***Chapitre IV***

# *Interpolation numérique*

***Objectif du chapitre :***

*Définir la :*

- ✓ *Interpolation polynomiale*
- ✓ *Polynôme d'interpolation de Lagrange*

**Introduction**

Supposons que nous connaissons les valeurs d'une fonction f(x) en un nombre de points $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, mais que nous n'avons pas l'expression analytique de la fonction f.

Pour estimer la valeur de f en un point quelconque x, on peut construire un polynôme P tel que $P(x_i) = f(x_i)$ i=0, ..., n et utiliser l'approximation $P(x) \approx f(x)$.

La théorie nous apprend que cette fonction existe et se présente sous la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \ g_k(x)$$

Il existe plusieurs types d'interpolations numériques telles que :

- ✓ Interpolation polynomiale : Polynôme de Lagrange, Polynôme de Newton, Polynôme d'Hermite
- ✓ Fonctions Splines
- ✓ Interpolation trigonométrique

**I. Interpolation polynomiale**

Il s'agit du cas particulier où $g_k(x) = x^k$, la fonction d'interpolation devient alors le polynôme d'interpolation $P_n$, de degré $\leq$ n,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

Avec $a_k$ solutions du système

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k = f(x_i)\ ,\quad i = 0,1,2,\dots,n$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Ce système d'équations linéaires possède une solution ($a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$) si son déterminant $V_{n+1}$ appelé déterminant de Vandermonde ne s'annule pas.

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

D'autres méthodes existent pour approximer f(x) entres autres le polynôme d'interpolation de Lagrange

- **Polynôme d'interpolation de Lagrange**

  Soit une fonction y = f(x) donnée en (n+1) points $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange, de degré n, a la forme suivante :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

  Avec $L_i(x) = \prod_{j=0 (j\neq i)}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\cdots(x_i-x_n)}$

  Et qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

- **Erreur de l'interpolation polynomiale**

L'erreur de l'interpolation $\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$ est donnée par :

$$\varepsilon(x) = \left[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right] \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \xi \in [x_0\,,\; x_n]$$

$f^{(n+1)}$ ; désigne la (n+1) dérivée de f.

Pour estimer $f^{(n+1)}(\xi)$ on écrit $f^{(n+1)}(\xi) = \max\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$

Exemple : Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_3$ de la fonction $f$ dont on connait les valeurs suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
| $y_i = f(x_i)$ | 1 | 3 | 2 | 5 |

Sous la forme de Lagrange, le polynôme s'écrit.

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, y_i$$
$$= L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

avec :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{12}$$

$$P_3(x) = -\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}\cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-4)}{12}\cdot 3 - \frac{x(x-1)(x-4)}{6}\cdot 2 + \frac{x(x-1)(x-3)}{12}\cdot 5$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{17}{6}x^2 + \frac{13}{3}x + 1}$$