تمارين محلولة

التمرين 1: نرمي حجرة نرد. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X هو ضعف الرقم الذي يظهر على الوجه.

أ– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ب– حدد تابع توزيع المتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ج– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ– تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي :

لدينا عدد الحالات الممكنة هو $\Omega_x = \{1,2,3,4,5,6\}$

وبما أن احتمال ظهور أي وجه هو $\frac{1}{6}$ فإنه يمكن إيجاد احتمالات المتغير العشوائي X في:

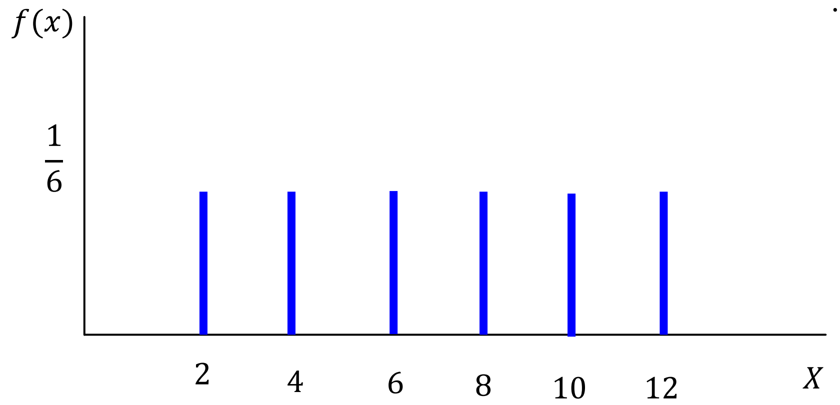
x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن الخاصيتين محققتين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

التمثيل البياني:

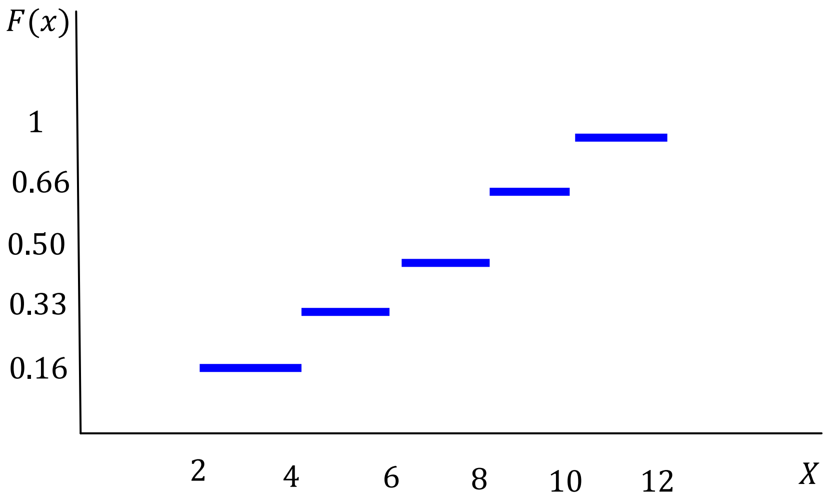


ب– تحديد تابع توزيع المتغير العشوائي X:

x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<2\\ \frac{1}{6} & 2\le X<4\\ \frac{2}{6} & 4\le X<6\\ \frac{3}{6} & 6\le X<8\\ \frac{4}{6} & 8\le X<10\\ \frac{5}{6} & 10\le X<12\\ 1 & X\ge 12\end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج– حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$$
$$=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=7$$

- التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=4\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}+64\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{6}+144\times\frac{1}{6}=60.7-7^2$$
$$V(X)=11.7$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11.7}=3.4$$

التمرين 2: صنعت قطعة نقود حيث $P(H) = \frac{3}{4}$ و $P(T) = \frac{1}{4}$، قمنا برمي هذه القطعة 3 مرات على الأرض. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور المتتالية في أطول متتابعة.

أ– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ب– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ج– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ– تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

لدينا عدد الحالات الممكنة هو

$$\Omega = \{(HHH)(HHT)(HTT)(HTH)(THH)(THT)(TTH)(TTT)\}$$

$$P(HHH) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{27}{64} \qquad P(THH) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(HHT) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{9}{64} \qquad P(THT) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(HTH) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{64} \qquad P(TTH) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(HTT) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{64} \qquad P(TTT) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{64}$$

حيث أن المتغير العشوائي يمثل عدد الصور في أطول متتابعة فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية $3, 2, 1, 0$

$$P(X = 0) = P\{(TTT)\} = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = P\{(HTT)(HTH)(THT)(TTH)\} = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 2) = P\{(HHT)(THH)\} = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 3) = P\{(HHH)\} = \frac{27}{64}$$

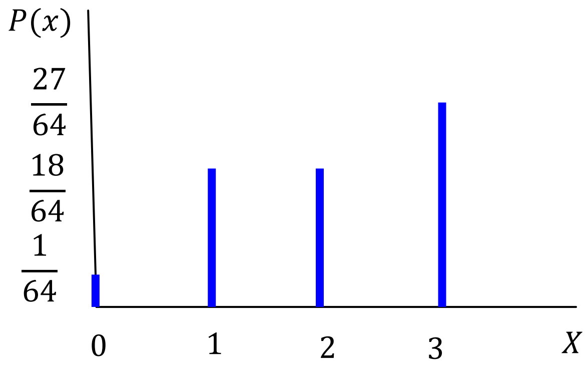
وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ و $f(x_i) \geq 0$

ويمكن تمثيل بيانيا قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الشكل التالي:

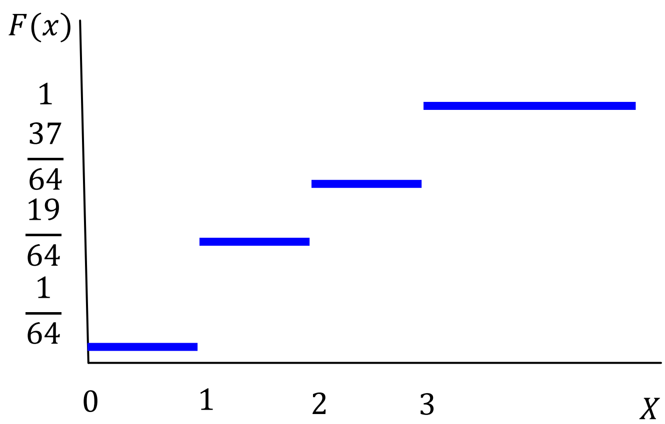


ب- تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$	1	

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



ج- حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = 2.1$$

– التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 4 \times \frac{18}{64} + 9 \times \frac{27}{64} = 5.2 - 2.1^2$$
$$V(X) = 0.8$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

التمرين 3: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و4 حمراء قمنا بسحب 3 كرات بطريقة عشوائية. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

2– أوجد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

3– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{3!\times7!} = \frac{720}{6} = 120$$

بما أن المتغير العشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega_s = \{0,1,2,3\}$$

ويمكن حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة في:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$
$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\times C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}$$

وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$$f(x_i)\geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n}p_i=1$$

2– تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{20}{120} & 0\leq X<1\\ \frac{80}{120} & 1\leq X<2\\ \frac{116}{120} & 2\leq X<3\\ 1 & X\geq 3\end{cases}$$

3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$
$$=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=1.2$$

– التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=0\times\frac{1}{120}+1\times\frac{60}{120}+4\times\frac{36}{120}+9\times\frac{4}{120}=2-1.2^2$$
$$V(X)=0.56$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.56}=0.74$$

التمرين 4. إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X)=\begin{cases}2x & 0\le X\le 1\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

1– تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟ ومثله بيانيا؟

2– احسب الاحتمال $P(0<X<\frac{1}{2})$

3– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟ ومثله بيانيا؟

4– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين:

$$f(X)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x)dx=1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

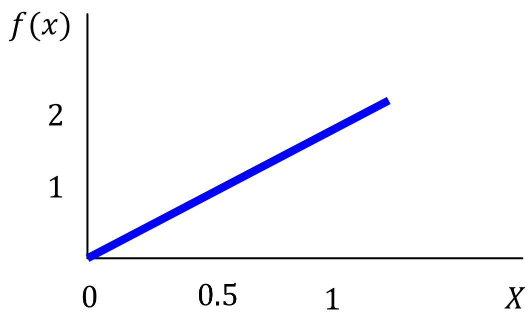
الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x)dx=1$$

$$=\int_0^1 2xdx=\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1=0-1=1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

التمثيل البياني:



2– حساب الاحتمال $P(0<X<\frac{1}{2})$

$$P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{0.5}2xdx=\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5}=0.25$$

3– تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

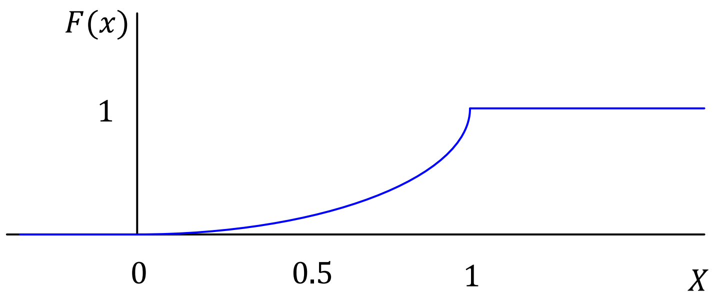
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} 2xdx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن: $X \leq 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{2x^2}{2} & 0 \leq X \leq 1 \\ 1 & X > 1 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} x(2x)dx = 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 0.66$$

– التباين

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_{0}^{1} x^2(2x)dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = \int_{0}^{1} 2x^3 dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$

التمرين 5: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X)=\begin{cases}K(4x-2x^2) & 0<X<2\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

1– أحسب قيمة الثابت K حتى يكون التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟

2– احسب الاحتمال $P(X>1)$

3– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

الحل:

1– حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فيجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

$$=\int_0^2 K(4x-2x^2)dx=1$$

$$=K\int_0^2 (4x-2x^2)dx=1$$

$$=K\left[2x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=K\,\frac{8}{3}=1$$

$$K=\frac{3}{8}$$

2– حساب الاحتمال $P(X>1)$

$$P(X>1)=\int_1^2 \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[2x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

3– حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx=\frac{3}{8}(2x^2-\frac{2x^3}{3})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{3}{8}(2x^2-\frac{2x^3}{3}) & 0\le X\le 2\\ 1 & X>2\end{cases}$$

التمرين 6: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(X) = \begin{cases} cx^4 & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X < 1.5)$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت c:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 cx^4 dx = 1$$
$$= c\int_0^2 x^4 dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\frac{32}{5} = 1$$
$$c = \frac{5}{32}$$

- حساب الاحتمال $P(X < 1.5)$

$$P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{5}{32} x^4 dx$$
$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.5} = 0.23$$

3- حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{5}{35}(x^4)dx = \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{5}{32}x^5 & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

4– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{32}x^5\right)dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3}$$

$$E(X) = 1.66$$

التباين:

$$V(X) = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

$$\int_0^2 x^2\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 2.85 - 2.77 = 0.07$$

$$V(X) = 0.07$$

– الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.07} = 0.28$$

التمرين 7: إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1– أثبت أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ؟

2– احسب الاحتمال $P(X \le \frac{1}{3})$؟

الحل:

1– إثبات أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين:

$$f(X) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^1 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^1 = \ [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$

$$= (10\times 1 - 15\times 1 + 6\times 1) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$

$$= 10 + 6 - 15 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

2- حساب الاحتمال $P(X \leq \frac{1}{3})$:

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \ [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \ [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= (10(\tfrac{1}{3})^3 - 15(\tfrac{1}{3})^4 + 6(\tfrac{1}{3})^5) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$

$$= 10\frac{1}{27} - 15\frac{1}{81} + 6\frac{1}{243}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = 0.2098$$

التمرين 6: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له معرف بتابع الكثافة الاحتمالية التالي:

$$f(X) = \begin{cases} Kx^3 & 0 < X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X \leq \frac{2}{3} / X > \frac{1}{3})$

3- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 Kx^3 dx = 1$$
$$= c\int_0^1 x^3 dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\,\frac{1}{4} = 1$$
$$c = 4$$

- حساب الاحتمال $P(X \leq \frac{2}{3}/X > \frac{1}{3})$

$$P(X \leq \frac{2}{3}/X > \frac{1}{3}) = \frac{P(X\leq\frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})}{P(X>\frac{1}{3})}$$
$$= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3 dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3 dx} = \frac{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}} = 0.1875$$

3- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \int_0^1 4x^4 dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$
$$E(X) = 0.8$$

التباين:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$
$$V(X) = \int_0^1 x^2(4x^3)dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = \int_0^1 4x^5 dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$
$$= \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = 0.66 - 0.64 = 0.02$$
$$V(X) = 0.02$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.02} = 0.14$$