المحور الثاني: توزيعات المعاينة

إن هذا المحور يعتبر تمهيدا للمحور الموالي، حيث نهتم دائما خلال الدراسات والأبحاث العلمية بخصائص ومعلمات المجتمع، لكن في معظم الأحيان يكون من الصعب على الباحث الوصول إلى كل مفردات المجتمع ودراستها، وعليه نعتمد على العينات، حيث نهتم خلال هذا المحور بدراسة توزيع المعاينة، وهو عبارة عن توزيع لمتغيرات عشوائية نحسبها انطلاقا من العينات، ثم سنستعمل نتائج هذا المحور لتقدير معلمات المجتمع.

أولا: مفاهيم عامة:

العينة والمجتمع:

نقصد بالمجتمع اجمالي المفردات التي تنصب عليها الدراسة، وقد يكون المجتمع محدود مثل طلبة جامعة أم البواقي، أو قد يكون غير محدود مثل عدد مرات رمي قطعة النقد. ونرمز لحجم المجتمع بالرمز N

العينة هي عدد المفردات أو المشاهدات المسحوبة من المجتمع بغرض دراستها وقد نكزن العينة نفاذية أو غير نفاذية. ونرمزلحجم العينة بالرمز n

العينة النفاذية والعينة الغير نفاذية:

عندما يكون السحب بالإرجاع حيث يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، نسمي هذه المعاينة غير نفادية لأن تكرار العملية لا يؤدي إلى تقليص عدد المفردات في المجتمع، والعكس نسمي المعاينة بدون إرجاع معاينة نفادية.

ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسطات:

إذا سحبنا كل العينات من الحجم n التي يمكن سحبها من مجتمع معين وحسبنا متوسط كل عينة، كيف ستتوزع هذه المتوسطات؟

هذا السؤال ستتم الاجابة عليه من خلال دراسة توزيع المعاينة للمتوسطات حيث نهتم بمعرفة القانون الاحتمالي والمميزات العددية لهذا التوزيع، حيث سنرمز للمتغير العشوائي (المتوسط) بالرمز M والقيم التي يمكن أن يأخذها بالرمز m_i، والتي تعبر عن متوسط العينات.

- **القانون الاحتمالي:** ان الوسط الحسابي (المتوسط) هو متغير مستمر، وعيله لحساب احتمال أن يساوي متوسط العينة قيمة معينة نعتمد على القاعدتين التاليتين:

القاعدة 1: إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فإن العينات المسحوبة منه تتبع التوزيع الطبيعي كذلك، أي أن توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع التوزيع الطبيعي.

القاعدة 2: (نظرية النهاية المركزية) إذا كان المجتمع لا يتبع يالضرورة التوزيع الطبيعي ولا يمكن تحديد توزيعه الاحتمالي وكان حجم العينة أكبر من أو يساوي 30 ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع التوزيع الطبيعي.

ملاحظة هامة: عند حساب احتمال أن يساوي متوسط العينة قيمة معينة m، بالاعتماد على التوزيع الطبيعي فيجب استخدام متوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات وليس المجتمع.

- **المميزات العددية لتوزيع المعاينة للمتوسطات:**

من أجل تحديد المميزات العددية لتوزيع المعاينة للمتوسطات نقوم بأخذ مجتمع صغير، ونسحب كل العينات الممكنة ذات حجم n ثم نحسب متوسطات العينات، بعدها نحسب القيمة المتوقعة والتباين لهذه المتوسطات ونستنتج القاعدة.

نأخذ مجتمع مكون من العناصر التالية: 1، 3، 5، 6، 8. ثم نقوم بالخطوات التالية:

- نحسب الوسط الحسابي والتباين للمجتمع
- نقوم بتشكيل كل العينات من الحجم 2 التي يمكن تشكيلها ونحسب متوسط كل عينة
- نقوم بإدراج جدول التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات وبالاعتماد عليه نحسب القيمة المتوقعة لمتوسط العينة (التوقع) ونرمز له بالرمز $E(m)$ ثم نحسب التباين ونرمز له بالرمز σ_m^2

هناك حالتين: حالة السحب بالارجاع (عينة غير نفاذية) وحالة السحب بدون ارجاع (عينة غير نفاذية).

السحب بالارجاع:

متوسط المجنمع $\bar{X} = (1 + 3 + 5 + 6 + 8)/5 = 4.6$

تباين المجتمع $\sigma^2 = [\sum_i (x_i - \bar{X})^2]/5 = 5.84$

بعد تشكيل كل العينات وحساب متوسطاتها نتحصل على جدول التوزيع الاحتمالي التالي للمتغير M الذي يمثل متوسط العينة:

m_i	1	2	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	8
p_i	1/25	2/25	3/25	2/25	2/25	4/25	1/25	4/25	1/25	2/25	2/25	1/25

ومنه:

$$E(m) = \sum_i m_i\, p_i = 4,6$$

نلاحظ أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة يساوي متوسط المجتمع.

$$\sigma^2_m = \sum_I (m_i - E(m))^2\, p_i = 2.92$$

نلاحظ أن $\sigma^2_m = \sigma^2 / n$

نتيجة:

مهما يكن المتغير M الذي يمثل متوسط عينة عشوائية حجمها n مسحوبة بالإرجاع من مجتمع N، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة (متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات) يساوي متوسط المجتمع أي:

$$E(m) = \bar{X}$$

وتباين توزيع المعاينة للمتوسطات يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم لعينة أي:

$$\sigma^2_m = \sigma^2 / n$$

السحب بدون ارجاع:

في حالة السحب بدون ارجاع لا يمكن تكرار العناصر وباتباع نفس الخطوات المتبعة في حالة السحب مع الارجاع نتحصل على جدول التوزيع الاحتمالي التالي للمتغير M:

m_i	2	3	3.5	4	4.5	5.5	6.5	7
p_i	2/20	2/20	2/20	2/20	4/20	4/20	2/20	2/20

عند حساب التوقع والتباين لهذا التوزيع نجد:

$$\mathbf{E(m) = \sum_i m_i\, p_i = 4,6}$$

نلاحظ أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة يساوي متوسط المجتمع في حالة السحب بدون ارجاع كذلك.

$$\mathbf{\sigma^2_m = \sum_I (m_i - E(m))^2\, p_i = 2.19}$$

نلاحظ أنه يمكن الربط بين تباين توزيع المعاينة للمتوسطات وتباين المجتمع بالعلاقة التالية:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

حيث نسمي الكسر $\frac{N-n}{N-1}$ بمعامل الارجاع.

نتيجة:

مهما يكن المتغير M الذي يمثل متوسط عينة عشوائية حجمها n مسحوبة بدون ارجاع من مجتمع N، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة (متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات) يساوي متوسط المجتمع أي:

$$\mathbf{E(m) = \bar{X}}$$

وتباين توزيع المعاينة للمتوسطات يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم لعينة أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_m = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

ملاحظة: يمكن اهمال معامل الارجاع إذا كان حجم العينة صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع، لأن معامل الارجاع يؤول إلى 1، ونعتمد على المعيار التالي: $n/N \geq 0.05$

ثالثا: توزيع المعاينة للنسبة: p’

في هذا التوزيع نهتم بدراسة متغير عشوائي هو النسبة في العينة ونرمز له بالرمز **p’.**

حيث: $p' = n_a / n$ ، حيث n_a هو عدد العناصر التي تحمل الصفة المدروسة.

في حين نرمز للنسبة في المجتمع بالرمز: p

نلاحظ أن المتغير العشوائي p’ هو متغير متقطع فهو مشتق من المتغير n_a الذي يمثل عدد العناصر التي تحمل الصفة المدروسة. كما نلاحظ أن التجربة المتعلقة بهذا المتغير تحتمل نتيجتين فقط عند كل تكرار للتجربة، سواء عناصر تحتوي على الصفة المدروسة أو عناصر لا تحتوي على الصفة المدروسة.

وعليه يمكن تلخيص خصائص هذا التوزيع في الجدول الموالي:

	العينة غير نفاذية والمجتمع غير محدود	**العينة نفاذية والمجتمع محدود**
قانون التوزيع الاحتمالي	**التوزيع الثنائي**	**التوزيع فوق الهندسي**
التوقع	**$E(p') = p$** **P: هو احتمال النجاح ويمثل النسبة في المجتمع**	
التباين	$\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$	$\sigma^2_{p'} = \frac{p\ q}{n} \frac{N-n}{N-1}$
الانحراف المعياري	$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$	$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

ملاحظة1: يمكن اهمال معامل الارجاع إذا كان حجم العينة صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع، لأن معامل الارجاع يؤول إلى 1، ونعتمد على المعيار التالي: $n/N \geq 0.05$

ملاحظة 2: إذا كانت قيمة النسبة للمجتمع مجهولة يمكن استخدام النسبة المحسوبة في العينة كتقدير للنسبة في المجتمع.

ملاحظة 3: إذا كان حجم العينة كبير فإن التوزيع الاحتمالي لمعاينة النسبة يؤول إلى التوزيع الطبيعي، وبالتالي فإنه يمكن تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي، حيث نأخذ المعيار $n \geq 30$ لتطبيق هذه القاعدة.

إن التقريب إلى التوزيع الطبيعي يتطلب القيام بعملية تصحيح، وهذا لأن التوزيع الطبيعي هو توزيع لمتغير مستمر في حين أن **p’** هو متغير متقطع **.**

إذا كان المتغير هو x أو n_a (عدد العناصر التي تحمل الصفة المدروسة)، فإن عملية التصحيح تتم بإضافة أو طرح 0.5 من قيمة المتغير.

أما إذا كان المتغير هو p' (النسبة في العينة)، نقوم بإضافة أو طرح 1/2n من قيمة النسبة.

حيث يكون الاضافة في حالتي: $p(p'>..)$ (أكبر تماما) أو $p(p' \leq ...)$ (أصغر أو تساوي)، أما الطرح يكون في حالة $p(p'<..)$ (أصغر تماما) أو $p(p' \geq ...)$ (أكبر أو تساوي).

أما إذا كان الاحتمال من الشكل $p(p'= ...)$ نقوم باضافة وطرح معامل التصحيح فنتحصل على احتمال من الشكل التالي:

$$P(p'-1/2n < p' < p'+1/2n)$$

رابعا: توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

نقصد بتوزيع المعاينة للفروق والمجاميع، الفرق بين احصائيتين محسوبتين من مجتمعين مختلفين أو عينتين مسحوبتين من مجتمعين مختلفين، كأن ندرس إذا كان معدل النجاح في مجتمع الاناث أكبر أو أصغر من معدل النجاح لدى الذكور.

إذا كان لدينا مجتمعين A و B وسحبنا عينتين n_1و n_2 من هاذين المجتمعين، وحسبنا نفس الاحصائية S في كل عينة، يمكن تلخيص خصائص توزيع المعاينة للفرق والمجموع في الجدول الموالي:

	توزيع المعاينة للفروق	**توزيع المعاينة للمجاميع**
القانون الاحتمالي	**يمكن استخدام التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30، أي n_1و n_2 ≥30**	
المتوسط	$\bar{X}_{S1-S2} = \bar{X}_{S1} - \bar{X}_{S2}$	$\bar{X}_{S1+S2} = \bar{X}_{S1} + \bar{X}_{S2}$
التباين	$\sigma^2_{S1-S2} = \sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}$	$\sigma^2_{S1+S2} = \sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}$

إذا انطلاقا من الجدول السابق فإن متوسط الفرق بين مجتمعين يساوي الفرق بين متوسط المجتمع الأول ومتوسط المجتمع الثاني، أما في حالة توزيع المعاينة للمجاميع فهو مجموع متوسطي المجتمعين.

مثلا: إذا كانت الاحصائية هي المتوسط M، إذا كان متوسط المجتمع A هو 10 ومتوسط المجتمع B هو 17 فإن متوسط المجتمع A-B أي الفرق بين المجتمعين هو:

$$\bar{X}_{A-B} = \bar{X}_A - \bar{X}_B = 10 - 17 = -7$$

أما فيما يخص التباين فإننا نجتمع تباين المجتمعين في حالة تويع المعاينة للفروق أو للمجاميع.