المحور الثالث: نظرية التقدير

بعدما درسنا توزيعات المعاينة وحددنا أهم مميزاتها وخصائصها، سنحاول من خلال هذا المحور تقدير معلمات المجتمع انطلاقا من الاحصائيات المحسوبة من العينة وبالاعتماد على مكتسبات المحور الثاني.

أولا: مفاهيم أساسية:

- **المقدر:** هو الاحصائية المحسوبة في العينة بغرض تقدير معلمة المجتمع وهي عادة تكون مناظرة للمعلمة التي نريد تقديرها.

- **المقدر المتحيز والمقدر الغير متحيز:**

إذا أردنا تقدير معلمة المجتمع انطلاقا من مقدر معين، وكانت القيمة المتوقعة لهذا المقدر تساوي القيمة الحقيقية للمجتمع فإننا نعتبر أن هذا المقدر هو مقدر غير متحيز والعكس صحيح.

مثال: نعلم من المحور السابق أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة تساوي متوسط المجتمع وبالتالي يمكن القول أن متوسط العينة هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع، والعكس إذا كانت القيمة المتوقعة لا تساوي معلمة المجتمع نقول أن المقدر متحيز.

- **كفاءة التقدير:**

نقول عن مقدر أنه أكثر كفاءة من مقدر آخر إذا كان تباين توزيع المعاينة لهذا المقدر أقل من تباين توزيع المقدر الآخر.

ملاحظة: تباين توزيع المعاينة لمتغير معين يطلق عليه كذلك تسمية خطأ المعاينة.

- **التقدير النقطي والتقدير بمجال:**

يمكن تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة، نسمي هذا التقدير بالتقدير النقطي كأن نقول إن متوسط علامة مجتمع الطلبة في الاحصاء هو مقدر بـ 10. في حين إذا كان التقدير من خلال مجال حيث يمكن أن

تأخذ المعلمة التي تم تقديرها قيمة داخل المجال فهذا تقدير بمجال، كأن نقول إن متوسط علامة مجتمع الطلبة في الإحصاء ينتمي إلى المجال:]11 ,8[، ونسمي هذا المجال: **مجال الثقة**.

- **درجة التأكد (مستوى الثقة) ومستوى المعنوية:**

عند تقدير معلمة المجتمع بمجال ولكي نعطي أكثر مصداقية لعملية التقدير، نربط عملية التقدير باحتمال أن تكون المعلمة فعلا ضمن المجال، مثل أن نقول: متوسط علامة مجتمع الطلبة في الإحصاء ينتمي إلى المجال:]11 ,8[باحتمال 0.95 أو 95%. ان هذا الاحتمال المرتبط بمجال التقدير يسمى **درجة التأكد أو مستوى الثقة**، ونرمز له بالرمز: α-1، في حين نسمي الاحتمال المعاكس: أي احتمال أن تكون معلمة المجتمع خارج المجال **مستوى المعنوية** ونرمز له بالرمز α، أي في المثال السابق α=0.05، أو 5%.

ثانيا : تقدير متوسط المجتمع بمجال باستعمال التوزيع الطبيعي:

إذا كانت العينة أكبر من أو تساوي 30 أو كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، يمكن تقدير متوسط المجتمع بمجال انطلاقا من متوسط عينة ، وهذا باستعمال خصائص التوزيع الطبيعي.

انطلاقا من خاصية منحنى التوزيع الطبيعي، حيث نعلم أن 95% من المساحة محصورة بين

$\bar{X} - 1.96\sigma$ و $\bar{X} + 1.96\sigma$ ، وبما أن توزيع المعاينة يتبع كذلك التوزيع الطبيعي يمكن استخدام نفس الخاصية انطلاقا من متوسط العينة، أي اذا سحبنا عينة وكان متوسطها **m** فان هذا المتوسط سيكون محصورا بين $\boldsymbol{M - 1.96\sigma m}$ و $\boldsymbol{M + 1.96\sigma m}$ باحتمال 0.95 مع العلم أن متوسط التوزيع $\boldsymbol{M}$ يساوي متوسط المجتمع $\boldsymbol{\bar{X}}$، وبعد اجراء تعديلات على المتراجحة سنجد أن:

$\bar{X} \epsilon [\, m - 1.96\sigma m, m + 1.96\sigma m \,]$ باحتمال 95% ومستوى معنوية 0.05.

يمكن تعميم هذه النتيجة بحيث نجد أن مهما كانت العينة n مسحوبة من مجتمع N، فإنه يمكن تقدير متوسط المجتمع $\bar{X}$، انطلاقا من متوسط هذه العينة m، باستعمال القاعدة التالية:

$$\bar{X} \epsilon [\, m - Zc * \sigma m,\ m + Zc * \sigma m \,]$$

حيث z_c يسمى معامل الثقة وهو يمثل قيمة z في جدول التوزيع الطبيعي المقابلة لمستوى ثقة معين، والجدول الموالي يوضح بعض قيم z_c الموافقة لمجموعة من مستويات الثقة:

مستوى الثقة 1-α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
z_c	2.58	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

مثال تطبيقي:

سحبنا عينة حجمها 35 طالب، فتبين أن متوسط العلامة في الاحصاء هو 10.5، قدر متوسط العلامة لمجتمع الطلبة بمستوى ثقة 95% ثم مستوى ثقة 99% مع العلم أن تباين المجتمع هو 4.

الحل:

- التقدير بمستوى ثقة 95%

من الجدول نجد أن معامل الثقة المقابل لهذا المستوى هو $Z_c = 1.96$

يجب ايجاد الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات حيث:

$$\sigma^2_m = \sigma^2 / n = 4/35 = 0.114$$

ومنه الانحراف المعياري يساوي:

$$\sigma_m = \sqrt{0.114} = 0.337$$

وعليه وباستخدام القاعدة المذكورة سابقا فإن:

$$\bar{X}\,\epsilon\,[\,m - Zc\,\sigma\mathrm{m},\ \mathrm{m} + Zc\,\sigma\mathrm{m}\,]$$

نحسب حدود الثقة:

$$\mathbf{m\text{-}1.96\ \sigma_m = 10.5 - (1.96 \times 0.337) = 9.83}$$

$$\mathbf{m\text{+}1.96\ \sigma_m = 10.5 + (1.96 \times 0.337) = 11.16}$$

ومنه: $\bar{X}\,\epsilon$ [9.83, 11.16] بمستوى ثقة 95%

- **التقدير بمستوى ثقة 99%**

نتبع نفس الخطوات السابقة، حيث الاختلاف الوحيد هو قيمة z التي تصبح 2.58 (من الجدول).

ومنه نجد:

$\bar{X}\,\epsilon$ [9.63, 11.36] بمستوى ثقة 99%

- **دقة التقدير:**

كلما كان مجال الثقة ضيقا (صغيرا) كلما كان التقدير دقيقا، لأن هناك عدد أقل من القيم التي يمكن أن تأخذها معلمة المجتمع، والعكس صحيح.

كما نلاحظ من المثال السابق أن مستوى الثقة يتناسب عكسا مع دقة التقدير فكلما كان مستوى الثقة كبيرا كما زاد طول مجال الثقة وبالتالي تصغر دقة التقدير والعكس صحيح.

إذا أردنا أن نؤثر على دقة التقدير بالزيادة والنقصان فإن المتغير الوحيد الذي يمكن أن نتحكم فيه في صيغة التقدير هو الانحراف المعياري، حيث نلاحظ أن كلما صغر الانحراف المعياري يصغر مجال التقدير والعكس صحيح، مع العلم أن الانحراف المعياري يتأثر بحجم العينة وبالتالي إذا أردنا أن نزيد من دقة التقدير يجب الزيادة في حجم العينة.

- **القاعدة العامة لايجاد قيمة معامل الثقة Z_C :**

يمكن ايجاد قيمة معامل الثقة Z_C لأي مستوى ثقة عن طريق اتباع الخطوات التالية:

نحسب قيمة الاحتمال: $1-\alpha/2$

ثم نرجع إلى جدول التوزيع الاحتمالي الطبيعي، ونستخرج قيمة Z_C المقابلة لهذا الاحتمال.

مثال: ما هي قيمة معامل الثقة المقابلة لمستوى الثقة 78%؟

الحل:

بما أن مستوى الثقة هو 0.78 فإن: **$\alpha = 1-0.78 = 0.22$**

نحسب $1-\alpha/2$ فنجد

$1 - 0.22/2 = 0.89$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الاحتمالي الطبيعي نجد أن قيمة معامل الثقة المقابل لهذا الاحتمال هي:

$Z_c = 1.23$

ثالثا: تقدير النسبة في المجتمع باستعمال التوزيع الطبيعي:

إذا كان حجم العينة أكبر من أو يساوي 30 يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير النسبة في المجتمع انطلاقا من بيانات عينة مسحوبة منه. وهذا باستعمال نفس المبدأ والخطوات التي تعرفنا عليها عند تقدير متوسط المجتمع، مع استبدال المميزات العددية بالمميزات الخاصة بتوزيع المعاينة للنسبة.

فتصبح صيغة التقدير على الشكل التالي:

$$\mathbf{p} \in [\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{Zc}\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p'}, \boldsymbol{p'} + \boldsymbol{Zc}\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p'}]$$

مثال تطبيقي:

سحبنا عينة مكونة من 100 شخص، فوجدنا أن 36% منهم مدخنين، قدر نسبة المدخنين في المجتمع بمستوى ثقة 95 %.

الحل:

قيمة معامل الثقة المقابلة لمستوى ثقة 95% هي: $Z_c = 1.96$

نحسب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة المدخنين:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'q'}{n}} = \sqrt{\frac{0.36*0.64}{100}} = 0.048$$

ومنه نحسب حدود الثقة:

$$p' - Zc\ \sigma p' = 0.36 - (1.96 * 0.048) = 0.2659$$

$$p' + Zc\ \sigma p' = 0.36 + (1.96 * 0.048) = 0.454$$

وعليه:

$$p \in [26.6\%, 45.4\%]$$

بمستوى ثقة 95%

ملاحظة: نفس القاعدة تبقى صالحة بالنسبة لتقدير الفرق ومجموع مجتمعين باستعمال التوزيع الطبيعي، حيث نغير فقط المميزات العددية حسب توزيع المعاينة الذي نستخدمه في التقدير.