

Chapitre 2

Transferts thermiques par conduction.

2.1 Introduction

On a vu au chapitre 1 que la conduction thermique est un mode de transmission de la chaleur dans la matière. La conduction concerne principalement les solides. En effet, bien que présente également dans les liquides et les gaz, elle y est le plus souvent négligeable par rapport à la convection et au rayonnement.

Nous allons introduire les questions essentielles à traiter dans un problème de conduction thermique, en nous appuyant sur l'exemple du système de chauffage de locaux par plancher chauffant électrique direct.

Dans ce mode de chauffage, l'émission de chaleur est produite par effet Joule dans un câble chauffant.

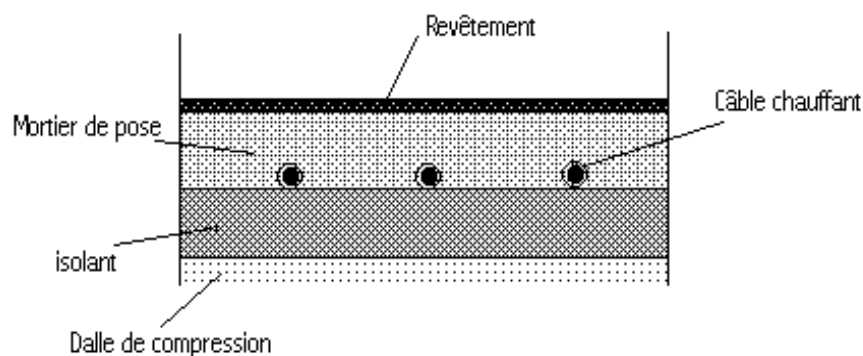


Figure 2.1 - Coupe d'un plancher chauffant électrique direct

Ce câble chauffant est disposé dans une chape d'enrobage, elle-même placée au dessus d'une couche de matériau isolant. Le rôle de cet isolant est très important, puisqu'il conditionnera la bonne répartition des flux de chaleur émis par le câble chauffant.

Le problème fondamental de la conduction est de trouver la température en tout point de l'épaisseur du plancher, ainsi que la puissance thermique échangée à travers sa surface, afin de résoudre les problèmes de dimensionnement suivants:

- a) Connaissant la puissance P à évacuer, déterminer les caractéristiques de la couche isolante pour qu'au moins 90% du flux de chaleur soit ascendant.
- b) Vérifier que la température de surface du plancher ne dépasse pas une limite réglementaire T_{\max} correspondant au confort optimal.

Ces deux problèmes concernent le régime permanent, dans lequel la température en chaque point du plancher est indépendante du temps, ce qui signifie que l'équilibre thermique entre l'énergie fournie au système et les déperditions est atteint.

Mais, il est parfois nécessaire de résoudre des problèmes thermocinétiques, c'est-à-dire en régime variable.

- c) On pourra par exemple être amené à vérifier que le temps de mise en température de confort d'un local déterminé n'excède pas une certaine durée contractuelle.

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de connaître le mécanisme local du phénomène. Nous verrons que ce mécanisme sera décrit par une équation, dite équation de la chaleur, liant entre elles les différentes grandeurs intervenant (la température T , le temps t , les variables d'espace x, y, z).

Parmi toute une famille de solutions possibles de l'équation précédente, il faudra retenir celle qui sera compatible avec le respect des conditions existantes aux limites du domaine étudié. Par exemple, la température de surface du câble chauffant doit demeurer constante et égale à une valeur spécifiée par le constructeur du câble.

De même, la répartition initiale de température dans le milieu étudié intervient également sur l'évolution ultérieure des températures dans ce milieu.

2.2 Concepts fondamentaux

2.2.1 Champs thermiques.

Nous venons de considérer un premier champ thermique, qui est un champ scalaire, celui des températures $T(M, t)$, où $M(x, y, z)$ désigne un point quelconque du plancher chauffant considéré. On a vu que ce champ de températures peut être permanent ou variable.

On appellera surface isotherme, le lieu des points M ayant la même température à un instant t .

Supposons que le câble chauffant de l'exemple précédent apporte au plancher une quantité de chaleur dQ pendant le temps dt .

Le flux thermique qui va se propager vers le local à chauffer est:

$$\Phi = dQ / dt \quad (2.1)$$

(Ce flux est une puissance exprimée en Watt).

Si on suppose la structure du plancher chauffant parfaitement uniforme, on peut se contenter de raisonner sur une surface de plancher unité, et ensuite les résultats obtenus pourront être étendus à toute la surface S de ce plancher.

On appellera densité de flux thermique, la puissance échangée par surface unité, c'est-à-dire la grandeur:

$$\varphi = dQ / S dt = \Phi / S \quad (2.2)$$

(Cette densité de flux thermique s'exprime en Watt/m²).

Mais notre hypothèse d'uniformité du plancher est sans doute trop simpliste. Aussi, renoncerons nous à considérer une seule densité de flux thermique φ valable en tout point de la surface S du plancher.

Il est nécessaire de passer à une description locale. Pour ce faire, introduisons un champ de vecteurs $\vec{\varphi}(M, t)$ représentant la densité *locale* du flux thermique en chaque point $M(x, y, z)$ du plancher chauffant.

Ce vecteur $\vec{\varphi}(M, t)$ caractérise en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur provoqué par la présence de la source interne.

Le module d'un tel vecteur a la dimension d'une puissance par unité de surface, et s'exprime en Watt/m².

Dans l'exemple qui nous sert de support de raisonnement, la direction du flux de chaleur ne fait guère de doute, parce que la géométrie étudiée n'est qu'à 2 dimensions. Mais il sera souvent nécessaire au thermicien de se pencher sur des problèmes en 3D. La direction du flux thermique en un point $M(x, y, z)$ sera alors en général quelconque.

Si alors, on envisage une surface élémentaire $d\mathbf{S}$ entourant le point $M(x, y, z)$, orienté par sa normale unitaire \vec{n} , la direction du flux de chaleur fera un angle α avec la normale \vec{n} , et le flux élémentaire de chaleur $d\Phi$ à travers la surface $d\mathbf{S}$ sera donné par l'expression:

$$d\Phi = \left| \vec{\varphi}(M, t) \right| \cos \alpha \, dS$$

Cette quantité représente une énergie par unité de temps, et s'exprime donc en Watt.

On peut faire un parallèle entre le champ de vecteurs *densité de flux* en thermique, et le champ de *vitesses* en mécanique des fluides. Pour chacun de ces deux champs de vecteurs, on peut définir des lignes de courant, qui sont les enveloppes des vecteurs considérés.

Dans chacune des deux disciplines, la mécanique des fluides et la thermique, l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de courant.

2.2.2 Loi de Fourier (1822)

Il existe une relation linéaire entre l'effet auquel on s'intéresse, c'est-à-dire la densité de flux thermique $\vec{\varphi}(M, t)$ et sa cause, qui est l'existence d'un gradient de température $\vec{grad} T$.

En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle au gradient de température, ce qui s'écrit:

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \vec{grad} T \quad (2.3)$$

Le coefficient de proportionnalité λ s'appelle la conductivité thermique du milieu.

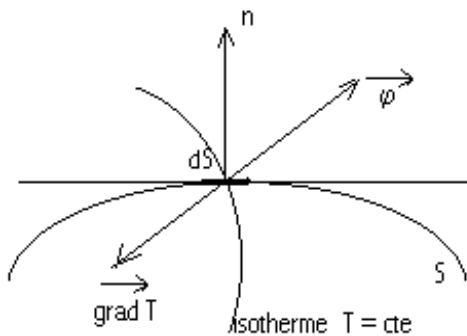
Pour un milieu isotrope et homogène, λ ne dépend que de la température T . Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante, λ comme une constante pour un milieu donné.

Par convention, $\vec{\varphi}(M, t)$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes. $\vec{grad} T$ est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à $\vec{\varphi}(M, t)$, d'où le signe moins de la loi de Fourier.

$\vec{\varphi}(M,t)$ et $\lambda \vec{\text{grad}} T$ s'expriment en W/m^2 . Il en résulte que la conductivité thermique λ s'exprimera en $\text{Watt}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$

2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

$$\vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$



En un point quelconque M du milieu, on a à tout instant:

$$dT = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$

Si on considère un déplacement élémentaire dM sur l'isotherme passant par M, le long de cette isotherme, on a:

$$dT = 0 = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$

Les vecteurs $\vec{\text{grad}} T$ et $d\vec{M}$ sont donc orthogonaux

Le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point.

Il en résulte que les lignes de courant, auxquelles les vecteurs 'densité de flux thermique' sont tangents, sont également normales aux surfaces isothermes.

Les parois d'un tube de courant sont par conséquent normales aux isothermes. Aucun flux ne les traverse donc. Ces parois sont dites adiabatiques.

Ainsi, en régime permanent, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant. Cette propriété est l'exacte analogie de la constance du débit dans un tube de courant en mécanique des fluides.

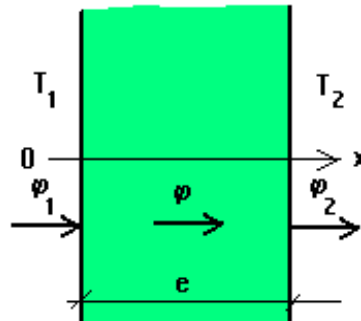
2.3 Conduction en régime permanent

Nous commencerons par raisonner, pour plus de clarté, dans le cadre d'un problème à une seule dimension.

Un tel problème unidimensionnel est connu sous le nom de problème du mur, c'est-à-dire d'un milieu limité par deux plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. Le gradient de température est par conséquent porté par cette normale. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces.

Un tel champ thermique est unidirectionnel. Dans ce cas, la température T n'est fonction que de l'abscisse x .

Considérons une paroi d'épaisseur e séparant deux domaines où règnent des températures respectives T_1 et T_2 , avec T_1 supérieure à T_2 .



Si le phénomène considéré est en régime permanent, les températures n'évoluent plus. C'est donc que l'on a atteint un régime d'équilibre entre l'apport de chaleur à travers la face chaude de la paroi, et la déperdition de chaleur à travers la face froide:

$$S \cdot \varphi_1 = S \cdot \varphi_2$$

Flux entrant = Flux sortant

Dans l'hypothèse d'un déséquilibre, si:

$$S \cdot \varphi_1 - S \cdot \varphi_2 = S \Delta \varphi > 0$$

la quantité de chaleur excédentaire $S \Delta \varphi$ accumulée chaque seconde dans la paroi, est liée aux caractéristiques physiques de cette paroi par l'expression:

$$S \Delta \varphi = \frac{m C_p \Delta T}{\Delta t} \tag{2.4}$$

et c'est cette accumulation de chaleur qui entraîne une augmentation de température de la paroi.

Par contre, en régime permanent, on a:

$$m C_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = 0$$

ce qui s'intègre immédiatement, pour donner le profil de température dans le mur, qui varie linéairement en fonction de x :

$$mC_p T(x) = ax + b$$

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on peut envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées à ce mur, selon la nature du problème physique à résoudre.

2.3.1 Mur simple à faces isothermes

L'une des configurations possibles est d'imaginer que chacune des parois est maintenue à une température constante et connue. Ce sera par exemple le cas pour une maison qu'on désire chauffer à une température intérieure T_1 pendant qu'il règne une température extérieure T_2 .

Pour $x = 0$, on aura : $m C_p T_1 = b$

et pour $x = e$: $m C_p T_2 = a e + b$

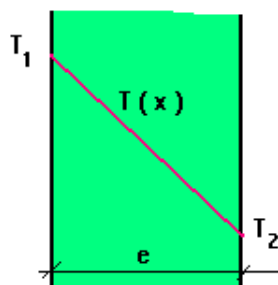
d'où on tire: $m C_p (T_2 - T_1) = a e$ et $a = m C_p (T_2 - T_1) / e$

Le profil de température dans la paroi a en définitive pour expression:

$$m C_p T(x) = m C_p x (T_2 - T_1) / e + m C_p T_1$$

soit encore: $T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) x / e$ (2.5)

Le profil de température est linéaire, avec un gradient égal à $-(T_1 - T_2) / e$



La densité de flux thermique à travers le mur est donnée par la loi de Fourier:

$$\varphi = - \lambda \, dT / dx$$

Le gradient étant constant, ce débit de chaleur a une valeur constante quelle que soit l'abscisse x dans la paroi. La température ne variera donc pas en fonction du temps. C'est le régime permanent.

$$\varphi = - \lambda (T_1 - T_2) / (x_1 - x_2)$$

soit:

$$\varphi = \lambda (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W/m^2) \quad (2.6)$$

Le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi est donc:

$$\Phi = S \varphi = \lambda S (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W) \quad (2.7)$$

On voit qu'il existe une relation de proportionnalité entre le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi et la différence de température $T_1 - T_2$:

$$T_1 - T_2 = (e / \lambda S) \Phi = R \Phi \quad (2.8)$$

La forme du coefficient de proportionnalité R rappelle l'expression donnant la résistance R d'un conducteur électrique de longueur e , de section S et de résistivité $\rho = 1 / \lambda$.

(L'inverse de la conductivité est la résistivité)

De même l'expression $T_1 - T_2 = R \Phi$ suggère un rapprochement avec la loi d'Ohm

$$U_1 - U_2 = R I$$

Pour ces deux raisons, le coefficient R de la relation $T_1 - T_2 = R \Phi$ est appelé **la résistance thermique** de la paroi considérée.

La résistance thermique s'exprime en Kelvin/Watt (K/W) ou en °C/W

Nous verrons tout au long de ce chapitre que l'application des lois de l'électricité concernant l'association en série ou en parallèle de ces résistances thermiques, constitue une méthode simple et commode de résolution de très nombreux problèmes thermiques en régime permanent.

2.3.2 Paroi en contact avec deux fluides

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on a vu que l'on pouvait envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées au mur.

Considérons maintenant une paroi d'épaisseur e en contact avec deux fluides de températures constantes T_{∞_1} et T_{∞_2} . Entre chacun des fluides et la paroi, il s'établit un échange convectif, les températures respectives de chacune des deux faces de la paroi étant T_1 et T_2 .

Il s'agit alors d'un problème dit mixte, combinant deux modes de transmission de la chaleur: la convection et la conduction.

Le problème étant unidimensionnel, la conservation du flux thermique (stationnarité du problème), se traduit par l'égalité des flux :

- Φ_1 , cédé par le fluide chaud à la paroi (convection)
- Φ , traversant la paroi (conduction)
- Φ_2 , cédé par la paroi au fluide froid (convection)

On a vu qu'on avait:

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty_1} - T_1) \quad (2.9)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty_2}) \quad (2.10)$$

où h_1 et h_2 sont deux coefficients d'échange s'exprimant en $W / (m^2 \cdot ^\circ C)$.

Quant au flux dans la paroi elle-même, on a déjà montré qu'il était égal à:

$$\Phi = \lambda S (T_1 - T_2) / e$$

On a donc:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_1)/(1/h_1 S) = (T_1 - T_2)/(e/\lambda S) = (T_2 - T_{\infty_2})/(1/h_2 S) \quad (2.11)$$

Ces expressions suggèrent de définir des résistances thermiques convectives:

$$R_{C1} = 1 / h_1 S \quad (2.12)$$

$$R_{C2} = 1 / h_2 S \quad (2.13)$$

qui s'expriment en $^\circ C/W$ comme la résistance thermique de conduction $R = e / \lambda S$ définie au § 2.3.1

L'équation (2.11) permet d'exprimer le flux échangé entre les fluides repérés par les indices (1) et (2) en fonction des températures de ces fluides, des caractéristiques de la paroi qui les sépare, et de deux coefficients d'échange convectif:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + R + R_{c2}) \quad (2.14)$$

Cette relation traduit la loi (2.8):

$$T_1 - T_2 = R \cdot \Phi$$

pour les trois résistances R_{c1} , R et R_{c2} en série.

Par analogie avec les relations (2.9) et (2.10) qui expriment le flux transmis en fonction de l'écart de température:

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty_1} - T_1)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty_2})$$

on peut exprimer la relation (2.14) sous la forme:

$$\Phi = k S (T_{\infty_1} - T_{\infty_2})$$

dans laquelle k désigne un coefficient global d'échange entre les deux fluides, coefficient k qui a pour expression:

$$K = 1 / (R_{c1} + R + R_{c2}) S \quad (2.15)$$

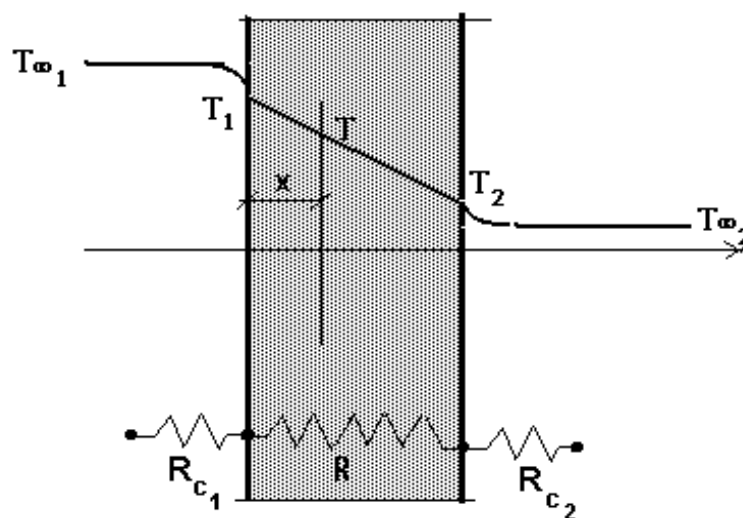


Figure 2.2 - Transfert de chaleur entre deux fluides de part et d'autre d'une paroi.

La température en un point d'abscisse x (voir figure 4) est donnée par la relation:

$$T_{\infty_1} - T(x) = [R_{c1} + R(x)] \Phi$$

où:

$$R(x) = x / \lambda S$$

En remplaçant Φ par l'expression (2.14) , il vient:

$$T(x) = T_{\infty_1} - [R_{c1} + x/\lambda S] (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + R + R_{c2}) \quad (2.16)$$

2.3.3 Paroi multicouches en contact avec deux fluides

Ce sera par exemple le cas d'une paroi de four composée de deux couches.

Nous nous appuyerons sur un exemple concret, afin de donner une idée des ordres de grandeurs .

La première couche est un garnissage en briques réfractaires (épaisseur $e_1 = 0,20$ m, conductivité $\lambda_1 = 1,38$ W/(m . °C)), la seconde est un isolant fibreux (épaisseur $e_2 = 0,10$ m, conductivité $\lambda_2 = 0,17$ W/(m . °C)).

Nous supposons que le contact est parfait entre les deux couches.

Par un raisonnement identique au précédent, on obtient de même:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + \sum R_i + R_{c2}) \quad (2.17)$$

avec:

$$R_i = e_i / \lambda_i S$$

et:

$$T(x) = T_{\infty_1} - [R_{c1} + \sum R_i + x/\lambda_i S] (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + \sum R_i + R_{c2}) \quad (2.18)$$

Appliquons ces résultats au four de traitement thermique dont les caractéristiques des parois ont été données au début de ce paragraphe.

La température de traitement à l'intérieur du four, T_{∞_1} , est de 1 650 °C, et le coefficient h_1 d'échange sur la face intérieure vaut 70 W / (m² . °C).

La température de l'air ambiant, T_{∞_2} , est de 25°C, et le coefficient h_2 d'échange sur la face extérieure vaut 10 W / (m² . °C).

Calculer les pertes de chaleur par m^2 de surface de paroi, les températures des faces intérieures et extérieures, et celle de l'interface entre le briquetage et l'isolant.

Les pertes sont données par la relation (2.17):

$$\varphi = \Phi / S = (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) / [R_{c1} + R_1 + R_2 + R_{c2}] S$$

avec :

$$R_{c1} = 1 / h_1 = 0,0143 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_1 = e_1 / \lambda_1 = 0,1449 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_2 = e_2 / \lambda_2 = 0,5882 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_{c2} = 1 / h_2 = 0,100 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

Soit $\varphi = 1916 \text{ W} / \text{m}^2$

La température de la paroi interne est fournie par la relation:

$$T_{\infty 1} - T_1 = (1 / h_1) \varphi = 0,0143 \cdot 1916 = 27,4 \text{ °C} \text{ d'où } T_1 = 1622,6 \text{ °C}$$

Cette température est peu différente de celle de l'atmosphère interne du four de traitement.

La température de l'interface entre les deux couches est obtenue de la même manière:

$$T_1 - T' = (e_1 / \lambda_1) \varphi \text{ soit } T' = 1344,6 \text{ °C}$$

La température de la face externe de la paroi du four vaut:

$$T_2 = T_{\infty 2} + (1 / h_2) \varphi = 216,6 \text{ °C}$$

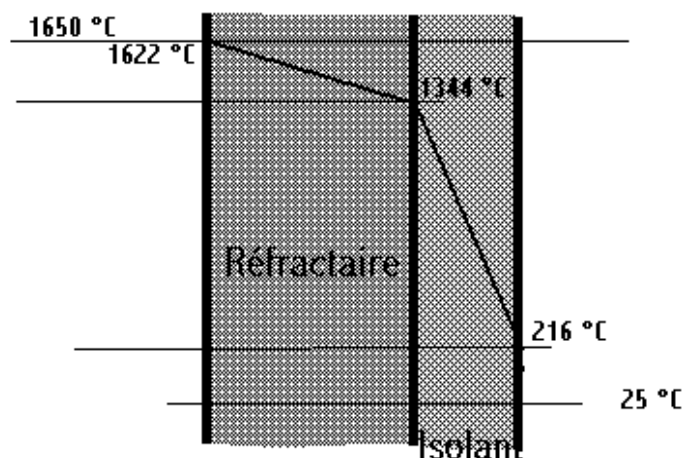


Figure 2.3 - Évolution de la température dans la paroi d'un four

2.4 Cas général: Équation de la chaleur

2.4.1 Bilan énergétique

Après avoir commencé par traiter le cas unidimensionnel en régime permanent, nous allons maintenant établir le bilan thermique d'une quantité de matière à l'état solide, contenue dans un volume fini v , délimité par une surface s , appartenant à un milieu en trois dimensions.

La substance considérée a des caractéristiques thermiques décrites par sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ . Nous supposons que les grandeurs c et λ ne dépendent ni de l'espace (substance homogène), ni de la température (approximation valable tant que les écarts de température ne sont pas trop importants).

Nous supposons en outre que le volume v contient des sources internes dégageant de la chaleur avec une puissance volumique p (par effet Joule par exemple).

Si le phénomène considéré n'est pas en régime permanent, mais en régime variable, cela signifie que l'échange de chaleur à travers la surface s provoque une variation de la quantité de chaleur accumulée dans le volume v .

La puissance thermique reçue (algébriquement) par le volume v a pour expression:

$$\Phi = - \iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds \quad (2.19)$$

Il faut y ajouter la puissance dégagée dans le volume v par les sources internes, soit:

$$\iiint p dv \quad (2.20)$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la substance contenue dans le volume v emmagasine donc une quantité de chaleur Φdt , qui va provoquer une variation de température ∂T , dépendant de capacité thermique massique c .

Comme on raisonne sur l'unité de volume, il est nécessaire d'introduire la capacité thermique volumique égale à ρc .

On aura donc:
$$\Phi dt = \iiint \rho c \partial T dv$$

soit en tenant compte des expressions (2.19) et (2.20):

$$-\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds + \iiint p \, dv = \iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \, dv \quad (2.21)$$

La formule d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume:

$$\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint \operatorname{div}(\vec{\varphi}) \, dv \quad (2.22)$$

En combinant les équations (2.21) et (2.22), on obtient alors:

$$\iiint \left[-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0$$

Le volume v considéré étant arbitraire, le bilan thermique instantané s'exprime localement en chaque point M du volume considéré par:

$$-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

2.4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope

Si on tient maintenant compte de la Loi de Fourier (2.3):

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T$$

le bilan (2.23) devient:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire finalement:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

qui constitue l'équation de la chaleur.

On écrit souvent cette équation sous la forme:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

en introduisant le paramètre:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.26)$$

a est la *diffusivité thermique* de la substance considérée.

Cette définition conduit à l'équation aux dimensions suivantes:

$$[a] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]}$$

soit:

$$[a] = \frac{[ML^2T^{-3} L^{-1}\Theta^{-1}]}{[ML^{-3}][ML^2T^{-2} M^{-1}\Theta^{-1}]}$$

c'est-à-dire:

$$[a] = L^2T^{-1}$$

La diffusivité thermique d'un solide s'exprime en m^2/s , comme la viscosité cinématique d'un fluide.

2.4.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation de la chaleur prend des formes différentes.

(a) *Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T = 0 \tag{2.27}$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0 \tag{2.28}$$

C'est l'équation de Laplace.

(b) *Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0 \tag{2.29}$$

C'est l'équation de Poisson.

(c) *Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.30)$$

C'est l'équation de Fourier.

2.5 Applications pratiques

2.5.1 conduction de la chaleur en régime permanent sans effet de chaleur interne.

Exercice1 :

Le mur d'un four est composé de deux couches :

- La première en brique réfractaire (épaisseur $e_1 = 20 \text{ cm}$, $R_1 = 1.38 \text{ w/m.k}$)
- La deuxième en brique isolante (épaisseur $e_2 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 0.17 \text{ w/m.k}$)

En donne :

- Température à l'intérieur du four : $\theta_i = 1650 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Coefficient d'échange sur la paroi intérieure : $h_i = 70 \text{ w/m}^2.\text{k}$.
- Température extérieure ambiante : $\theta_e = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Coefficient de convection à l'extérieur du four : $h_e = 10 \text{ w/m}^2.\text{k}$.

Calculer :

1. les pertes thermiques par m^2 de surface mur.
2. les températures des parois interne et externe.
3. la température de l'interface.
4. les gradients thermiques dans chaque paroi.

A.N :

$$\varphi = 1918 \text{ w/m}^2, \theta_{i1} = 1623 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_{i2} = 1345 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_{e2} = 217 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_e = 25 \text{ }^\circ\text{C}, \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -1390 \text{ }^\circ\text{C/m},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -11280 \text{ }^\circ\text{C/m}.$$

Exercice2 :

Déterminer les déperditions thermiques à travers 1 m^2 d'une surface vitrée dans les deux cas suivants :

1. vitrage simple d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$.
2. vitrage double de deux lames de verre ($e = 4 \text{ mm}$) coinçant une lame d'air d'épaisseur 6 mm .

On donne :

1. coefficient d'échange convectif : $h = 12 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
2. conductivité thermique du verre : $\lambda_v = 0.8 \text{ w/m.k}$.
3. conductivité thermique de l'air : $\lambda_a = 0.024 \text{ w/m.k}$.
4. température de l'air intérieur : $\theta_i = 20^\circ \text{C}$.
5. température de l'air extérieur : $\theta_e = 0^\circ \text{C}$.

A.N :

$$\varphi_1 = 116 \text{ w/m}^2, \varphi_2 = 47 \text{ w/m}^2$$

Exercice3 :

Considérons un mur composite formé de 4 couches successives:

- La première en plâtre d'épaisseur 5 cm .
- La deuxième en béton d'épaisseur 5 cm .
- La troisième formée de morceaux de brique séparés verticalement par des lames d'air.
- Et la quatrième en béton d'épaisseur 10 cm .

On donne :

- Coefficient de convection coté extérieur : $h_e = 20 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
- Coefficient de convection coté intérieur : $h_i = 10 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
- Température de l'air extérieur : $\theta_e = -10^\circ \text{C}$
- Température de l'air intérieur : $\theta_i = 23^\circ \text{C}$
- Conductivités thermiques (en w/m.k)

Brique : 2, plâtre : 0.46, béton : 1.16, air : 0.024.

Calculer

1. La résistance thermique (relative à un mètre carré de mur).
2. la densité de flux à travers le mur.

A.N :

$$R = 0.553 \text{ k/w}, \varphi = 59,6 \text{ w/m}^2$$

Exercice 4 : Conduction stationnaire dans un corps de section variable.

On se propose de traiter le cas de la conduction de chaleur en régime permanent à travers une pièce ayant la forme d'un tronc de cône (de sommet 90°), parfaitement isolée de l'extérieur par sa surface latérale conique. La petite base S_1 et la grande base S_2 de ce corps sont hypothèses :

- conductivité thermique du matériau supposée constante.
- Flux de chaleur supposé unidimensionnel parallèle à l'axe Ox.

On donne :

- Température de la petite base : $\theta_1 = 30^\circ C$
- Température de la grande base : $\theta_2 = 60^\circ C$
- Conductivité thermique de matériau (acier) : $\lambda = 45 \text{ kcal} / \text{h.m.k}$
- Rayon de la petite base : $a = 4 \text{ cm}$
- Rayon de la grande base : $h = 9 \text{ cm}$

Calculer :

1. la distribution de température $\theta(x)$ dans le corps.
2. le flux thermique Φ .

A.N :

$$R = 0.0847 \text{ k/w}, \Phi = -354 \text{ w}$$

Exercice 5 : Corps à conductivité variable avec la température.

Soit une couche plane d'épaisseur e et dont les 2 faces sont maintenues à des températures constantes et uniformes θ_1 et θ_2 , en régime stationnaire. On suppose que λ est une fonction linéaire de θ sur l'intervalle $[\theta_2, \theta_1]$ de la forme $\lambda = \lambda_0(1 + \alpha\theta)$ (θ en $^\circ C$) calculer :

1. l'équation donnant la variation de température $\theta(x)$, et le flux Φ .

Application :

Un mur plan d'épaisseur $e = 3 \text{ cm}$ laisse passer une densité de flux $\varphi = 6 \text{ kw} / \text{m}^2$. On mesure la température sur chacune des faces et dans le plan médian du mur. On trouve respectivement $150^\circ C$, $38^\circ C$ et $80^\circ C$.

Déterminer l'expression de λ en fonction de la température. Si l'on admet qu'une relation linéaire est valable sur l'intervalle $[38, 150^\circ C]$.

A.N :

$$K = 0.03(1 + 0.005\theta) \text{ w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$$

Exercice 6 : mesure de la conductivité thermique d'un matériau.

On détermine la conductivité thermique λ_2 d'un corps par la méthode de comparaison. On utilise une plaque de cuivre ($\lambda_1 = 376$) d'épaisseur $e_1 = 20 \text{ mm}$, et une plaque du corps d'épaisseur $e_2 = 3 \text{ mm}$.

Quand l'état stationnaire est atteint, on note :

$$\theta_1 = 25.35^\circ C \quad \theta_2 = 20.15^\circ C \quad \theta_3 = 11.07^\circ C$$

- calculer λ_2
- avec quelle approximation est-elle connue, si l'on admet que :
 1. λ_1 est connue exactement.
 2. les épaisseur des plaques ont été mesurées à $1/20 \text{ mm}$ près.
 3. et sur chaque lecture thermométrique, on peut faire une erreur de $1/100$ de degré.

A.N :

$$K_2 = 32.3 \pm 0.8 \text{ w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$$

Exercice 7 :

Un réservoir sphérique a un diamètre intérieur $d = 1\text{ m}$. Il est formé d'une couche de matériau d'épaisseur $e = 10\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-3}\text{ w/cm.dg}$. On donne :
température du réservoir $\theta_0 = -80\text{ }^\circ\text{C}$

- température du milieu ambiant $\theta_1 = 20\text{ }^\circ\text{C}$
- la surface extérieure échange de la chaleur convection et rayonnement avec le milieu ambiant à raison de $h = 14\text{ w/m}^2.\text{dg}$. Calculer :
- la température de la surface extérieure du réservoir.
- Le flux de chaleur Φ entrant dans le réservoir.

A.N :

$$\Phi = 874.6\text{ w}, \theta_1 = 68.9\text{ }^\circ\text{C}, \theta_2 = 66.3\text{ }^\circ\text{C}$$

2.5.2 Conduction de la chaleur en régime permanent avec effet de chaleur interne.

Exercice 1 :

Une ligne électrique de diamètre 2.5 cm est destinée à transporter sous haute tension, un courant de 1000 A. sachant que la résistance électrique de la ligne est de $0.06\ \Omega/\text{km}$, que l'air ambiant est à $30\text{ }^\circ\text{C}$, et que le coefficient de convection - rayonnement est de $18\text{ w/m}^2.\text{k}$.

Calculer :

1. la valeur de la source interne de chaleur supposée uniforme.
2. la température en surface de la ligne électrique.
3. la température maximale dans une section droite donnée.

Conductivité moyenne étant de 381 w/m.k

A.N :

$$P = 1.2210^5\text{ w/m}^3, \theta_1 = 72\text{ }^\circ\text{C}, \theta_{\max} = 72.1\text{ }^\circ\text{C}$$

Exercice 2 :

Un mur de 5 cm d'épaisseur et de conductivité $\lambda = 5\text{ w/m.k}$ dégage de la chaleur uniformément au taux de 1 w/cm^3 . Une face est parfaitement isolée tandis que l'autre est soumise à une condition de Fourier (convection) par un fluide à $40\text{ }^\circ\text{C}$ et un coefficient de passage $h = 250\text{ w/m}^2.\text{k}$. Calculer :

1. la température maximale rencontrée dans le mur
2. la densité de flux à travers les 2 faces du mur.

A.N :

$$\theta_{\max} = 490\text{ }^\circ\text{C}, \varphi_0 = 0\text{ w/m}^2, \varphi_2 = 5 \cdot 10^4\text{ w/m}^2$$

Exercice 3 : étude thermique d'un élément de réacteur nucléaire.

- Soit un réacteur nucléaire dont les éléments de combustible, sont des cylindres pleins de rayon $R = 14.5 \text{ mm}$. On considère le dégagement de chaleur constant dans tout le volume d'un élément et égal à $P = 700 \text{ w/cm}^3$. On donne : $\lambda = 1.25 \text{ w/cm.k}$
 1. établir la formule donnant $\theta(r)$, en tout point intérieur du barreau.
 2. Evaluer la différence $\theta_m - \theta_1$
 θ_m : Température maximale atteinte dans le barreau.
 θ_1 : Température de la surface extérieur.
- On remplace maintenant l'élément plein par un élément annulaire de même rayon extérieur et de rayon intérieur 11 mm.

On admettra qu'aucune chaleur ne s'échappe par l'intérieur de l'anneau.

1. établir la formule donnant $\theta(r)$ en tout point de l'anneau.
calculer $\theta_m - \theta_2$. (θ_m : Température maximale atteinte)
2. calculer la densité de flux à travers la surface extérieure du combustible.
3. le bureau est entouré d'une gaine parfaitement adhérente d'aluminium de 1mm d'épaisseur.
($\lambda = 2.03 \text{ w/cm.k}$)

Calculer la variation $(\theta(r) - \theta_2)$ dans la gaine d'aluminium.

A.N :

$$\theta_m - \theta_1 = 145 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_m - \theta_2 = \frac{\phi R_1}{\lambda} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

Exercice 4 : Source de chaleur dépendant de la position.

On considère une plaque pleine d'épaisseur l , de température de surface θ_0 et θ_1 , et soumise sur face $x = 0$, à un flux de rayons gamma conduisant à une production de chaleur $p(x) = p_0 \exp(-\mu x)$.

p_0 : Valeur de $p(x)$ en surface, μ : Coefficient d'absorption (dépend de l'énergie du rayonnement considéré et de la nature de l'élément absorbant).

Calculer :

- le profil de températures dans la plaque, et la densité de flux à travers les 2 faces $x = 0$ et $x = l$.

2.5.3 Conduction dans les ailettes

Exercice1 :

Un tube d'échangeur de 2.5 cm de diamètre est équipé de 20 ailettes droites, placées longitudinalement le long du tube s'étendant jusqu'à 2.5 cm dans la direction radiale. Les ailettes sont en acier et d'épaisseur 1.5 mm ($\lambda = 46 \text{ w/m.k}$).

La température de fluide extérieur est de 20°C , et la température de la paroi est de 100°C .

1. pour quelle valeur de h coefficient de convection, ces ailettes cessent-elles d'être utiles ?
2. calculer : pour un coefficient $h = 50 \text{ w/m}^2\text{k}$

- le rendement de chaque ailette
- le flux échangé par mètre de longueur par chaque ailette.
- le flux total échangé par mètre de longueur du tube, et le comparer avec le flux échanger par le tube sans ailettes.

A.N :

$$h = 61330 \text{ w} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{k}^{-1}, \quad \eta = 0.79, \quad \Phi_1 = 3294 \text{ w}, \quad \Phi_2 = 314 \text{ w}$$

Exercice2 :

On allonge dans un feu un tisonnier en acier de 1 cm de diamètre dont le manche est en bois (supposé donc parfaitement isolé). Le bout chaud du tisonnier est à $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$ tandis que l'air ambiant est $\theta_a = 60^\circ\text{C}$ le coefficient de convection rayonnement entre le tisonnier et l'air est $h = 30 \text{ w}/\text{m}^2 \cdot \text{k}$.

Sachant que la longueur nette (sans le manche) du tisonnier est de $l = 35 \text{ cm}$ et que la conductivité de l'acier est $\lambda = 50 \text{ w}/\text{m} \cdot \text{k}$, calculer :

1. la température $\theta(l)$ de l'acier au bout froid du tisonnier.
2. le flux total évacué par la tige.

A.N :

$$\theta_L = 62.99^\circ\text{C}, \quad \Phi = 20.7 \text{ w}$$

Exercice3 :

On considère un écoulement de gaz à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayons intérieur $r_1 = 100 \text{ mm}$ et extérieur $r_2 = 104 \text{ mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 10 \text{ w}/\text{m} \cdot \text{dg}$

1. on suppose la température de paroi uniforme ($\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_p$). On donne : températures des fluides $\theta_i = 320^\circ\text{C}$, $\theta_e = 20^\circ\text{C}$, $l = 10 \text{ cm}$, $d_1 = 3 \text{ mm}$, $d_2 = 7 \text{ mm}$

Coefficient de convection : $h_i = 20 \text{ w}/\text{m}^2 \cdot \text{dg}$, $h_e = 5 \text{ w}/\text{m}^2 \cdot \text{dg}$. Calculer :

- la température de la paroi θ_p , le flux évacué par unité de longueur de cylindre, et l'erreur $\delta\theta_p$ commise en supposant $\theta_p \approx \text{cte}$.
- 2. on veut isoler cette canalisation. Quelle épaisseur minimum de calorifuge ($\lambda = 0.6 \text{ w}/\text{m} \cdot \text{k}$) devra t on mettre pour isoler la conduite ?
- 3. on veut mesurer la température intérieure du gaz. On introduit un thermocouple entouré d'un doigt de gant formé du même métal que la paroi. quelle est la θ^0 donnée par le thermocouple ?

A.N :

$$\theta_p = 258^\circ\text{C}, \quad \Phi = 20.7 \text{ w}, \quad e_m = 0.139 \text{ m}, \quad \theta_L = 317^\circ\text{C}$$

Exercice 4 :

Une canalisation en acier de température $\theta_0 = 160^\circ\text{C}$ (l'extérieure de paroi) est suspendue à un plafond par une barre en acier de section $10 * 50 \text{ mm}^2$. Et de longueur $l = 50 \text{ cm}$.

En admettant que l'extrémité coté maçonnerie est isolée thermiquement

- Evaluer : - le flux dissipé par cette barre. $h = 15 \text{ w}/\text{m}^2 \cdot \text{k}$, ($\lambda = 40 \text{ w}/\text{m} \cdot \text{k}$), $\theta_e = 40^\circ\text{C}$
- la température à l'extrémité de la barre.

- Et son rendement thermique.

A.N :

$$\Phi = 24.4 \text{ w}, \theta_L = 42.9 \text{ }^\circ\text{C}, \eta = 0.226.$$

2.5. 4 Conduction en régime variable.

Exercice1 :

Une plaque métallique à température initiale uniforme de $230 \text{ }^\circ\text{C}$, a une face ($x = 0$) brusquement portée à $65 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculez le temps nécessaire pour que la température à une profondeur $x = 38 \text{ mm}$, atteigne $120 \text{ }^\circ\text{C}$.

Quelle quantité de chaleur a été retirée de la plaque pendant ce temps on donne :

$$a = 0.86 \text{ cm}^2/\text{s}, \lambda = 200 \text{ w/m.dg} \text{ épaisseur de la plaque } e = 30 \text{ cm}$$

A.N :

$$q = -2.65 \cdot 10^7 \text{ J/m}^2$$

Exercice2 :

En plonge dans un bain de glace un cylindre d'aluminium, de diamètre 2.5 cm . Préalablement chauffé à une température uniforme $\theta_0 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$. Après 5 minutes, La température du cylindre est de $5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Estimer la valeur de coefficient de convection h supposé constant entre cylindre et bain de glace.

$$\text{On donne } \lambda = 230 \text{ w/m.dg}, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, c = 900 \text{ J/kg.dg}$$

A.N :

$$h = 105 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Exercice 3 :

Un plaque de 10 cm d'épaisseur initialement à une température uniforme de $500 \text{ }^\circ\text{C}$ est plongé dans un bain de liquide à $100 \text{ }^\circ\text{C}$ (trempe, $h = 5000 \text{ w/m}^2$). Calculer le temps nécessaire pour que le plan médian atteigne la température de $280 \text{ }^\circ\text{C}$.

A ce moment, quelle est la température à une profondeur de 0.5 cm ?

$$\text{On donne } \lambda = 1 \text{ w/m.dg}, a = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

A.N :

$$\tau = 100 \text{ S}, \theta(x, t) = 128 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Exercice 4 :

On soumet un mur d'acier épais a une température à une condition de densité de flux constante à sa surface $\varphi_0 = 325 \text{ kw/m}^2$. Le mur était initialement à température uniforme $\theta_i = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculer au bout de 30 secondes :

- La température à une profondeur $x = 2.5 \text{ cm}$.
- La température en surface.

- La quantité de chaleur absorbée par m^2 de surface.

On donne $\lambda = 46 \text{ w/m.dg}$, $a = 0.145 \text{ cm}^2 / \text{s}$

Exercice 5 :

Déterminer la profondeur minimale à laquelle on doit enterrer une conduite d'eau pour que celle-ci ne gèle pas dans les conditions suivantes :

- Le sol est à une température initiale uniforme $\theta_i = 5 \text{ }^\circ\text{C}$
- La température à la surface de sol chute brusquement à $-15 \text{ }^\circ\text{C}$ et se maintient à ce niveau pendant 15 jours.

Calculer la quantité de chaleur perdue par m^2 de surface du sol au bout de ce temps.

On donne : diffusivité thermique de sol : $a = 0.28 \text{ mm}^2 / \text{s}$

Effusivité thermique de sol $b = 800 \text{ J/m}^2\text{k}\cdot\sqrt{\text{s}}$.

A.N :

$$q = -2 \cdot 10^7 \text{ J/m}^2$$