**التمرين الأول:** تقوم شركة عربية لصناعة الأثاث بإنتاج **أربعة أنواع نمطية من حجرات الجلوس**، ويتم تجميع هذه الحجرات في قسم النجارة التابع للشركة، كما يتم تنشيطها في قسم التشطيب التابع للشركة أيضًا، وفيما يلي جدول يبين عدد الساعات اللازمة لإنتاج كل نوع من حجرات الجلوس في كلا القسمين، وكذلك هامش الربح الذي يمكن تحقيقه من إنتاج وبيع كل حجرة من كل نوع:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **البيان** | **النوع الأول** | **النوع الثاني** | **النوع الثالث** | **النوع الرابع** |
| قسم النجارة | 4 سا | 9 سا | 7 سا | 10 سا |
| قسم التشطيب | 1 سا | 1 سا | 3 سا | 6 سا |
| ربح الوحدة الواحدة | 25 دج | 50 دج | 45 دج | 80 دج |

وتقدر الطاقة الإنتاجية للشركة بواقع 6000 ساعة عمل في قسم النجارة، و4000 ساعة عمل في قسم التشطيب سنويًا، وترغب في إنتاج أنواع الحجرات الأربعة بحيث يمكنها تحقيق أقصى ربح ممكن من استغلالها الطاقة الإنتاجية المتاحة.

المطلوب: كون نموذج البرمجة الخطية اللازم لتحقيق هدف الشركة؟

الحل:

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب فيي إنتاج ثلاث منتجات وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات النوع الأول من الحجرات؛**

**: عدد وحدات النوع الثاني من الحجرات ؛**

**: عدد وحدات النوع الثالث من الحجرات ؛**

: **عدد وحدات النوع الرابع من الحجرات ؛**

دالة الهدف: دالة هدف من نوع تعظيم تظهر كما يلي:

\*القيود: من خلال بيانات الجدول تتضح القيود كما يلي:

قيد قسم النجارة:

قيد قسم التشطيب :

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**التمرين الثاني:** تنتج المؤسسة منتجين ()، يمران في عملية الإنتاج بآلتين الآلة (01) والآلة (02)، حيث يستغرق المنتج الأول في الآلة الأولى 7 ساعات ، وفي الآلة الثانية 4 ساعات، بينما يستغرق المنتج الثاني في الآلة الأولى 4 ساعات وفي الآلة الثانية 5 ساعات، وقد كانت الطاقة الإنتاجية للآلة الأولى 28 ساعة والآلة الثانية 20 ساعة، كما أن اللب اليومي على المنتجات لا يتجاوز 3 وحدات.

المطلوب:

- قم بصياغة نموذج رياضي لمسألة البرمجة الخطية، وابحث عن الحل الأمثل باسخدام الطريقة البيانية؟

**الحل:**

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن الشركة ترغب في إنتاج نوعين من المنتجات (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات المنتج الأول؛**

**: عدد وحدات المنتج الثاني؛**

دالة الهدف : دالة الهدف بشكل تعظيم وتظهر بالشكل التالي:

القيود: تظهر لنا في المسألة نوعين من القيود:

قيود الآلات:

* قيد الآلة الأولى":
* قيد المادة الخام"م2":

قيود دراسة السوق:

- الطلب اليومي على وحدات المنتج الثاني "**X2**" لا يتجاوز 3 وحدات:

ويأخذ القيد الشكل التالي:

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** + 4x2 = 28 x1 7

*x1 = 0 ⇒ 4x2 = 28 ⇒ x2 = 7 ⇒ (0 , 7)*

*x2 = 0 ⇒ 7x1 = 28 ⇒ x1 = 4 ⇒ (4, 0)*

**القيد الثاني:** x1 + 5 x2 = 204

*x1 = 0 ⇒ 5x2 = 20 ⇒ x2 = 4 ⇒ (0 , 4)*

*x2 = 0 ⇒ 4 x1 = 20 ⇒ x1 = 5 (5 , 0)*

**القيد الثالث:** =3 x2مستقيم موازي محور الفواصل.

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

**7X1+4X2=28**

**4X1+5X2=20**

**X2=3**

**B**

**A**

**C**

**E**

**D**

5

X1

X2

X1=0

X2=0

3

4

**منطقة الحلول الممكنة**

7

4

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث ، ، ، و النقاط C,D,E سيتم حساب إحداثياتها.

**إيجاد إحداثيات النقطة C:** تمثل النقطة C تقاطع القيدين الأول والثاني ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين، وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "D" التي تمثل تقاطع القيد الثاني ;والثالث:

بالتعويض نجد := ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | Z=2x1+ 3x2 | النتيجة |
| A(0,0) | 0 | 0 | 2×0+3×0 | 0 |
| B(4,0) | 4 | 0 | 2×4+3×0 | 8 |
|  |  |  |  |  |
|  | **3** |  |  | **11 .5** |
|  | 1 | 2 | 2× 0+3×3 | 9 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة D(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "" وحدة من المنتج الأول و "" وحدة المنتج الثاني لتحقيق ربح قدره"" .

**التمرين الثالث:** فكر مستثمر في بناء مصنع صغير لإنتاج نوعين من الألبسة النسائية والرجالية، وأثبتت دراسة السوق أن إنتاج هذين النوعين من الألبسة يمر بثلاث أقسام إنتاجية كما يلي:

**قسم الغزل:** طاقته الإنتاجية لا تتجاوز 54 ساعة عمل للدورة الواحدة، وتحتاج الألبسة النسائية إلى 3 ساعات عمل في هذا القسم، والألبسة الرجالية إلى 6 ساعات عمل.

**قسم النسيج:** تبلغ طاقته الإنتاجية 48 ساعة عمل للدورة الواحدة، وتحتاج الألبسة النسائية إلى 6 ساعات عمل في هذا القسم، والألبسة الرجالية إلى 3 ساعات عمل.

**قسم التجهيز النهائي والتعبئة:** طاقته الإنتاجية بحدود 90 ساعة عمل، وتحتاج الألبسة النسائية والألبسة الرجالية إلى 9 ساعات عمل.

**-** كما بينت دراسة السوق أيضًا أن الربح الوحدوي للألبسة النسائية هو 15 دج، بينما الربح الوحدوي للألبسة الرجالية هو 12 دج.

**المطلوب:** - أوجد خطة الإنتاج المثلى التي تجعل الأرباح في حدها الأقصى (بالطريقة البيانية)؟

الحل:

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن الشركة ترغب في إنتاج نوعين من المنتجات (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات الألبسة النسائية؛**

**: عدد وحدات الألبسة الرجالية؛**

دالة الهدف : دالة الهدف بشكل تعظيم وتظهر بالشكل التالي:

القيود: لتكوينها يمكن الاستعانة بالجدول التالي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| المنتجات  الأقسام | المنتجات | | الطاقة المتاحة |
| ألبسة نسائية | ألبسة رجالية |
| قسم الغزل | 3 سا | 6 سا | 54 سا |
| قسم النسيج | 6 سا | 3 سا | 48 سا |
| قسم التجهيز | 9 سا | 9 سا | 90سا |

من خلال الجدول تظهر القيود كما يلي:

* قيد قسم الغزل:
* قيد قسم النسيج :
* قيد قسم التجهيز:

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** + 6x2 = 54 x1 3

*x1 = 0 ⇒ 6x2 = 54 ⇒ x2 = 9 ⇒ (0 , 9)*

*x2 = 0 ⇒ 3x1 = 54 ⇒ x1 = 18 ⇒ (18, 0)*

**القيد الثاني:** x1 + 3 x2 = 486

*x1 = 0 ⇒ 3x2 = 48 ⇒ x2 = 16 ⇒ (0 , 16)*

*x2 = 0 ⇒ 6 x1 = 48 ⇒ x1 = 8 (8 , 0)*

**القيد الثالث:** x1 + 9 x2 = 909

*x1 = 0 ⇒ 9x2 = 90 ⇒ x2 = 10 ⇒ (0 , 10)*

*x2 = 0 ⇒ 9 x1 = 90 ⇒ x1 = 10 (10 ,0 )*

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

**D**

**C**

**9X1+9X2=90**

**6X1+3X2=48**

10

8

**B**

**A**

**E**

X1

X2

X1=0

X2=0

9

**منطقة الحلول الممكنة**

16

18

10

**9X1+9X2=90**

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث ، ، ، و النقاط C,D, سيتم حساب إحداثياتها.

**إيجاد إحداثيات النقطة C:** تمثل النقطة C تقاطع القيدين الثاني والثالث ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "D" التي تمثل تقاطع القيد الاول ;والثالث:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض نجد 2 ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | Z=15x1+ 12x2 | النتيجة |
| A(0,0) | 0 | 0 | 15×0+12×0 | 0 |
| B(8,0) | 0 | 8 | 15×0+12×8 | 96 |
|  | 6 | 4 | 15×6+12×4 | 138 |
|  | 2 |  | 15×2+12×8 | 126 |
|  | 0 | 3 | 15×0+12×3 | 36 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة D(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "" وحدة من المنتج الأول (الألبسة النسائية) و "" وحدة المنتج الثاني (الألبسة الرجالية) لتحقيق ربح قدره"" .

**التمرين الرابع:** مؤسسة "y" تقوم بصناعة نوعين من المصبرات لتجار الجملة (x1,x2)، تستعمل مادتين أساسيتين للصناعة "A" و"B"، الحد الأقصى المتاح من "A" هو 6 طن، بينما الحد الأقصى المتاح من "B" هو 8 طن.

- الطلب اليومي من المادة الأولية بالطن للمنتوجين مبيَّن في الجدول التالي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **النوع الأول "x1"** | **النوع الثاني "x2"** |
| **المادة الأولية "A"** | 1 طن | 2 طن |
| **المادة الأولية "B"** | 2 طن | 1 طن |

بعد دراسة السوق تم إعطاء الملاحظات التالية:

- الطلب اليومي على المنتج "x2" ناقص الطلب اليومي على المنتج "x1" لا يمكن أن يتجاوز 1 طن؛

- الطلب اليومي على المنتج "x2" لا يمكن أن يتجاوز 2 طن؛

- الربح الوحدوي للمنتج 'x1" قدر بـ: 3 دج ولـلمنتج: "x2" قدر بـ: 2 دج (للطن الواحد).

**المطلوب:** إذا كنت مشرفًا على دائرة الإنتاج ، كم يجب على هذه المؤسسة أن تنتج من هذين المنتجين لكي يتحقق أكبر ربح ممكن (الطريقة البيانية)؟

**الحل:**

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج نوعين من المتصبرات (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات النوع الأول؛**

**: عدد وحدات النوع الثاني؛**

دالة الهدف : دالة الهدف بشكل تعظيم وتظهر بالشكل التالي:

القيود: يظهر لدينا نوعين من القيود

قيود المادة الأولية:

* قيد المادة الأولية َA:
* قيد المادة الأولية B :

قيود السوق:

الطلب اليومي على المنتج "x1" ناقص الطلب اليومي على " x2" **لا يمكن أن يتجاوز** 1 طن.

الطلب اليومي على المنتج "x2" **لا يمكن أن يتجاوز** 2 طن.

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة للقيد الرابع: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** + 2x2 = 6 x1

*x1 = 0 ⇒ 2x2 = 6 ⇒ x2 = 3 ⇒ (0 , 3)*

*x2 = 0 ⇒ x1 = 6 ⇒ x1 = 6 ⇒ (6, 0)*

**القيد الثاني:** x1 + x2 = 82

*x1 = 0 ⇒ x2 = 8 ⇒ (0 , 8)*

*x2 = 0 ⇒ 2 x1 = 8 ⇒ x1 = 4 (4 , 0)*

**القيد الثالث:** x2 - x1 = 1

*x1 = 0 ⇒ x2 = 1⇒ (0 , 1)*

*x2 = 0 ⇒ x1 = -1 (-1 ,0 )*

**القيد الرابع:** x2 = 2، مستقيم موازي لمحور الفواصل.

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

**9X1+9X2=90**

**2X1+X2=8**

**X2=2**

**F**

**B**

8

6

**A**

X1

X2

X1=0

X2=0

4

3

1

-1

**D**

**C**

**E**

X2-X1=1

2

**منطقة الحلول الممكنة**

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث ، ، ، و النقاط C,D, سيتم حساب إحداثياتها.

**إيجاد إحداثيات النقطة C:** تمثل النقطة C تقاطع القيدين الثاني والثالث ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "D" التي تمثل تقاطع القيد الاول ;والثالث:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض نجد 2 ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | Z=15x1+ 12x2 | النتيجة |
| A(0,0) | 0 | 0 | 15×0+12×0 | 0 |
| B(8,0) | 0 | 8 | 15×0+12×8 | 96 |
|  | 6 | 4 | 15×6+12×4 | 138 |
|  | 2 |  | 15×2+12×8 | 126 |
|  | 0 | 3 | 15×0+12×3 | 36 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة D(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "" وحدة من المنتج الأول (الألبسة النسائية) و "" وحدة المنتج الثاني (الألبسة الرجالية) لتحقيق ربح قدره"" .

**التمرين الخامس:** شركة السماد الوطنية تعمل على وضع خطط شهرية خاصة بإنتاج نوعين من السماد، يحتاج كل نوع إلى 4 مواد، كما يوضحها الجدول الموالي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **الأصناف**  **نسب المواد** | **النترات** | **الفوسفات** | **البوتاسيوم** | **التراب** |
| **النوع الأول** | 5% | 5% | 10% | 80% |
| **النوع الثاني** | 5% | 10% | 5% | 80% |

- الشركة لا تجد صعوبة في تسويق السماد، حيث يحقق بيع كيس واحد من النوع الأول 71.5 دج، بينما يحقق بيع كيس واحد من النوع الثاني 69 دج.

- المادة المتوفرة في الشهر كالتالي: 1100 كيس من النترات بسعر 200 دج للكيس ، 1800 كيس من الفوسفات بسعر 80 دج للكيس، و200 كيس من البوتاسيوم بسعر 160 ج للكيس، أما **المادة الرابعة فهي التراب فقد استغلت بشكل كامل**، ويكلِّف الكيس الواحد 10 دج، إضافة إلى كلفة المزج لهذه المواد والتي تعادل 15 دج للكيس الواحد، والشركة لا تجد صعوبة تذكر في إستخدام الآلات.

**المطلوب:** كيف يمكن للمؤسسة إستخدام هذه الموارد المحدودة لتحقيق أكبر ربح ممكن (بالطريقة البيانية)؟

**الحل:**

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج نوعين من المتصبرات (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات النوع الأول من الأكياس؛**

**: عدد وحدات النوع الثاني من الأكياس؛**

دالة الهدف : نلاحظ أن أنواع الأكياس تكلف الشركة مواد أولية، إذن قيمة المواد الأولية عبارة عن تكلفة متكونة من تكاليف المواد على حدى.

إذن لتحديد ربح كل نوع يجب تطبيق القانون التالي:

**الربح = سعر البيع – سعر التكلفة**

**- سعر تكلفة النوع الأول = تكلفة النترات + تكلفة الفوسفات + تكلفة البوتاسيوم + تكلفة التراب + تكلفة المزج**

= 0,05 × 200 + 0,05 × 80 + 0,05 × 160 + 0,8 × 10 + 15 = 53

**سعر تكلفة النوع الأول = 53 دج**

**- سعر تكلفة النوع الثاني = تكلفة النترات + تكلفة الفوسفات + تكلفة البوتاسيوم + تكلفة التراب + تكلفة المزج**

= 0,05 × 200 + 0,1 × 80 + 0,05 × 160 + 0,8 × 10 + 15 = 49

**سعر تكلفة النوع الثاني = 49 دج**

ومنه ربح الصنف الأول = 71,5 – 53 = 18,5 دج ، ربح الصنف الأول = 69– 49 = 20دج

ومنه دالة الهدف بشكل تعظيم وتأخذ الشكل التالي:

القيود: تظهر حسب الجدول المدون في التمرين هناك أربعة قيود، إلا أنَّه كما موضح في المعطيات التمرين أن: " **مادة التراب استهلكت بالكامل في الشهر** " إذن قيد التراب لا يظهر في القيود,

ومنه تظهر القيود في الشكل التالي:

* قيد النترات :
* قيد الفوسفات :
* قيد البوتاسيوم:

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** + 0 ,05x2 = 1100 0,05x1

*x1 = 0 ⇒ 0,05x2 = 1100 ⇒ x2 = 22000 ⇒ (0 , 22000)*

*x2 = 0 ⇒ 0 ,05 x1 = 1100 ⇒ x1 = 22000 ⇒ (22000, 0)*

**القيد الثاني:** x1 +0,1 x2 = 18000 ,05

*x1 = 0 ⇒ 0 ,1x2 = 1800 ⇒ x2 = 18000 ⇒ (0 , 22000)*

*x2 = 0 ⇒ 0,05 x1 = 1800 ⇒ x1 = 36000 (36000 , 0)*

**القيد الثالث:** x1 +0,05 x2 = 20000 ,1

*x1 = 0 ⇒ 0,05 x2 = 2000⇒ x2 = 40000 (0 , 40000)*

*x2 = 0 ⇒ 0,1 x2 = 2000⇒ x2 = 20000 (0 , 20000)*

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

**0,1X1+0X2=90**

**0,05X1+0,1X2=1800**

**0,05X1+0 ,05X2=11000**

**منطقة الحلول الممكنة**

**E**

**B**

**C**

**D**

**A**

X1

X2

X1=0

X2=0

18000

22000

40000

20000

22000

36000

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث ، ، ، و النقاط C,D, سيتم حساب إحداثياتها.

**إيجاد إحداثيات النقطة C:** تمثل النقطة C تقاطع القيدين الأول والثالث ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "D" التي تمثل تقاطع القيد الاول ;والثالث:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

، ، ،

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | Z=18,5 x1+ 20x2 | النتيجة |
| A(0,0) | 0 | 0 | 18,5× 0+ 20×0 | 0 |
|  | 20000 | 0 | 18,5× 20000+ 20×0 | 370000 |
|  | 18000 | 4000 | 18,5× 18000+ 20×4000 | 413000 |
|  | **8000** |  | **18,5× 8000+ 20×14000** | **428000** |
|  | 0 | 18000 | 18,5× 0+ 20×18000 | 360000 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة D(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "" وحدة من النوع الأول و "" وحدة من النوع الثاني (لتحقيق ربح قدره"" .

**التمرين السادس:** بناء على تحليل مستويات المخزون الحالية والطلب المتوقع للشهر القادم فإنّ مؤسسة "**MD**"، تنتج منتوجين حيث:

**-** الإنتاج المشترك من المنتوج الأول والمنتوج الثاني يجب ألا يقل على 350 وحدة؛

**-** المنتوج الأول يتطلب 2 ساعة عمل من إنتاج وحدة واحدة، والمنتوج الثاني يتطلب ساعة عمل واحدة من أجل إنتاج وحدة واحدة، للعلم توجد 600 ساعة عمل متاحة.

**-** بالإضافة إلى أن طلبات أحد الزبائن تكون على الأقل 125 وحدة من المنتوج الأول.

**هدف المؤسسة " MD " هو تحقيق المتطلبات السابقة بأقل تكلفة إنتاجية، إذ أنّ تكلفة الإنتاج للمنتوج الأول هي 2 دج للوحدة الواحدة، والمنتوج الثاني 3 دج للوحدة الواحدة المنتجة.**

**المطلوب:** باستعمال الطريقة البيانية، أوجد الحل الأمثل الذي يقترح للمؤسسة "**MD**"؟

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج نوعين من منتجات (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات المنتجة من المنتج الأول؛**

**: عدد وحدات المنتجة من المنتج الثاني؛**

دالة الهدف : هدف المؤسسة هو تحقيق متطلبات الإنتاج بأقل تكلفة إذن دالة الهدف تأخذ الشكل التالي:

القيود: حسب معطيات التمرين تأخذ القيود الشكل التالي:

\* الإنتاج المشترك من المنتوج الأول والمنتوج الثاني **يجب ألا يقل** عن 350 دج.

\* المنتوج الأول يتطلب **2 ساعة عمل** من أجل إنتاج وحدة واحدة، والمنتوج الثاني يتطلب **ساعة عمل واحدة** من أجل إنتاج وحدة واحدة، للعلم أنه توجد 600 ساعة عم متاحة.

\* بالإضافة إلى أن طلبات أحد الزبائن تكون **على الأقل 125 وحدة** من المنتوج الأول.

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة للقيد الرابع: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** + x2 = 350 x1

*x1 = 0 ⇒ x2 = 350 ⇒ (0 , 350)*

*x2 = 0 ⇒ x1 = 350 ⇒ ⇒ (350, 0)*

**القيد الثاني:** x1 + x2 = 6002

*x1 = 0 ⇒ x2 = 600 ⇒ (0 , 600)*

*x2 = 0 ⇒ 2 x1 = 600 ⇒ x1 = 300 (300 , 0)*

**القيد الثالث:** x1 = 125، مستقيم موازي لمحور التراتيب

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

X1

X2=0

**X1+X2=6002**

**X1+X2= 350**

**منطقة الحلول الممكنة**

600

300

125

350

350

X1=125

X1=0

X2

**C**

**A**

**B**

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Max"، وسيتم حساب الإحداثيات كما يلي:.

**إيجاد إحداثيات النقطة A:** تمثل النقطة A تقاطع القيدين الأول والثالث ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

بالتعويض نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "B" التي تمثل تقاطع القيد الاول ;والقيد الثاني:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض نجد 250 ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "C" التي تمثل تقاطع القيد الثاني ;والقيد الثالث

بالتعويض نجد 350 ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | C=2x1+ 3x2 | النتيجة |
| A(125,225) | 125 | 225 | 2×125+3×225 | 925 |
| **B(250,100)** | **250** | **100** | **2×250+3×100** | **800** |
|  | 125 | 350 | 2×125+3×350 | 1300 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أقل قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة B(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "" وحدة من المنتج الأول و "" وحدة المنتج الثاني لتخفيض التكلفة إلى " .

**التمرين السابع:** في إحدى المستشفيات الخاصة طلب من مسؤول المطبخ أن تكون وجبة الإفطار متكونة من مادتين أساسيتين: "x1,x2" حيث تكون هذه الوجبة تستجيب للمتطلبات الغذائية اليومية من بروتين، فيتامين، والحديد وتكون بأقل تكلفة ممكنة، وبعد الاتصال بمتخصصين في التغذية تم التوصل إلى المعطيات التالية:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **المواد الغذائية** | **البروتين**  **(الوحدة100غ)** | **الفيتامين**  **(الوحدة100غ)** | **الحديد**  **(الوحدة100غ)** | **التكلفة**  **(الوحدة100غ)** |
| **المادة الأولى "x1"** | 2 | 2 | 1.33 | 3 |
| **المادة الثانية "x2"** | 2 | 1 | 2 | 4 |
| الحد الأدنى | 10 | 7 | 8 |  |

**المطلوب: ما هي الخطة المثلى التي تقترحها لمسؤول المطبخ حتى تكون التكاليف في حدها الأقصى؟**

\* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

**من خلال المسألة نلاحظ أن المستشفى يرغب في تكوين وجبة غذائية متكونة من مادتين (**x1,x2**) وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

**: عدد وحدات المادة الأولى؛**

**: عدد وحدات المادة الثانية؛**

دالة الهدف : المواد المكونة للمواد الغذائية تكون أقل تكلفة ممكنة وبذلك تأخذ دالة الهدف الشكل التالي:

القيود: حسب معطيات التمرين تأخذ القيود الشكل التالي:

قيد مادة البروتين:

قيد مادة الفيتامين:

قيد مادة الحديد:

شرط عدم السلبية:

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثاني: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

بالنسبة القيد الثالث: نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ: "x1" وقيمة لـ:"x2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ: "x2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x1".

**القيد الأول:** +2 x2 = 10 x1 2

*x1 = 0 ⇒ 2 x2= 10 ⇒ x2 = 5 ⇒ (0 , 5)*

*x2 = 0 ⇒ 2 x1= 10 ⇒ x1 = 5 ⇒ (5, 0)*

**القيد الثاني:** x1 + x2 = 72

*x1 = 0 ⇒2 x2= 10 ⇒ x2 = 7 ⇒ (0 , 7)*

*x2 = 0 ⇒ 2 x1 = 7 ⇒ x1 = 7/2 (1,5 , 0)*

**القيد الثالث:** x1 +2 x2 = 81.33

*x1 = 0 ⇒2 x2= 8⇒ x2 = 4 ⇒ (0 , 4)*

*x2 = 0 ⇒ 1 ,33 x1 = 8 ⇒ x1 = 6 (6 ,0 )*

**- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل ()** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي () وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالنقاط () وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:

**X1+2X2=102**

**2X1+X2=7**

**1,33X1+2X2=8**

**D**

**C**

**B**

**A**

X2

X1=0

X1

X2=0

7

5

6

5

3,5

4

**منطقة الحلول الممكنة**

**إيجاد الحل الأمثل**: يكون الحل **الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** ) لذلك سنقوم بحساب قيم "X1"، "X2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أقل قيمة لدالة الهدف كون دالة الهدف من الشكل "Min"، حيث و سيتم حساب الإحداثيات كما يلي:.

**إيجاد إحداثيات النقطة B:** تمثل النقطة A تقاطع القيدين الأول والثالث ولإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض نجد:= ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

إيجاد إحداثيات النقطة "C" التي تمثل تقاطع القيد الاول ;والقيد الثاني:

|  |  |
| --- | --- |
| + |  |
|  |
| = |  |
|  |  |

بالتعويض نجد 2 ،ومنه إحداثيات النقطة هي:

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| النقطة | X1 | X2 | C= 3x1+ 4x2 | النتيجة |
| A(6,0) | 0 | 6 | 3×6+4×0 | 18 |
| **B(3,2)** | **3** | **4** | **3×3+4×2** | **17** |
|  | 2 | 3 | 3×2+4×3 | 18 |
|  | 2 | 7 | 3×0+4×7 | 28 |

من خلال الجدول نلاحظ أن أقل قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة B(, ) وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المستشفى توفير "" وحدة من النوع الأول و "" وحدة من النوع الثاني لتخفيض التكلفة إلى " .