**1- المتغيرات الوهمية والمتغيرات الاصطناعية في دالة هدف "Min".**

**2- خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة " Simplex " في حالة تدنية (مثال تطبيقي).**

**تمهيد:**

استعملنا في الحالة السابقة طريقة "simplex" في حل نماذج البرمجة الخطية التي قيودها كلها على شكل أقل أو تساوي "" فعند تحويلها إلى شكل معادلات نضيف إلى طرفها الأيسر متغيرات الفوارق '' "، وتكون معاملات هذه المتغيرات أحادية موجبة في القيود، وعند بداية الحل الابتدائي الذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط، لاحظنا أن هذه المتغيرات هي نفسها تكون عناصر الحل الابتدائي، وذلك على أساس أن متغيرات القرار '' " تساوي الصفر، **لكن السؤال الذي يطرح نفسه ما العمل إذا اتجاه القيود أكبر أو يساوي أو يساوي، وكان نموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية مختلطًا؟** ولحل هذا النوع من المسائل يستخدم المتغيرات الوهمية والمتغيرات الاصطناعية.

**1- المتغيرات الوهمية (الإضافية ) والمتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف: عند إضافة المتغيرات الوهمية أو الاضافية لا بد لهذه المتغيرات من أن تظهر كذلك في دالة الهدف، تماما كما حدث عندما أضفنا المتغيرات الفوارق في حالة القيد ""، ولما من الضروري إخراج المتغيرات المصطنعة من الحل، فهذا يعني أن بإمكاننا إفتراض تكلفة عالية لهذه المتغيرات، ومن الجدير بالذكر هنا وفي حالة المشاكل التي تهدف إلى تخفيض التكاليف، فإن المتغيرات ذات التكلفة الأقل هي الأكثر تفضيلاً لإدخالها للحل والمتغيرات التي تصاحبها تكلفة عالية يجب إخراجها من الحل بسرعة، أو عدم إدخالها إلى الحل إطلاقًا، وبدلا من وضع قيمة رقمية للمتغيرات المصطنعة (1000، 2000، 5000، 10000...الخ) فإننا نستخدم الرقم '' M" ليمثل رقما كبيرًا جدًّا.**

**ويمكن تلخيص الخطوات اللازمة لتهيئة القيود بالشكل المناسب لوضعها في المصفوفة إلى ما يأتي** (محمد و سليمان، 2008، الصفحات 131-132)**:**

**- إذا كانت الصيغة الموضوعة للقيد أو أكثر تتضمن وجود رقم أو قيمة سالبة في الجانب الأيسر نقوم بضرب القيد بـ: (-1) ونغير اتجاه العلاقة للقيد المذكور وهذا سيحل مشكلة اللاسلبية؛**

**- بالنسبة للقيود ذات العلاقة نقوم بإضافة متغيرات الفوارق () لتحويل القيود إلى معادلات (مساواة) حيث يكون معامله في دالة لهدف صفر، وتكون المتغيرات أحد عوامل الحل الأولي الممكن؛**

**- لمعالجة القيود في حالة المساواة (=) نقوم بإضافة متغير إصطناعي فقط (a)يكون معامله في دالة الهدف (-M) في حالة مسألة تعظيم و(+M) في حالة مسألة تقليل(تخفيض)، ويصبح هذا المعامل جزءًا من الحل الأولي الممكن للمشكلة؛**

**- بالنسبة للقيود ذات العلاقة لتحويلها إلى مساواة يجب طرح متغيرات وهمية ()، وإضافة متغيرات اصطناعية () ويصبح هذا المتغير الاصطناعي جزءًا من الحل الأولي الممكن، ويكون معامله في دالة الهدف (-M) لمسألة تعظيم و(+M) لمسألة تقليل التكاليف.**

**2- خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس (simplex) في حالة تدنية "Min":**

0

وتوضيح الخطوات نقوم بحل المثال التطبيقي التالي:

:

ومن أجل أي نموذج خطي الذي تكون كل قيوده الفنية من الشكل أصغر أو تساوي () يجب اتباع الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى:** تحويل قيود النموذج الخطي من شكل متراجحات (متباينات) إلى شكل معادلات (مساواة)، ولتحويل أي نموذج خطي من شكل لا مساواة إلى مساواة نلزم أن نطرح من طرفها الأيسر متغيرات الفوراق (وهمية أو أضافية) ونضيف متغيرات اصطناعية نرمز لها بالرمز "" ، "حيث أن هذه المتغيرات وهمية لا وجود لها في الواقع نستعملها فقط من أجل حل النموذج، وإضافة هذه المتغيرات إلى القيود يتطلب منها أيضًا إضافتها إلى دالة الهدف بمعاملات كبيرة نرمز لها بالرمز "M" و هي قيمة كبيرة جدا تقترب من لا نهاية" (علي، 2015، صفحة 72).

بالعودة إلى المثال يظر النموذج القياسي كما يلي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**الخطوة الثانية : تتمثل في** مرحلة الحل الإبتدائي **إن إضافة المتغيرات الإصطناعية إلى القيود يمكننا الحصول على حل إبتدائي جديد، التي يتكون من متغيرات التالية** (**)**

**ويظهر الجدول الممثل للحل الابتدائي كما يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **M** | M | M | 0 | 0 | **0** | **4** | **2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **3400** | **0** | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | **5** | **1** |  | **M** |
|  | 2800 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 2 | 4 |  | M |
|  | **900** | **1** | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 |  | **M** |
|  |  | **M** | M | M | -M | -M | -M | 8M | 6M | =7100M |
|  |  | **0** | 0 | 0 | +M | +M | +M | **4-8M** | **2-6M** |  |

**-الخطوة الثالثة : تتمثل في البحث عن الحل الأمثل (تحسين الحل) حيث نبدأ في تجريب متغيرات القرار وذلك بإدخالها واحدًا بعد الآخر إلى قاعدة الحل في مكان متغيرات الحل الإبتدائي ونرى مدى تأثيرها على دالة الهدف "Min" وتتم بالمراحل التالية:**

المرحلة الأولى: تحديد المتغيرة الداخلة: **وهي المتغيرة التي لها أكبر قيمة موجبة بالنسبة للمعامل "M"في السطر () أو أقل قيمة سالبة، وفي حالة تساوي القيمتين يتم إختيار المتغيرة الداخلة بطريقة عشوائية، ويسمى عمودها بـ: "**عمود الدوران**" ,**

المرحلة الثانية: تحديد المتغيرة الخارجة: **إن إدخال متغيرة إلى قاعدة الحل يتطلب علينا إخراج آخر من متغيرات الحل الإبتدائي (متغيرات الفوراق ) من أجل الحفاظ على بعد المصفوفة الأحادية، ويسمى سطها بـ:" سطر الدوران" ويتم تحديد المتغيرة الخارجة كما يلي:**

**\* تقسيم عناصر عمود "" على العناصر المقابلة لها في عمود المتغيرة الداخلة (عمود الدوران) مع استثناء القيم السالبة والصفرية بمعنى: ، وتقارن النتائج وتكون المتغيرة الخارجة التي لها أقل حاصل أي قسمة ، بمعنى نخرج متغير الحل الإبتدائي الذي يقابله أقل قيمة غير سالبة من بين القيم السابقة ويسمى سطر المتغيرة الخارجة بـ: "**سطر الدوران**" .**

المرحلة الثالثة: تحديد نقطة المحور (نقطة الإرتكاز "Pivot"): وهي القيمة أو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة؛ أي تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران.

المرحلة الرابعة: تحديد نقطة المحور (نقطة الإرتكاز "Pivot"): وهي القيمة أو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة؛ أي تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران.

**-الخطوة الخامسة : الإنتقال إلى جدول جديد، ويتم ذلك من خلال المراحل التالية:**

**\* استبدال المتغيرة الخارجة بالمتغيرة الداخلة؛**

**\* تقسيم جميع قيم سطر الدوران على نقطة الإرتكاز "Pivot"؛**

\* تستبدل عناصر محور الدوران بالصفر "0" ما عدا نقطة الإرتكاز فتستبدل "1"؛

\* باقي العناصر والقيم تعد قيم جديدة وتحسب بالقانون التالي:

القيمة الجديدة

القيمة القديمة

=

-

القيمة المقابلة في سطر الدوران

×

القيمة المقابلة في عمود الدوران

نقطة الإرتكاز "Pivot"

\* حساب قيم السطر ()، ()؛

**-الخطوة السادسة :** الحصول على الحل الأمثل: نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من نوع "Min" عندما تكون جميع قيم السطر () موجبة أو معدومة.

**في حالة قيمة واحدة على الأقل في السطر () سالبة نعيد خطوة تحسين الحل من جديد أي أنًّ هناك إمكانية لتخفيض دالة الهدف.**

**وبالعودة للمثال نشرع في البحث عن الحل الأمثل (تحسين الحل):**

**\* المتغيرة الداخلة:** تختار من السطر () المتغيرة التي تقابلها أكبر قيمة موجبة أو أقل قيمة سالبة وهي "8M-4" وهي تقابل "" ، إذن: : متغيرة خارجة.

**\* المتغيرة الخارجة:** هي المتغيرة التي تقابلها أقل قيمة لحاصل قسمة **أي قسمة العمود "" على قيم المتغيرة الداخلة ""أي: ،** وأصغر قيمة غير سالبة هي القيمة "**680**" وهي موجود في السطر الأول وتقابل "" فهي إذن متغيرة خارجة لتخرج وتترك مكانها لـ: "" .

\* نقطة الإرتكاز "**Pivot**": وهي النقطة التي تتقاطع فيها سطر الدوران (المتغيرة ة الخارجة) مع عمود الدوران (المتغيرة الداخلة) وهي القيمة **"5".**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **M** | M | M | 0 | 0 | **0** | **4** | **2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **3400** | **0** | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | **5** | **1** |  | **M**متغيرة داخلة أكبر قيمة بالنسبة للمعاملMعمود الدوراننقطة الإرتكازالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة سطر الدوران |
|  | 2800 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | **2** | 4 |  | M |
|  | **900** | **1** | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | **1** | 1 |  | **M** |
|  |  | **M** | M | M | -M | -M | -M | **8M** | 6M | =7100M |
|  |  | **0** | 0 | 0 | +M | +M | +M | **4-8M** | **2-6M** |  |

في مرحلة ثانية يتم تقسيم جميع قيم سطر الدوران ابتداء من القيمة "" إلى غاية آخر متغير في الجدول على نقطة الإرتكاز "5" حيث يضم السطر القيم التالية ، بالإضافة إلى استبدال قيم سطر عمود الدوران بصفر "0" ما عدا نقطة الإرتكاز تستبدل بـ: "1" ونتحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **M** | M | M | 0 | 0 | **0** | **4** | **2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | **0** | 0 |  | 0 | 0 |  |  |  |  | **2** |
|  | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |  | M |
|  | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |  | **M** |
|  |  | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |  |
|  |  | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |  |

في مرحلة ثانية يتم حساب باقي عناصر الجدول، وذلك بتطبيق القاعدة التالية:

القيمة الجديدة

القيمة القديمة

=

-

القيمة المقابلة في سطر الدوران

×

القيمة المقابلة في عمود الدوران

نقطة الإرتكاز "Pivot"

والنتائج تكون في الجدول الموالي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| حساب عناصر السطر الثاني | رقم العنصر | حساب عناصر السطر الثالث |
|  | العنصر الاول |  |
|  | العنصر الثاني |  |
|  | العنصر الثالث |  |
|  | العنصر الرابع |  |
|  | العنصر الخامس |  |
|  | العنصر السادس |  |
|  | العنصر السابع |  |
|  | العنصر الثامن |  |

ويكون الجدول الثاني للسمبلاكس بالشكل الثاني:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 1 |  |  | 4 |
|  | 1440 | 0 | 1 |  | 0 | 1- |  | 0 |  |  | M |
|  | 220 | 1 | 0 |  | 1- | 0 |  | 0 |  |  | M |
|  |  | M | M |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |

وفي مرحلة رابعة نقوم بحساب "" من خلال جمع حاصل ضرب قيم العمود "" في العمود المقابل لها كما يلي:

*ثم يتم حساب من خلال طرح قيم السطر الأول من الجدول من السطر المقابل فنحصل على الجدول التالي:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 1 |  |  | 4 |
|  | 1440 | 0 | 1 |  | 0 | 1- |  | 0 |  |  | M |
|  | 220 | 1 | 0 |  | 1- | 0 |  | 0 |  |  | M |
|  |  | M | M |  | -M | -M |  | 4 |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  | +M | +M |  | 0 |  |  |

**وبهذا نكون قد أكملنا الانتقال إلى جدول السمبلاكس الجديد.**

**- الحصول على الأمثل:**  *من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن الحل المتوصل إليه يتمثل في () وهذا يعني استخدام المادة الأولية الثانية وعدم استخدام المادة الأولى "" لتخفيض التكلفة إلى "" لكن السؤال الذي يطرح نفسه* ***هل الحل هو حل أمثل أم لا****؟. فقد ذكرنا سابقا كي نتحصل* ***على الحل الأمثل في طريقة السمبلاكس في حالة دالة هدف من "*Min*" إذا كانت جميع قيم السطر () موجبة أو معدومة****، فمن خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن قيم السطر "" سالبة ومعدومة بالنظر إلى معامل "*M*" ما عدا قيمتين " " ، " " وهي المقابلة للمتغيرة "" و "" ومنه الحل المتوصل إليه ليس أمثلاً ، ولا بد من إعادة تحسين الحل.*

*ولتحسين الحل للمرة الثانية نقوم بتكرار نفس الخطوات (****متغيرة داخلة، متغيرة خارجة، نقطة إرتكاز)*** *وبنفس الترتيب,*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 4 | **2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 1 |  |  | 4 |
|  | 1440 | 0 | 1 |  | 0 | 1- |  | 0 |  |  | Mنقطة الإرتكازالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة سطر الدورانمتغيرة داخلة أكبر قيمة بالنسبة للمعاملMعمود الدوران |
|  | 220 | 1 | 0 |  | 1- | 0 |  | 0 |  |  | M |
|  |  | M | M |  | -M | -M |  | 4 |  |  |
|  |  | 0 | 0 |  | +M | +M |  | 0 |  |  |

*ويتم الإنتقال إلى جدول ثالث جديد ويكون كما يلي:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 625 | 625 | المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة  | 0 |  |  | 0 | - | 1 | 0 |  | 4نقطة الإرتكازمتغيرة داخلة أكبر قيمة بالنسبة للمعاملMعمود الدورانالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة سطر الدوران |
| المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة  | 450 |  | 1 |  |  |  | - | 0 | 0 |  | M |
| ح ع ت | 275 |  | 0 |  | - | 0 |  | 0 | 1 |  | 2 |
|  |  |  | M |  |  | - |  | 4 |  |  |
|  |  |  | 0 |  |  |  |  | 0 |  | سطر الدوران |

*من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن الحل المتوصل إليه يتمثل في () ، و "" وتخفيض التكلفة إلى "" لكن السؤال الذي يطرح نفسه* ***هل الحل هو حل أمثل أم لا****؟. فقد ذكرنا سابقا كي نتحصل* ***على الحل الأمثل في طريقة السمبلاكس في حالة دالة هدف من "*Min*" إذا كانت جميع قيم السطر () موجبة أو معدومة****، فمن خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن قيم السطر "" سالبة ومعدومة بالنظر إلى معامل "*M*" ما عدا قيمتين " " وهي المقابلة للمتغيرة "" ومنه الحل المتوصل إليه ليس أمثلاً ، ولا بد من إعادة تحسين الحل للمرة الثالثة لنتحصل على الجدول التالي:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 600 | 0 |  |  | 0 |  |  | 1 | 0 |  | 4 |
| 100 | -1 |  |  | 1 |  |  | 0 | 0 |  | 0 |
| 325 | 0 | 0 |  | 0 |  |  | 0 | 1 |  | 2 |
|  | 0 |  |  | 0 |  |  | 4 |  | =3050 |
|  | M$ |  |  | 0 |  |  | 0 |  | سطر الدوران |

من خلال ملاحظة السطر *"" نلاحظ أن جميع القيم موجبة ومعدومة، وبذلك قد نكون وصلنا إلى الحل الأمثل الذي عناصره ، (*=3050*) ويعني إقتصاديا أن المؤسسة تستخدم 325 وحدة من المادة الأولية الأولى، و600 وحدة من المادة الأولية الثانية لتحقيق أقل تكلفة تقدر بـ: 3050 دج*