4

المحـــــاضـــرة

الحالات والمشاكل الخاصة في طريقة الرسم البياني

1- حالة عدم وجود حلول مقبولة (تعذر الحل).

2- حالة عدم توفر حدود.

3- حالة وجود فائض.

4- حالة تعدد الحلول المثلى.

تمهيـــد:

يصادف تطبيق الطريقة البيانية على نماذج البرمجة الخطية أربع حالات خاصة وهي حالة عدم وجود حلول مقبولة (تعذر الحل)؛ أي أن أحد القيود لا يؤثر عل الحل، ووجود أكثر من حل حيث تكون قيمة دالة الهدف والمتغيرات أكثر من حالة، كذلك يمكن أن لا يوجد حل للنموذج وذلك بعدم وجود منطقة للحل، والحالة الاخيرة وهي أن تكون منطقة الحل غير محصورة؛ أي تكون غير محددة ومفتوحة من أحد الجانبين.

هناك أربع حالات تظهر عند استخدام الرسم البياني وحل مشاكل البرمجة الخطية هي:

1- حالة عدم وجود حلول مقبولة (تعذر الحل) : وتعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات كل القيود، يعني هذا بالنسبة لطريقة الرسم أنه لا يوجد حل ممكن وتحدث هذه الحالة إذا كانت المشكلة تضم قيودًا متعارضة (محمد و سليمان، 2008، صفحة 101):

ليكن النموذج التالي:

$$\text{MaxZ} = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $5x_1 + 5x_2 \le 20$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$5x_1 + 5x_2 = 20$$

بالنسبة القيد الثاني: $x_2 \ge 6$نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_2 = 6$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

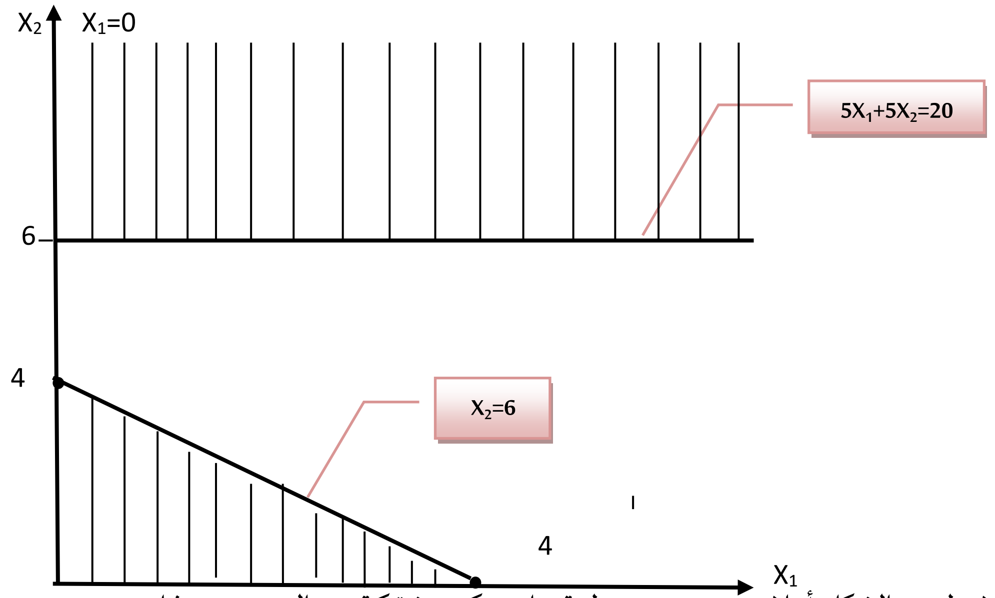
القيد الأول: $5x_1 + 5x_2 = 20$

$$x_1 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

القيد الثاني: $x_2 = 6$ ، مستقيم موازي لمحور الفواصل.

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** ($\leq$) ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا أما بالنسبة للقيد الثاني فهو من الشكل ($\geq$) كذلك من الشكل أكبر أو تساوي فنقبل المنطقة العليا **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة السفلى، ومنه تبقى المنطقة المضللة، كما يوضحه الشكل التالي:



نلاحظ من الشكل أعلاه عدم وجود منطقة حل ممكن مشتركة بين القيدين، وهذا يعني عدم وجود حل، وهذه المشكلة تظهر جليًا في حالة كون كل الموارد المتوفرة لا يكفي لسد احتياجات القيمة الدنيا لواحد أو أكثر من متغيرات القرار، ففي المثال الأعلاه القيمة الدنيا لـ "x_2" هي 6، والقيمة الدنيا لـ "x_1" هي صفر، تعويض هاتين القيمتين في القيد الأول فإن ذلك يؤدي إلى عدم تحقيق القيد لأن كمية الموارد المتوفرة 20 هي غير كافية.

-2 حالة عدم توفر الحدود: ويعني ذلك عدم وجود حدود على الحل، وهذا يعني أنه يمكن زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم دون مخالفة لأي قيد من قيود المشكلة، علما أن هذه الحالة هو حالة بعيدة عن الو اقع، ذلك أننا كأفراد ومؤسسات محددين بالموارد المتاحة لنا في لحظة زمنية معينة ومع ذلك فإن استعراض هذه الحالة هو متمم لاستعراض الحالات الأخرى التي تصاحب طريقة الرسم في حل مشاكل البرمجة الخطية، وبالنسبة لطريقة الرسم فإن هذا يعني أن منطقة الحل مفتوحة بدون نهاية (محمد و سليمان، 2008، صفحة 102):

لنفترض نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{MaxZ} = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $6x_1 + 2x_2 \geq 12$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$6x_1 + 2x_2 = 12$$

بالنسبة القيد الثاني: $x_2 \leq 4$ نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_2 = 4$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

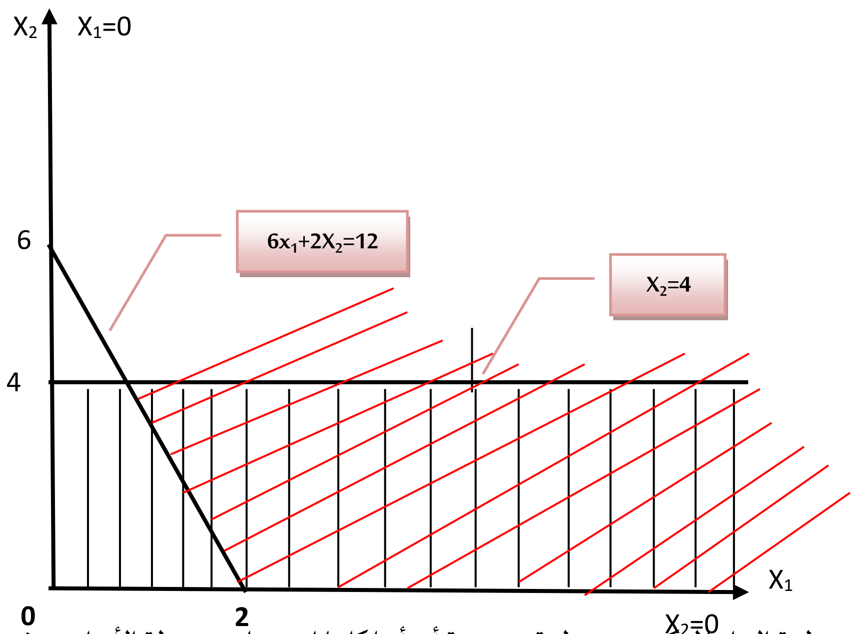
القيد الأول: $6x_1 + 2x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow (0, 6)$

$x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow (2, 0)$

القيد الثاني: $x_2 = 4$ ، مستقيم موازي لمحور الفواصل.

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل (≥)** ومنه نقبل المنطقة العليا كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة السفلى بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو من الشكل (≤) فنقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة، كما يوضحه الشكل التالي:



من الشكل نلاحظ أن منطقة الحل الممكن هي منطقة مفتوحة أي أننا كلما ابتعدنا عن نقطة الأصل سوف نحصل على حل أقصى وهذا ما يطلق عليه بالحل غير محدد.

-3 حالة وجود فائض: **وهي مشكلة شائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكثيرة، وتتمثل بوجود فائض حيث تمثل القيد الفائض ذلك القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل الممكن، بمعنى آخر هناك قيود أكثر أهمية من غيرها، لذلك فإن الاستخدام الأهم يعني استخدام أقل أهمية** (محمد و سليمان، 2008، صفحة 103).

لنفترض نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $x_1 + x_2 \leq 30$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_1 + x_2 = 30$$

بالنسبة القيد الثاني: $2x_1 + x_2 \leq 40$نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$2x_1 + x_2 = 40$$

بالنسبة للقيد الثالث: $x_1 \leq 45$إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_1 = 45$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ:"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

القيد الأول: $x_1 + x_2 = 30$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 30 \Rightarrow (0, 30)$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 30 \Rightarrow (30, 0)$

القيد الثاني: $2x_1 + x_2 = 40$

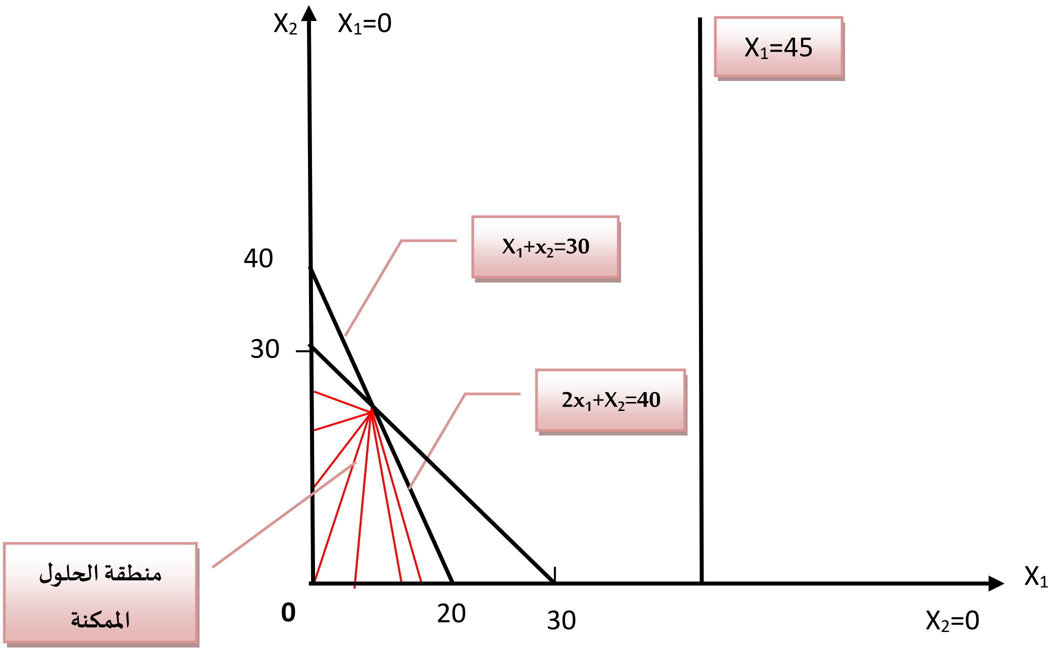
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 40 \Rightarrow (0, 40)$

$x_2 = 0 \quad 2x_1 = 40 \Rightarrow x_1 = 20 \quad (20, 0)$

القيد الثالث: $x_1 = 45$ ، مستقيم موازي لمحور التراتيب .

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** (≤) ومنه نقبل المنطقة العليا كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة السفلى بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني والثالث فهو من الشكل (≤) كذلك من

الشكل أقل أو تساوي (≤) وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة، كما يوضحه الشكل التالي:



نلاحظ من الشكل أعلاه وجود حالة الفائض متمثلة بالقيد $x_1 \leq 45$ حيث يلاحظ أن هذا القيد لم يؤثر على منطقة الحل الممكن، وبالتالي فإن القيدين الأولين قد أبطلا مفعول ذلك القيد، وذلك أنهما أكثر تعقيدًا وتحديدًا للمشكلة وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

4- **تعدد الحلول المثلى (تعدد الحلول):** وتعني هذه الحالة أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من حل، ويمكن التعرف على هذه الحالة عند استخدام طريقة الرسم وعن طريق رسم مستقيم دالة الهدف، ويكون مستقيم هذه الدالة يوازي أحد القيود، أي لها نفس الميل، وبذلك يظهر هناك حلين أو أكثر للنموذج.

لنفترض نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 \leq 30$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$4x_1 + 6x_2 = 30$$

بالنسبة القيد الثاني: $2x_1 + x_2 \leq 40$ نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_1 = 5$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

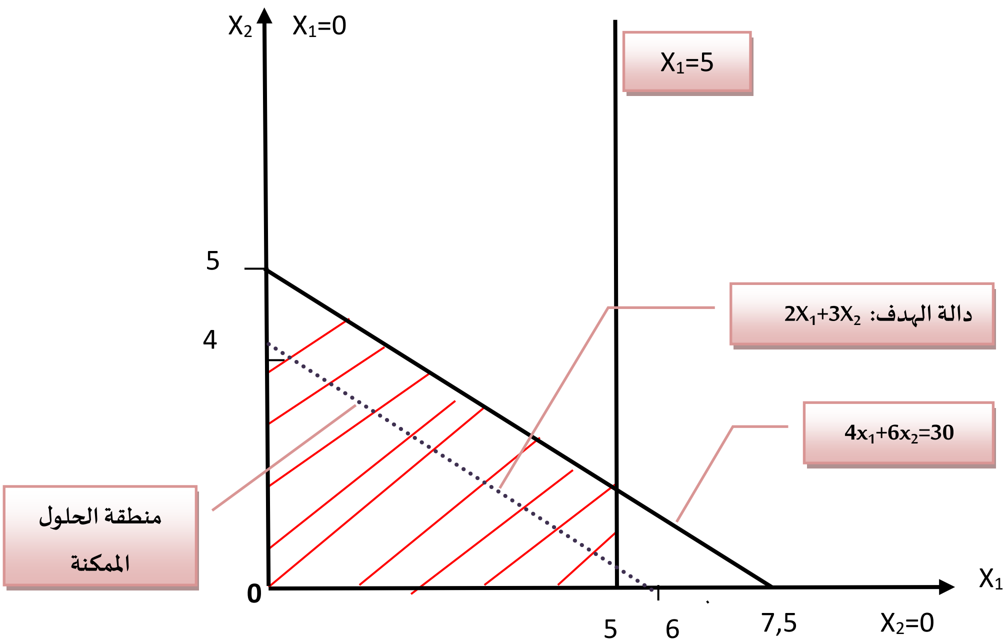
القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 = 30$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 6x_1 = 30 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad (0, 5)$$

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow 4x_1 = 30 \quad x_1 = 7{,}5 \quad \Rightarrow \quad (7{,}5, 0)$$

القيد الثاني: $x_1 = 5$ ، مستقيم موازي محو التراتيب.

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** ($\leq$) ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو أيضًا من الشكل ($\leq$) أقل أو تساوي ($\leq$) وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة كما يوضحه الشكل التالي:



لو افترضنا أننا استخدمنا طريقة خطوط الربح المتكافئة للوصول إل الحل الأمثل، وافرض أننا اخترنا أن يكون الربح 12 دج فهذا يعني:

دالة الهدف: $2x_1 + 3x_2 = 12$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 3x_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \Rightarrow \quad (0, 4)$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 2x_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6 \Rightarrow \quad (0, 6)$

من خلال الشكل أعلاه نلاحظ مستقيم دالة الهدف والممثل لربح قدره 12 دج لوجدناه كما هو موضح في الشكل موازيًا لمستقيم القيد $4x_1 + 6x_2 \leq 30$، كذلك لو افترضنا أن الربح يساوي 15 دج أي $2x_1 + 3x_2 = 15$ ورسمنا المستقيم المكافئ لهذه المعادلة لوجدناه متطابقًا تمامًا مع الخط الممثل للقيد الأول $4x_1 + 6x_2 \leq 30$، وفي كلتا الحالتين فإن هذا يعني وجود أكثر من حل أمثل لهذه المشكل، وأنها كلها تعطي نفس القيمة.

ويمكن كذلك توضيح حالة تعدد الحل الأمثل عن طريق اختبار زوايا منطقة الحل الممكن. فإذا وجدنا أن القيمة المثلى تقع على أكثر من زاوية فهذا يعني أن للمشكلة، وأنها كلها تعطي نفس القيمة.

لنفترض نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $x_1 \leq 4$ حذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_1 = 4$$

بالنسبة القيد الثاني: $2x_1 \leq 12$ إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_2 = 6$$

بالنسبة للقيد الثالث: $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

القيد الأول: $x_1 = 4$ مستقيم موازي لمحور التراتيب.

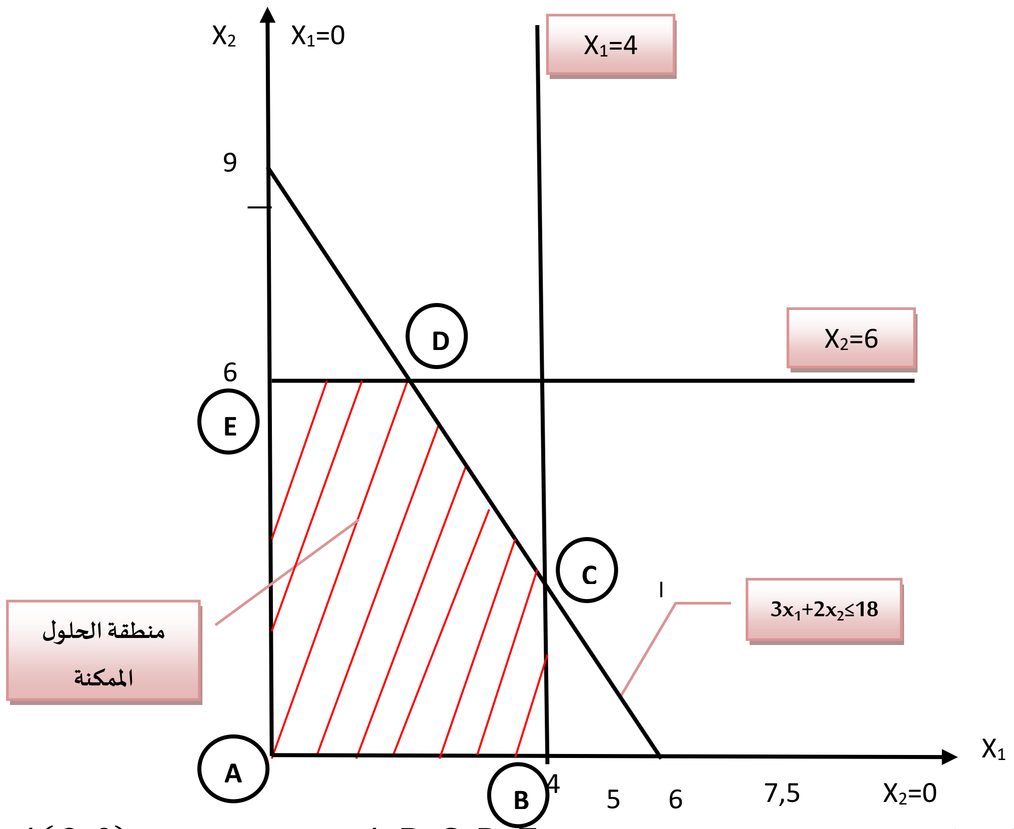
القيد الثاني: $x_2 = 6$ ، مستقيم موازي محو الفواصل.

القيد الثالث: $3X_1+2X_2 \leq 18$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 2x_2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 9 \Rightarrow \quad (0, 9)$

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow 3x_1 = 18 \quad x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad (6, 0)$

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** ($\leq$) ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو أيضًا من الشكل ($\leq$) فإننا نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة، كما يوضحه الشكل التالي:



نلاحظ من الشكل أعلاه أن زوايا منطقة الحل الممكن هي النقاط: A,B,C,D,E والتي احداثيتها كالتالي $A(O,0)$، $B(4,0)$، $C(4,3)$، $D(6,2)$، $E(0,6)$

* احداثيات النقطة C:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $3 \times 4 + 2x_2 = 18$، $2x_2 = 18 - 12$، $x_2 = 3$، $C(4,3)$

* احداثيات النقطة D:

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $3x_1 + 2 \times 6 = 18$، $3x_1 = 18 - 12$، $x_1 = 2$، $D(2,6)$

النتيجة	$Z=3x_1+2x_2$	X_2	X_1	النقطة
0	5×0+3×0	0	0	A(0,0)
12	3×4+2×0	0	4	B(4,0)
18	**3×4+2×3**	**3**	**4**	**C(4,3)**
18	**3×2+2×6**	**6**	**2**	**D (6, 2)**
12	3×0+2×6	6	0	E (0, 6)

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطتين، وتوضيحًا لما تم ذكره سابقًا فإن أي نقطة واقعة على الخط الواصل بين هاتين النقطتين سوف تعطينا نفس الأرباح فلو افترضنا مثلاً: "$x_1=3$"، سنجد "$x_2=4,5$" وبعد التعويض في دالة الهدف $3x_1 + 2x_2$ نجد $3 \times 3 + 2x_2 = 18$، $2x_2 = 18 - 3 \times 3$، $x_2 = 4,5$ والربح المحقق في هذه النقطة هو: $3 \times 3 + 2 \times 4,5 = 18$.

تقييم طريقة الرسم البياني:

بالرغم من بساطة الطريقة وسهولة تطبيقها على نماذج البرمجة الخطية إلى أنها يعاب عليها ما يلي:

- عدم دقة الرسم التي تسمح بإيجاد نقاط التقاطع بيانيا؛
- عند زيادة عدد القيود تجعل الرسم معقدًا أكثر؛
- تغيير إشارة المتباينات في القيود يؤثر دوما في تحديد منطقة الحلول الممكنة ؛
- أي تغيير في إشارة المتباينة في القيد فإنه يغير منطقة الحلول الممكنو وبالتالي تغيير القرار الإداري؛
- ليس دوما تكون نقطة تقاطع القيود هي الحل الأمثل إنما التي تحقق شرط دالة الهدف المرجو إما تعظيم الربح أو تقليل التكاليف.