المحور الأول: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

1. المتغيرات العشوائية

- المتغير العشوائي هو متغير متعلق بتجربة عشوائية معينة، بحيث يمكنه أن ياخذ قيمة من قيم فضاء امكانات هذه التجربة (نتائجها). يسمى عشوائي لأنه يستحيل التنبؤ بالقيمة التي يأخذها مسبقا.

نرمز للمتغيرات العشوائية عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل: .....X , Y, Z

ونرمز لقيم المتغير بالأحرف اللاتينة الصغيرة مثل: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$

- **أنواع المتغيرات العشوائية**

المتغير المتقطع: هو متغير قابل للعد وغير قابل للتجزئة مثل عدد الطلبة في قاعة الدراسة.

المتغير المستمر: هو متغير غير قابل للعد وقابل للتجزئة مثل وزن الطلبة أو أطوالهم.

2. التوزيعات الاحتمالية:

- التوزيعات الاحتمالية المنتظمة : هي توزيعات لتجارب عشوائية لها خصائص ومميزات معينة تسمح بتحديد قانون احتمالي يشمل كل التجارب التي لها نفس الخصائص، ونميز بين توزيعات احتمالية لمتغيرات عشوائية متقطعة وتوزيعا لمتغيرات عشوائية مستمرة.

نهتم عند دراسة التوزيعات الاحتمالية المنتظمة بتحديد قانون التوزيع الاحتمالي والمميزات العددية لكل توزيع.

- **قانون التوزيع الاحتمالي:** هو العلاقة التي تربط بين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X واحتمالاتها، أي هو المعادلة، القانون أو الدالة التي تسمح لنا بحساب احتمال أن ياخذ X قيمة معينة.

- **جدول التوزيع الاحتمالي:** هو جدول يوضح قيم المتغير العشوائي ونقابل كل قيمة باحتمال تحققها. أي هو جدول يوضح توزيع قيم المتغير العشوائي حسب احتمالاتها.

مثال: اذا رمينا حجرة نرد واعتبرنا أن X هو المتغير العشوائي الذي يمثل الرق الظاهر، فإن جدول التوزيع الاحتمالي ل X يكون على الشكل التالي:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	$\sum=1$

من بين خصائص جدول التوزيع الاحتمالي أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي 1.

- **تابع التوزيع الاحتمالي:**

هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي قيمة x_s حيث s هو رتبة المتغير. ونرمز لتابع التوزيع بالرمز F حيث:

$$F(x) = P(x \leq x_S)$$

- **المميزات العددية:**

نقصد بالمميزات العددية التوقع الرياضي ونرمز له بالرمز E(x) والتباين ونرمز له بالرمز V(x) أو σ^2

التوقع الرياضي E(x) هو عبارة عن المتوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي مرجحة باحتمالاتها، أو بعبارة أخرى هو يمثل قيمة المتغير التي نتوقع الحصول عليها (لديها أكبر حظ للتحقق) عند اجراء التجربة أو تكرارها عدد من المرات.

التباين σ^2: يمثل متوسط مربعات انحرافات القياسات عن متوسطها، أو بعبارة أخرى مدى ابتعاد القيم المسجلة عن وسطها الحسابي، فكلما كان التباين صغيرا كانت النتائج أكثر دقة والعكس صحيح.

3. تذكير ببعض التوزيعات الاحتمالية:

1.3 تجربة برنولي: هي كل تجربة عشوائية ينتج عنها نتيجتين فقط، مثل رمي قطعة النقد ينتج عنها نتيجتين فقط هما الرقم والصورة.

حيث نتيجة نسميها نجاح، نرمز لها بالرمز 1 واحتمال حدوثها بالرمز p، ونتيجة نسميها فشل نرمز لها بالرمز 0 واحتمال حدوثها بالرمز q وهو يساوي 1-p

صيغة قانون التوزيع هي:

$$P(x=x_i) = p^{xi} (1-p)^{1-xi}$$

- **المميزات العددية لتوزيع برنولي:**

التوقع: $E(x) = p$

التباين: $\sigma^2 = p \times q$

2.3 التوزيع الثنائي: (التوزيع ذو الحدين) B(n, p)

إن المتغير العشوائي X الذي يرتبط بتجربة لها تتمتع بالخصائص التالية:

- هي تجربة ينتج عنها نتيجتين فقط (تجربة برنولي) يتم تكرارها عدد من المرات المتماثلة (في نفس الشروط والظروف)
- نتيجة نعتبرها نجاح وهي تمثل تحقق الحادث المدروس، ونتيجة نعتبرها فشل وهي تمثل عدم تحقق الحادث المدروس.
- احتمال النجاح يبقى ثابتا من محاولة إلى أخرى
- المحاولات تكون مستقلة عن بعضها البعض

هذا المتغير يخضع لقانون التوزيع الثنائي، حيث نهتم خلال دراسة هذا المتغير بعدد النجاحات التي نرمز لها بالرمز K خلال تكرار التجربة n مرة.

حيث : k يمكن أن يأخذ قيمه من 0 إلى n.

قانون التوزيع الاحتمالي الثنائي:

$$p(x=k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$$

حيث:

n: عدد مرات تكرار التجربة

K: عدد النجاحات

P: احتمال النجاح

q: احتمال الفشل

ملاحظة هامة: يتم تحديد احتمال النجاح والفشل بناءا على الحادث المدروس أو النتيجة المراد الحصول عليها.

مثلا: إذا قام الطالب باجتياز امتحان الاحصاء وكان احتمال نجاحه هو 0.7، هذا الاحتمال لا يمثل بالضرورة نجاح التجربة (احتمال النجاح)، فإذا كنا بصدد دراسة نتيجة رسوب الطالب أو اذا أردنا أن يتحقق حادث رسوب الطالب فإن احتمال النجاح هو احتمال رسوب الطالب أي 0.3 والعكس صحيح.

المميزات العددية للتوزيع الثنائي:

التوقع: $E(X)= n\,p$

التباين: $\sigma^2 = n\,p\,q$

3.3 التوزيع فوق الهندسي: H

يمكن اعتبار أن التوزيع فوق الهندسي هو حالة خاصة من التوزيع الثنائي، حيث يتمتع بنفس الخصائص ويكمن الاختلاف في كون المجتمع محدود مقارنة بالتوزيع الثنائي، وبالتالي إذا كان لدينا متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي والمجتمع المسحوب منه محدود ومعلوم نستعمل التوزيع الفوق هندسي عوضا عن التوزيع الثنائي.

القانون الاحتمالي للتوزيع الفوق هندسي:

$$P(x=k) = C_M^k * C^{n-k}_{N-M} / C_N^n$$

حيث:

N: حجم المجتمع

M: عدد العناصر التي تحمل الصفة المدروسة في المجتمع

K: عدد النجاحات

n: عدد مرات تكرار التجربة

المميزات العددية:

التوقع: $E(x) = n * p$

التباين: $\sigma^2 = n*p*q * N-n/N-1$

4.3التوزيع الطبيعي : N

يعتبر التوزيع الطبيعي أهم توزيع احتمالي في الاحصاء، حيث هو أكثر التوزيعات استعمالا وله أهمية كبيرة في الدراسات العلمية والاحصائية. إن هذا التوزيع هو توزيع لمتغير عشوائي مستمر حيث يمكن أن يأخذ المتغير قيمه في المجال :]∞+ ∞ -[

إن القانون الاحتمالي للتوزيع الطبيعي والتوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية مستمرة بصفة عامة يعطى على شكل دالة f(x) نسميها دالة كثافة، ويمكن اعتبار دالة معينة أنها دالة كثافة إذا تحقق فيها شرطين أساسيين هما:

إذا اعتبرنا أن الدالة معرفة على المجال]a, b[

$f(x) \geq 0$ مهما كانت قيمة x (أي تكون دائما موجبة)

$\int_a^b f(x)= 1$ أي أن اجمالي المساحة داخل منحنى الدالية يساوي 1

بالنسبة للتوزيع الطبيعي فإننا نميز بين نوعين:

- **التوزيع الطبيعي العام:** وتعطى دالة الكثافة لهذا التوزيع بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث نحصل على توزيع جديد كلما تغير الانحراف المعياري والوسط الحسابي

- التوزيع الطبيعي المعياري: هو حالة مرجعية تمثل أبسط حالات التوزيع الطبيعي حيث الوسط الحسابي يساوي 0 والانحراف المعياري يساوي 1. ونرمز للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بالرمز z وتابع التوزيع بالرمز Q، حتى نميز بينه وبين التوزيع الطبيعي العام.

حساب الاحتمال:

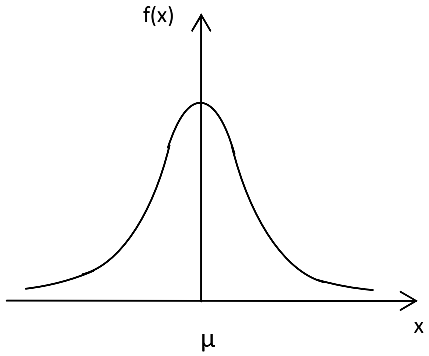
من أجل حساب الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي نقوم بتحويل المتغير X الذي يتبع التوزيع الطبيعي العام إلى متغير Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، باتباع القانون التالي:

$Z= X-\overline{X} / \sigma$

ثم نرجع إلى جدول التوزيع الطبيعي ونبحث عن قيمة الاحتمال المقابلة لهذه القيمة.

خواص التوزيع الطبيعي:

- يأخذ منحنى التوزيع الطبيعي الشكل الناقوسي ويكون متناظرا بالنسبة لوسطه الحسابي:



- احتمال النقطة يساوي 0 أي $P(x=a) = 0$
- $P(x>a) = 1 – P(x<a)$
- $P(b<x<a) = P(x<a) – P(x<b) = Q(a) – Q(b)$
- $Q(-\infty) = 0$
- $Q(+\infty) = 1$
- المساحة الكلية داخل المنحنى تساوي 1
- 95% من المساحة محصورة بين $\bar{X} \pm \boldsymbol{\sigma}\, 1.96$