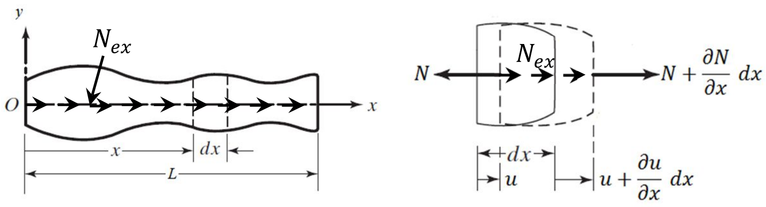
Chapitre 1

Vibrations longitudinales des barres

1. Equation de mouvement

Considérons une barre élastique de longueur L avec une section transversale variable $S(x)$. Les forces agissant sur les sections transversales d'un petit élément de la barre de longueur dx sont représentées sur la figure



La somme des forces appliquées sur l'élément de la barre, suivant l'axe x donne :

$$\rho\, S\, dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N + N_{ex} dx \tag{1}$$

Soit :

$$\rho\, S\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} + N_{ex} \tag{2}$$

Par ailleurs, d'après la loi de Hooke on a :

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3}$$

Avec :

$$\sigma = \frac{N}{S} \text{ et } \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

D'où :

$$N = ES \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

A partir de () et (), l'équation aux dérivées partielles du mouvement s'écrit :

$$\rho\, S\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial u}{\partial x}\right) + N_{ex} \tag{6}$$

Et dans le cas d'une section constante :

$$\rho\, S\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_{ex} \tag{7}$$

2. Fréquences et modes propres

En l'absence de forces extérieures, et dans le cas d'une section constante, on a l'équation :

$$\rho\, S\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

Pour la résolution de l'équation (8), on utilise la méthode de séparation des variables.

On pose :

$$u(x,t) = U(x).T(t) \tag{9}$$

Qui, reporté dans (8) donne :

$$\rho\, S\, U(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} = ES.T(t)\frac{d^2U(x)}{dx^2} \tag{10}$$

La division des deux membres de l'équation par : $\rho\, S\, U(x)\, T(t)$ conduit à la séparation de la fonction de la variable d'espace et celle de la variable du temps :

$$\frac{E}{\rho}\,\frac{1}{U(x)}\,\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\,\frac{d^2T(t)}{dt^2} = cste = -\omega^2 \tag{11}$$

Ce qui mène aux équations :

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \omega^2\frac{\rho}{E}U(x) = 0 \tag{13}$$

Les solutions de (12) et (13) sont :

$$T(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{14}$$

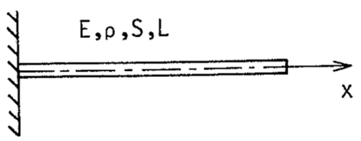
$$U(x) = C\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + D\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x \tag{15}$$

D'où :

$$u(x,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)\left(C\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x + D\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) \tag{16}$$

Les pulsations de résonance sont déterminées par l'application des conditions aux limites (C.L).

Exemple : dans le cas d'une poutre encastrée-libre (E-L) quelque soit l'instant *t*.



$$u(0,t) = 0 \tag{17}$$

$$N(L,t) = E\,S \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \tag{18}$$

L'application de ces conditions aux limites donne :

- $u(0,t) = 0 \;\; => \;\; U(0).T(t) = 0 \;\; => \;\; U(0) = 0 \; => D = 0$ (19)
- $N(L,t) = E\,S \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 => \;\; E\,S \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L}.T(t) = 0 => \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} = 0 \; =>$

  $\mathrm{C}\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x = 0$ (20)

Afin d'éviter la solution identiquement nulle, il faut que :

$$\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = 0 \tag{21}$$

Ce qui mène aux pulsations de résonance :

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{22}$$

Les modes associés à ω_n, définis à une constante multiplicative près, s'écrivent sous la forme :

$$U_n(x) = \sin(2n-1)\frac{\pi x}{2L} \tag{23}$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles, en mouvement libre, s'écrit donc:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\,.\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2L} \tag{24}$$

3. Relations d'orthogonalité

En mouvement libre, en tenant compte de (12), l'équation (6) s'écrit:

$$\frac{d}{dx}\left(ES\,\frac{dU}{dx}\right) = -\rho\,S\,\omega^2 U \tag{25}$$

Où : $U = U(x)$.

Puisque cette équation est vérifiée pour les couples ω_i, U_i et ω_j, U_j

$$\frac{d}{dx}\left(ES\,\frac{dU_i}{dx}\right) = -\rho\,S\,{\omega_i}^2 U_i \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ES\,\frac{dU_j}{dx}\right) = -\rho\,S\,{\omega_j}^2 U_j \tag{27}$$

Si les extrémités de la barre ont pour abscisses 0 et L, à partir de (26) multipliée par U_j et de (27) multipliée par U_i et en intégrant de 0 à L :

$$\int_0^L U_j \frac{d}{dx}\left(ES\ \frac{dU_i}{dx}\right) dx = -\ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx \tag{28}$$

$$\int_0^L U_i \frac{d}{dx}\left(ES\ \frac{dU_j}{dx}\right) dx = -\ {\omega_j}^2 \int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx \tag{29}$$

En intégrant par parties les premiers membres de (28) et (29) et en supposant des conditions aux limites courantes :

- Libre : $ES\ \frac{dU}{dx} = 0$, ou
- Encastrée : $U = 0$,

Il vient :

$$-\int_0^L ES\ \frac{dU_i}{dx}\frac{dU_j}{dx} dx = -\ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx \tag{30}$$

$$-\int_0^L ES\ \frac{dU_i}{dx}\frac{dU_j}{dx} dx = -\ {\omega_j}^2 \int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx \tag{31}$$

En retranchant (31) et (30), on obtient :

$$\left({\omega_i}^2 -\ {\omega_j}^2\right) \int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx = 0 \tag{32}$$

D'où pour : $\omega_i \neq \omega_j$

$$\int_0^L \rho\ S\ U_i U_j\ dx = 0 \tag{33}$$

Et à partir de (30) ou (31) :

$$\int_0^L ES\ \frac{dU_i}{dx}\frac{dU_j}{dx} dx = 0 \tag{34}$$

Les expressions (33) et (34) sont les *relations d'orthogonalité*.

Par ailleurs, en remplaçant *j* par *i* dans (30) ou (31), il vient :

$$-\int_0^L ES\ \left(\frac{dU_i}{dx}\right)^2 dx = -\ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\ S\ U_i^2\ dx \tag{35}$$

D'où :

$$\omega_i{}^2 = \frac{\int_0^L ES\left(\frac{dU_i}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^L \rho\, S\, U_i^2\, dx} = \frac{k_i}{m_i} \tag{36}$$

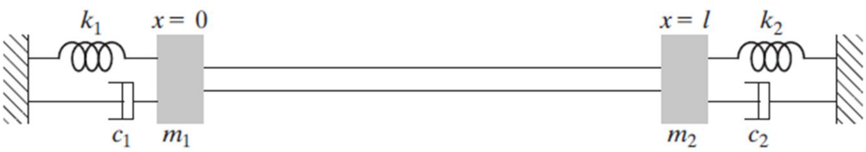
$k_i$et m_i : raideurs et masses modales du mode i.

4. Conditions aux limites

Dans le tableau ci-dessous sont présentés les conditions aux limites courantes avec les pulsations et modes propres correspondants.

Encastrée-Libre	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$U_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$, avec $n = 1,2,\ldots$
Encastrée - Encastrée	$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$U_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$, avec $n = 1,2,\ldots$
Libre - Libre	$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$U_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, avec $n = 0,1,2,\ldots$

D’autres conditions aux limites sont résumées dans l’exemple ci-dessous :



A l’extrémité gauche de la barre :

$$N(0,t) = ES\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k_1 u(0,t) + c_1\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

Et à son extrémité droite :

$$N(L,t) = ES\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k_2 u(L,t) - c_2\frac{\partial u}{\partial t}(L,t) - m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t)$$