من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نلاحظ أنه لما $a\geq 3{,}62$، فإن: $p(0<Z<a) = 0{,}9999$، فمثلا:

$$p(0<Z<3{,}62) = p(0<Z<3{,}7) = p(0<Z<4) = p(0<Z<7{,}2) = \cdots = 0{,}9999$$

ونشير إلى أن الاحتمال عند قيمة معينة يساوي صفر، وبالتالي ينتج عن ذلك، أنه من أجل كل عددين حقيقيين a، b، فإن: $p(a \leq X \leq a) = p(a<X \leq a) = p(a \leq X<a) = p(a<X<a)$

3.1. تقريب التوزيعات الاحتمالية:

أ- تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي:

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي، وذلك لأنه إذا تحققت مجموعة من الشروط في التجربة الاحتمالية التي تتبع توزيع ذي الحدين، فإنه عند استخدام قانون ذي الحدين تكون العمليات الحسابية صعبة جدا في الغالب، وفي نفس الوقت فإن استخدام قانون التوزيع الطبيعي في هذه الشروط يعطي نتائج مشابهة وقريبة جدا من قانون ذي الحدين، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي، وذلك عندما تكون n كبيرة، و p تقترب من 0,5، وكقاعدة فعموما يعتبر التقريب ملائم إذا توفرت الشروط الآتية*: $n\geq 30$، $np\geq 5$، $n(1-p)\geq 5$، حيث يكون: $\mu = E(X) = np$ $\sigma^2 = V(X) = npq$

مثال: نفرض أنه عندنا تجربة احتمالية مكررة تتمثل في رمي قطعة نقود 33 مرة، حيث احتمال أن يظهر وجه في كل تجربة هو 0,6، واحتمال الظهر هو 0,4، وأن X هو متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه التي يمكن أن تظهر، ونريد حساب احتمال أن يظهر الوجه أكثر من 14 مرة.

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحد، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية تكون صعبة جدا: $p(X>14) = p(15) + p(16) + \cdots + p(33)$

$$= C_{33}^{14} \times (0{,}6)^{14} \times (0{,}4)^{19} + \cdots$$

نلاحظ أنه يصعب القيام بالعمليات الحسابية لحساب هذا الاحتمال، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث:

* في بعض المراجع قد يتم صياغة هذه الشروط بكيفيات أخرى، والمهم هو مراعاة أنه كلما تحققت الشروط أكثر كلما كان التقريب أصح وأدق.

$nq=33\times0{,}4 = 13{,}2\geq5$ ، $np= 33\times0{,}6 = 19{,}8\geq5$ ، $n=33\geq30$

وعند استخدام التوزيع الطبيعي، بحيث: $\mu = np = 19{,}8$ ، $\sigma^2 = npq = 7{,}92$، وعند القيام بتصحيح الاستمرارية (أنظر معنى تصحيح الاستمرارية في الأسفل)، يصبح الاحتمال المطلوب هو $p(X>14{,}5)$، ويتم حسابه كالآتي:

$$\begin{aligned} p(X>14{,}5) &= p\left(Z>\frac{14{,}5-19{,}8}{\sqrt{7{,}92}}\right) \\ &= p(Z>-1{,}88) \\ &= p(-1{,}88<Z<0) + p(0<Z<+\infty) \\ &= p(0<Z<1{,}88) + p(0<Z<+\infty) = 0{,}4699 + 0{,}5 = 0{,}9699 \end{aligned}$$

ب-**تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي**: يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، وهذا إذا كان: $\lambda\geq10$، حيث يكون: $\sigma^2 = \mu = \lambda$

ت- **تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون**: يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحد، ويعتبر كتقريب جيد عندما تكون قيمة p صغيرة جدا، وn كبيرة جدا، بحيث يكون: $n\geq30$، $np\leq5$.

ث- **تصحيح الاستمرارية عند الانتقال من توزيع متقطع إلى مستمر**:

نشير إلى أنه بصفة عامة عند تقريب توزيع احتمالي متقطع إلى توزيع احتمالي مستمر فإنه ينبغي القيام **بتصحيح الاستمرارية***، وذلك لأنه سيتم الانتقال من متغيرة عشوائية متقطعة إلى متغيرة عشوائية مستمرة، لذلك يتم تحويل كل قيمة للمتغير العشوائي إلى مجال، لأن في التوزيع المستمر يكون احتمال قيمة معينة هو الصفر، وتتم عملية التحويل بحيث نزيل التقطع والانفصال بين القيم (أعداد طبيعية)، ويكون ذلك بإضافة 0,5 وإنقاص 0,5 لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المتقطع، فنفرض مثلا أن قيم المتغير العشوائي المتقطع، هي {1، 2 ، 3}، فتصبح مجالات المتغير العشوائي المستمر هي {0,5-1,5 ، 1,5-2,5 – 2,5-3,5}، وبالتالي نلاحظ أنه أصبحت هناك استمرارية، أي أنه في الحالة العامة عندما يكون المتغير العشوائي يساوي قيمة a، فإنه يتم استبدال هذه القيمة بالمجال: $[(a-0{,}5)-(a+0{,}5)]$

إذن ففي التوزيعات التي تم دراستها، فإنه عند تقريب توزيع ثنائي الحد أو توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي، فإنه ينبغي القيام بتصحيح الاستمرارية، والتي تتضمن إضافة أو إنقاص 0,5، على حسب الحالة، ففي الحالة

* بعض المراجع قد يغفل عن فكرة تصحيح الاستمرارية ولا يأخذ بها.

العامة يكون ذلك كالآتي: $\boldsymbol{p(X=a)} = p(a-0,5 \le X \le a+0,5)$

$$\boldsymbol{p(X<a)} = p(X<[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X<a-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X \le a)} = p(X \le [(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X \le a+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X>a)} = p(X>[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X>a+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X\ge a)} = p(X\ge[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X\ge a-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a<X<b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)]<X<[(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a+0.5<X<b-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a \le X \le b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)] \le X \le [(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a-0.5 \le X \le b+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a<X \le b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)]<X \le [(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a+0.5<X \le b+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a \le X<b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)] \le X<[(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a-0.5 \le X<b-0,5)$$

وكما تم الإشارة إليه سابقا، فإننا نذكر مرة أخرى، أنه في حالة عندنا تجربة تتبع توزيع مستمر في الأصل، أو تتبع توزيع متقطع وقمنا بتقريبها لتوزيع مستمر، فإنه يكون عندنا احتمال مجال فقط، ولا يكون عندنا احتمال قيمة معينة، لأن الاحتمال عند قيمة معينة يساوي صفر، أي: $p(X=a)=0$، وبالتالي ينتج عن هذا في الحالة العامة عند التوزيع المستمر يكون: $p(a \le X \le b) = p(a<X \le b) = p(a \le X<b) = p(a<X<b)$

أي أنه في حالة التوزيعات المستمرة (مثل التوزيع الطبيعي)، فإنه عند حساب الاحتمال في مجال معين، فإنه لا يهم أن يكون مغلق أو مفتوح من أحد الطرفين أو كلاهما، لأن النتيجة ستكون نفسها.