |  | 1 | **1** |  | 0 |  | 18 |
|  | +6 | +6 | -4 | -6 | 18 | 16 | 48 | =210 | |
|  | M-6 | M-6 | 4 | 6 | 0 | 5 | 0 |  | |

نلاحظ من الجدول أعلاه أن قيم السطر كلها معدومة وموجبة إذن الحل أمثل يقضي بأن تكون أسعار الظل للموارد النادرة المتاحة هي 0 و5 دج على التوالي وذلك لتدنية التكلفة لأقل مقدار ممكن وهو 210 دج.

**3- تحقيق ومطابقة الحلول المثلى بين النموذجين: ينتج عن مقارنة الحل الأمثل للنموذج الأصلي بالحل الأمثل للنموذج الثنائي النتائج التالية:**

**\* قيمة دالة الهدف (تعظيم) في النموذج الأصلي تساوي قيمة دالة الهدف (تدنية) في النموذج الثنائي** =210 أي أن الأرباح المحققة تساوي تكلفة الموارد النادرة التي تساهم في تحقيق هذه الأرباح مقومة بأسعار ظلها؛

\* قيم المتغيرات الأصلية بجدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي تساوي قيم متغيرات الفوارق بصف اختبار المثالية بجدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي أي:

تقابل وحدة

تقابل وحدة

\* قيم متغيرات الفوارق () في السطر بجدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي تساوي قيم المتغيرات الأصلية للنموذج الثنائي (أسعار الظل للموارد) مع تغيير الإشارة أي:

: تقابل دج

: تقابل دج

: تقابل دج

\* قيم المتغيرات الأساسية بجدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي تساوي قيم المتغيرات غير الأساسية في السطر اختيار الأمثلية بجدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي أي:

تقابلها

تقابلها

تقابلها

\* مصفوفة معاملات القيود في المسألة الأصلية هي منقول مصفوفة المعاملات في قيود المسالة الثنائية.

ويتبين من النتائج السابقة أن هناك طابقا بين النموذجين الأصلي والثنائي وهذا يعني أن الحل الأمثل لأحدهما يعني أن الحل الأمثل للآخر حيث يمكن اشتقاق الحل الأمثل لأي نموذج من الحل للنموذج الآخر، ولذلك يفضل حل النموذج الذي يتطلب عبء عمليات حسابية أقل وذلك توفيرًا للوقت والجهد والتكلفة.