1- المتغير العشوائي

المتغير العشوائي X هو دالة عددية مُعرّفة على مجموعة الأساس E، هذه الدالة تَرفق كل نتيجة من النتائج الممكنة (كل عنصر من عناصر مجموعة الأساس) بعدد حقيقي، وحسب طبيعة الظاهرة المدروسة يمكن أن نصنف المتغيرات العشوائية إلى صنفين: متغير عشوائي منفصل (متقطع) ومتغير متصل (مستمر). و تكون مزودة باحتمال P، و X يأخذ القيم $x_1,x_2,....,x_n$ بالاحتمالات $p_1,p_2,....,p_n$ معرف كما يلي $p_i=p(X=x_i)$.

عملية إرفاق القيم الاحتمالية p_i بقيم المتغير x_i هو تعريف **قانون احتمال** جديد على E' هذا القانون يرمز له بـP' أو P_x و يسمى قانون X .

درسنا في مقياس الإحصاء الوصفي أنواع المتغيرات الإحصائية، وذكرنا أنها تنقسم أساسا إلى متغيرات عشوائية منفصلة (متقطعة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة)، وكل نوع له تحليل إحصائي خاص به من حيث شكل الدالة الرياضية للمتغير (هنا نستعمل قانون الاحتمال) وكذا التمثيلات البيانية لنمط توزيع قيم المتغير، هذا التقسيم مهم جدا وأساسي في هذا المستوى من الدراسة، نبدأ أولا بدراسة المتغير العشوائي المنفصل ثم المتغير العشوائي المتصل.

2- التوزيع الاحتمالي والتراكمي للمتغير العشوائي المنفصل

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا ، نعرّف على مجموعة المخارج $E=\{x_1,x_2,....,x_r\}$ ، قانون احتمال و ذلك بإعطاء متتالية أعداد $(p_1,p_2,....,p_r)$ تحقق

$$\sum_{i=1}^{r} p_i=1 \text{ و } p_i\geq 0 \text{ من أجل كل } i \ (r\geq i\geq 1)$$

هذه المساواة مهمة جداً (وهي احد مسلمات نظرية الاحتمالات كما وضعها الرياضي الروسي كولموغروف)، وهي كذلك تشبه مساواة مجموع التكرارات النسبية التي تطرقنا إليها في الإحصاء الوصفي. يبقى أن نذكر أن كل الاحتمالات المحسوبة هنا هي في إطار ما سميناه الاحتمال النظري.

مثال1 : كتجربة عشوائية نرمي زهرة نرد أوجهها مرقمة من 1 إلى 6، ولتكن هذه الأرقام هي قيم المتغير العشوائي X ، نريد معرفة احتمال كل قيمة من هذه القيم والتأكد من أن هذه التجربة العشوائية تحقق شروط التوزيع الاحتمالي (قانون الاحتمال) في مجموعة الأساس $\mathbf{\Omega}:\{1,2,3,4,5,6\}$

الوصول إلى هذا الهدف يرتبط أساسا بخاصية احتمال **الأحداث المنتظمة** التي تطرقنا إليها في الفصل الأول من هذه المطبوعة، هذه الخاصية تكون مُحقّقة في حالة تساوي الاحتمالات p_i ، ونقول حينها أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال)، أي من أجل كل i لدينا $p(x_i)=p_i=\frac{1}{r}$

الإجابة على التطبيق ملخصة في الجدول التالي:

الجدول (4): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

النتيجة x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum_{i=1}^{n=6} p_i$
الاحتمال p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

المصدر: من إعداد الباحث

لدينا الاحتمالات كلها متساوية، أي $p(x_i)=p_i=\frac{1}{r}=1/6$، ومجموع الاحتمالات يساوي **1**، وكلها محصورة في المجال $[0,1]$، إذا التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير X هو توزيع احتمالي. إذا ما طُلب منك **التمثيل**

البياني لهذا التوزيع الاحتمالي، يا ترى كيف يكون شكل التمثيل ؟ هنا الإجابة ستكون باستعمال الأعمدة البيانية كما رأينا ذلك في الإحصاء الوصفي.

2-1- دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية): (Distribution Probability Function)

دالة التوزيع الاحتمالية F(x) للمتغير العشوائي X هي الدالة الرياضية المتعلقة بالتطبيق الاحتمالي P(x) ومعرفة كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i:x_i<x} P(X = x_i)$$

وهي تطابق في عملية حسابها التكرار التجميعي الصاعد الذي درسناه في الإحصاء الوصفي.وتُعطى في الحل التطبيقي للمسائل الاحتمالية بالطريقة الآتية،

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1\ (min\, x) \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ p_1+p_2 & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{m-1} & x_{m-1} \le x < x_m \\ 1 & x \ge x_m \end{cases}$$

تمثيلها البياني يكون على شكل منحنى تصاعدي متقطع (على شكل سُلمي)، كما هو الحال مع منحنى التكرار التجميعي الصاعد $\boldsymbol{F_i^{\uparrow}}$.

مثال2

مندوب مبيعات شركة تجارية لديه اجتماع لعقد 3 صفقات مع 3 متعاملين. استنادًا إلى خبرته السابقة، يعرف مندوب المبيعات أن هناك فرصة بنسبة 80٪ لنجاح كل صفقة. المطلوب هو تحديد التوزيع الاحتمالي لعدد الصفقات الناجحة التي سيقوم بإبرامها مندوب المبيعات مع هؤلاء المتعاملين؟

الحل

لدى المندوب التجاري مهمة التفاوض على إبرام ثلاث صفقات $C_1;C_2;C_3$. **أولاً**، لنرمز للحدث العشوائي : "**إبرام الصفقة** " بالرمز S، وبالرمز $\overline{S}$ للحدث العكسي وهو : "**فشل إبرام الصفقة**". **ثانياً**، نحن نهتم بالمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصفقات الناجحة التي يمكن لمندوب الشركة إبرامها مع المتعاملين الثلاثة. **ثالثاً**، وتبعاً لمعطيات التمرين، هناك 20% كنسبة تمثل فشل الصفقة، إذا المندوب له خيارات أربع، وهي إمكانية أن يبرم: 3 صفقات، صفقتين، صفقة واحدة، 0 صفقة. هذه الإمكانات تمثل مجال قيم المتغير X، إذا مجموعة الأساس لهذا المتغير هي: $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$.

الجدول (5): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

عدد الصفقات x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	$\sum_{i=0}^{n=3} p_i$
الاحتمال p_i	0.008	0.096	0.384	0.512	**1**

المصدر: من إعداد الباحث

هدفنا من المثال هو تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير X، وما علينا إلا حساب الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي X. ننطلق من فرضية مصرح بها وهي استقلالية الأحداث العشوائية لعقد الصفقة، أي عقد الصفقة مع المتعامل الأول أو عدم عقدها لا يؤثر ولا يتأثر بنتيجة التفاوض مع المتعاملين الآخرين. نبدأ بحساب الاحتمالات كما يلي:

- احتمال أن لا يُبرم المندوب أي صفقة، ويطابق رياضياً $P(X=0)$، وهذا الحدث العشوائي يقابل: فشل في الصفقة الأولى و فشل في الصفقة الثانية و فشل في الصفقة الثالثة، باستعمال الرموز المبينة أعلاه نكتب:

$\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3$ ، وذكرنا الاستقلالية بين الصفقات،وانّ احتمال فشل الصفقة هو 0.2، ومنه:

$$P(X=0)=P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3)=P(\overline{S}_1)+P(\overline{S}_2)+P(\overline{S}_3)=0.2\times 0.2\times 0.2=0.008$$

- احتمال أن يُبرم المندوب صفقة واحدة، ويطابق رياضياً $P(X=1)$ ، وهذا الحدث العشوائي مركب من ثلاثة أحداث عشوائية ممكنة ويقابل:
  - نجاح في الصفقة الأولى و فشل في الصفقة الثانية و فشل في الصفقة الثالثة، أو
  - فشل في الصفقة الأولى و نجاح في الصفقة الثانية و فشل في الصفقة الثالثة، أو
  - فشل في الصفقة الأولى و فشل في الصفقة الثانية و نجاح في الصفقة الثالثة

باستعمال الرموز، هذا يقابل: $(S_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3)+(\overline{S}_1 \cap S_2 \cap \overline{S}_3)+(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_3)$ ، وبما أن الأحداث كلها مستقلة فان الاحتمال هو:

$$\begin{aligned}
P(X=1)&=P\big((S_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3)+(\overline{S}_1 \cap S_2 \cap \overline{S}_3)+(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_3)\big)\\
P(X=1)&=P(S_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3)+P(\overline{S}_1 \cap S_2 \cap \overline{S}_3)+P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_3)\\
P(X=1)&=P(S_1)P(\overline{S}_2)P(\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1)P(S_2)P(\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1)P(\overline{S}_2)P(S_3)\\
P(X=1)&=(0.8)(0.2)(0.2)+(0.2)(0.8)(0.2)+(0.2)(0.2)(0.8)=0.096
\end{aligned}$$

- احتمال أن يُبرم المندوب صفقتين، ويطابق رياضياً $P(X=2)$ ، وهذا الحدث العشوائي مركب من ثلاثة أحداث عشوائية ممكنة ويقابل:
  - نجاح في الصفقة الأولى و نجاح في الصفقة الثانية و فشل في الصفقة الثالثة، أو
  - فشل في الصفقة الأولى و نجاح في الصفقة الثانية و نجاح في الصفقة الثالثة، أو
  - نجاح في الصفقة الأولى و فشل في الصفقة الثانية و نجاح في الصفقة الثالثة

باستعمال الرموز، هذا يقابل: $(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) + (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3)$ ، وبما أن الأحداث كلها مستقلة فان الاحتمال هو:

$$P(X=2) = P\big((S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) + (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3)\big)$$
$$P(X=2) = P\big((S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3})\big) + P\big(\overline{S}_1 \cap S_2 \cap S_3\big) + P\big(S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3\big)$$
$$P(X=2) = P(S_1)P(S_2)P(\overline{S_3}) + P(\overline{S}_1)P(S_2)P(S_3) + P(S_1)P(\overline{S}_2)P(S_3)$$
$$P(X=2) = (0.8)(0.8)(0.2) + (0.2)(0.8)(0.8) + (0.8)(0.2)(0.8) = 0.384$$

- احتمال أن يُبرم المندوب كل الصفقات، ويطابق رياضياً $P(X=3)$ ، وهذا الحدث العشوائي يقابل: نجاح في الصفقة الأولى و نجاح في الصفقة الثانية و نجاح في الصفقة الثالثة، باستعمال الرموز المبينة أعلاه نكتب: $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ، ومنه الاحتمال المقابل هو:

$$P(X=0) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1)P(S_2)P(S_3) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512 .$$

من خلال نتائج حساب الاحتمالات، وجدنا أن كل هذه الاحتمالات تحقق الشرط $P(X=x) \geq 0$ ، وكذلك مجموعها يحقق الشرط $\sum_{\Omega_X} P(X=x) = 1$ ، (انظر الجدول 5).

مثال 3 دراسة ديموغرافية تهتم بتوزيع الأطفال حسب الجنس (ذكر –أنثى) في اسر بلدية سطيف التي لا يتجاوز عدد أطفالها 2. ليكن المتغير العشوائي X :يمثل عدد الذكور(نهتم بعدد الذكور في كل أسرة وترتيبها أيضا، أي الذكر هو المولود الأول ، الثاني)، نختار أسرة بطريقة عشوائية ونحاول حساب احتمال عدد الذكور في هذه الأسرة. المطلوب: ما هي الأحداث الممكنة لهذه التجربة العشوائية؟ حدد قيم مجال المتغير X ؟ أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي؟ وكذا دالة التوزيع الاحتمالي ومثلها بيانياً؟

الحل النموذجي

- المتغير العشوائي X : يمثل عدد الذكور في الأسرة. نرمز للذكر ب B وللأنثى ب G الأحداث الممكنة لهذه التجربة العشوائية (نأخذ بعين الاعتبار ترتيب المولود) هي كالتالي:

$$\Omega_X : \{(BB),(BG),(GB),(GG)\}$$

- والمتغير العشوائي X يأخذ الصيغة التالية (أي مُعّرف)

$$X = X(\omega_x) = \begin{cases} 0 & \omega_x : \{GG\} \\ 1 & \omega_x : \{GB, BG\} \\ 2 & \omega_x : \{BB\} \end{cases}$$

ومنه مجال قيم المتغير X هو $X : \{0,1,2\}$

- انطلاقاً من هذا المجال يمكننا بناء جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير بحساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير X .

الجدول (6): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

$\sum_{i=0}^{n=2} p_i$	2	1	0	**عدد الذكور** x_i
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	**الاحتمال** p_i

المصدر: من إعداد الباحث

2-2- حساب دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها البياني

أولا لحساب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ ، يكفي حساب الاحتمالات المقابلة للأحداث العشوائية التالية:

- $P(X<0)$ ، هو احتمال مقابل لحدث عشوائي مستحيل الحدوث، لانّ من غير المنطقي أن يكون عدد الذكور اقل من الصفر، لهذا احتمال هذا الحدث العشوائي يساوي الصفر $P(X<0)=0$.

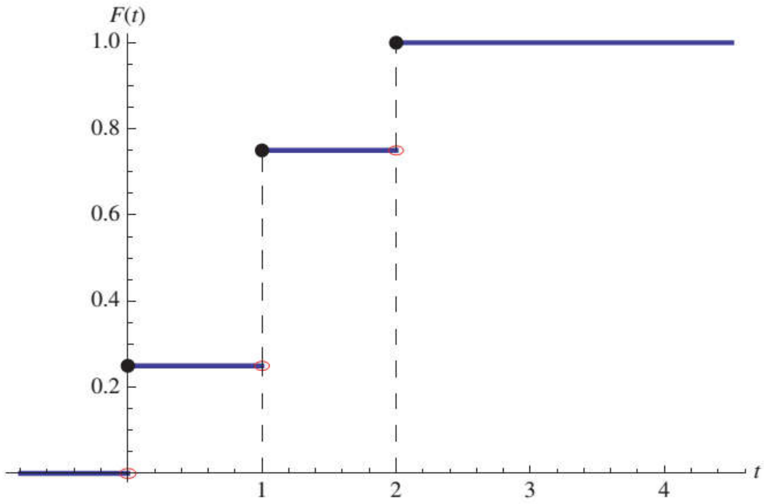
- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة يساوي الصفر واقل تماما من الواحد، يطابق $P(0\leq X<1)=p(X=0)=\frac{1}{4}$ ، وهو يقابل الأحداث $\{GG\}$.

$$F(X)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq \mathrm{x})=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\ \leq x<\ 1 \\ \frac{3}{4} & 0\ \leq x<\ 2 \\ 1 & x\ \geq 2 \end{cases}$$

- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة على الأكثر يساوي واحد، يطابق الأحداث: أن يكون في الأسرة ذكر واحد أو ليس لها على الإطلاق، أي، $P(X\leq 1)=p(X=0)+P(X=1)$ ، وهو يقابل الأحداث $\{(BG),(GB),(GG)\}$ومنه الاحتمال هو: $P(X\leq 1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة على الأكثر يساوي اثنان، يطابق الأحداث: أن يكون في الأسرة ذكرين أو ذكر واحد أو ليس لها على الإطلاق: $P(0<X\leq 2)=p(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

وهو يقابل الأحداث $\{(BG),(GB),(BB),(GG)\}$ ، والتي تقابل مجموعة الأساس ومنه الاحتمال هو $P(0<X\leq 2)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$. كل هذه الاحتمالات مرتبة ومجتمعة تشكل دالة التوزيع الاحتمالية.



الشكل(4): دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي "عدد الذكور في الأسرة"

3- التوزيع الاحتمالي والتراكمي للمتغير العشوائي المتصل

درسنا في الإحصاء الوصفي أن المتغيِّر العشوائي المتصل يأخذ عددًا لا نهائيًّا من قيم الأعداد الحقيقية في سلسلة متصلة مثل: الأوزان، الأطوال، المساحات، المسافات...، وتحت هذا النوع من المتغيرات، نجد (رياضيا) أن احتمال أخذ متغيِّر عشوائي متصل لقيمة معيَّنة يساوي صفرًا؛ أي إنّ

$$P(X = x) = 0, \forall x \in \Omega$$

وهذه إحدى الخواص التي تميِّز المتغيِّرات العشوائية المتصلة عن المتغيِّرات المنفصلة .لماذا يا ترى هذه المساواة ؟ السبب هو التعريف الخاص بدالة الكثافة الاحتمالية(تحت قواعد التكامل الرياضي) للمتغير العشوائي المتصل.

دالة الكثافة الاحتمالية :(**Probability Density Function**) : هي الدالة الممثلة لأي توزيع احتمالي عن طريق التكامل. وتكون دالة الكثافة الاحتمالية موجبة دائمًا، كما يكون تكاملها من ∞- إلى ∞+ (أو ضمن مجال قيم المتغير العشوائي المتصل) مساويًا للواحد،

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية): (Distribution Function)

دالة التوزيع الاحتمالية F(x) للمتغير العشوائي X هي الدالة الرياضية المتعلقة بالتطبيق الاحتمالي P(x) ومعرفة كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = P_x(]-\infty, x]$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

علاقة مهمة جداً بين دالة التوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية، مُشتقة الدالة F(x) هي f(x)، $F(x)' = f(x)$

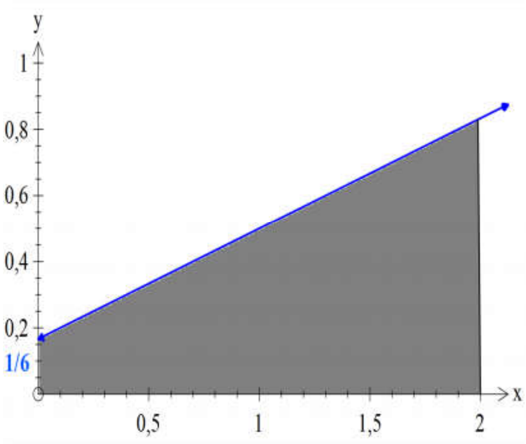
خصائص دالة التوزيع الاحتمالية

- هي دالة متزايدة على مجال قيم المتغير X
- دالة مستمرة على اليمين (في مجال X)
- النهايات الآتية محققة، $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$
- $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$
- $P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a \leq x < b)$
- $P(X = a) = 0, \forall a \in \Omega_X$
- $P(X > a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = .$
- باستعمال خاصية الحدث العكسي، $P(X > a) = 1 - P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$

يتميَّز المتغيِّر العشوائي المتصل بدالة كثافة الاحتمال، وهي دالة غير سالبة، مساحتها الكلية الموجودة أسفل المنحنى تساوي واحدًا. تمثِّل المساحة الموجودة أسفل منحنى دالة كثافة الاحتمال، وهي احتمال فضاء العيِّنة كاملًا. نحن نتذكَّر قاعدة الاحتمال، التي تنص على أن مجموع احتمالات الأحداث المتنافية يساوي واحدًا. إذا طبقًا لهذه القاعدة، فإن المساحة الكلية أسفل المنحنى تساوي واحدًا.

تمرين : **(حساب الاحتمال لمتغيِّر عشوائي متصل باستخدام التمثيلات البيانية)**

- إذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ معرفة بالشكل المقابل، حيث قيم المتغير $0 \leq x \leq 2$، المطلوب هو:
- ما نوع المتغير العشوائي؟ اوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$



الإجابة

بما أن المتغير العشوائي x يأخذ قيم في مجال متصل $0 \leq x \leq 2$ لمجموعة الأعداد الحقيقية، فهو متغير كمي متصل. فيما يخص صيغة الدالة الرياضية، الشكل الهندسي (باللون الرمادي)، المحدود في المجال $0 \leq x \leq 2$، والقطعة المستقيمة التي تشمل الإحداثية $(x = 0, y = 1/6)$ هو شبه منحرف، ودالة الكثافة ما هي إلا المساحة الملونة لشبه المنحرف، إذا يكفي لتحديد العبارة الرياضية للدالة $f(x)$، أن نضع قاعدة حساب مساحة شبه المنحرف، وهي:

$$f(x) = \text{المساحة} = \frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى})}{2} \times \text{الارتفاع}$$

من الشكل البياني، لدينا القاعدة الصغرى هي $\frac{1}{6}$، القاعدة الكبرى مجهولة ولنضعها x والارتفاع يساوي 2،

وتحت شرط أساسي وهو أن المساحة تحت المنحنى يجب أن تكون مساوية للواحد الصحيح، إذا

$$\text{المساحة} = 1 = 2 \times \frac{\left({}^{1}/_{6} + x\right)}{2} \Rightarrow {}^{1}/_{6} + x = \frac{5}{6} = x$$

القاعدة الكبرى تساوي ${}^{5}/_{6}$، وهي رياضياً تمثل صورة العدد 2، أي : $f(2) = {}^{5}/_{6}$ ، ولدينا أيضا

$f(0) = {}^{1}/_{6}$ ، يكفي أن نضع جملة معادلتين للوصول إلى صيغة دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

$$f(0) = {}^{1}/_{6} \Rightarrow a(0) + b = {}^{1}/_{6} \Rightarrow b = {}^{1}/_{6}$$
$$f(2) = {}^{5}/_{6} \Rightarrow a(2) + {}^{1}/_{6} = {}^{5}/_{6} \Rightarrow a = {}^{1}/_{3}$$

ومنه دالة الكثافة الاحتمالية $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}; \forall x \in 0 \leq x \leq 2$.

الطريقة الثانية:(الطريقة التحليلية)

نلاحظ أن التمثيل البياني عبارة عن خط مستقيم، وعليه فالدالة تآلفية من الدرجة الأولى، تأخذ الشكل الرياضي

التالي: $f(x) = ax + b$. ومن خلال الشكل نجد أن: $f(0) = {}^{1}/_{6} \Rightarrow a(0) + b = {}^{1}/_{6} \Rightarrow b = {}^{1}/_{6}$

نقوم بإيجاد قيمة a حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية، وحتى تكون كذلك يجب توفر شرطين أساسيين هما

$f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$، نطبق الشرطين ونتبع الخطوات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{2} \left(ax + \frac{1}{6}\right) dx + \int_{2}^{+\infty} (0)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \quad + \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]_0^2 + \quad 0 \ = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

أي أن: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$، ولدينا من جهة أخرى $f(x) \geq 0$ ، وبالتالي فإن f(x) هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

4- معالم المتغير العشوائي: الأمل الرياضي والتباين

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضي لقانون احتماله P_x و كذلك التباين و الانحراف المعياري ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $\sigma(X)$. سنتطرق باختصار إلى تعريف هذه المعالم وطرق حسابها وخصائصها في حال المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

4-1- الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي المنفصل

الأمل الرياضي (التوقع) هو ناتج مجموع جداء قيمة كل متغير x_i في احتماله p_i. في بعض المراجع يُعّرف أيضاً بالقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل $E(X)$ أو التوقع الرياضي Mathematical Expectation

أي أنَّ:

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_n p(x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i); i = 1,2,3,\dots,n$$

وهو يقابل **الوسط الحسابي** $\overline{X}$ الذي تطرقنا إليه في الإحصاء الوصفي، وعرفناه على انّه مُعطى بالصيغة التالية (في حال وجود تكرارات نسبية في الجدول الإحصائي)، $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ; i = 1,2,3,...,n$

التباين والانحراف المعياري (Variance and Standard Deviation)

درسنا التباين $V(X)$ في الإحصاء الوصفي وقلنا انّه احد أهم مقاييس التشتت، وذكرنا أن له صيغتين لحسابه، الصيغة الأولية لحسابه هي

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 f_i$$

بتعويض $\overline{X}$ **ب** $E(X)$ وتعويض f_i ب $p(x_i)$ نحصل على عبارة التباين للتوزيع الاحتمالي المنفصل

$$V(X) = E(X - E(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i \text{ .... } (1)$$

يمكن حسابه أيضا عن طريق نشر العبارة في الأعلى ونحصل على صيغة مبسطة

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \text{ ....}(2)$$

يبقى الانحراف المعياري (Standard deviation) للمتغير العشوائي المنفصل فما هو إلا الجذر ألتربيعي لقيمة التباين كما رأيناه أيضا في الإحصاء الوصفي، أي: $\sigma = \sqrt{V(x)}$

مثال تطبيقي

ليكن التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يمثل عدد حوادث السيارات في اليوم في ولاية جيجل، الجزائر، واحتمالاتها المقابلة لها، المطلوب هو حساب **متوسط عدد الحوادث المتوقع** خلال الأيام القادمة، وكذا **التباين والانحراف المعياري** للحوادث في الولاية؟

الجدول (7) يوضح حساب احتمالات عدد حوادث المرور وعناصر حساب معالم التوزيع الاحتمالي للمتغير x

عدد الحوادث x	0	1	2	3	4	5	$\sum_{i=i}^{n=6} p_i$
الاحتمال $p(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$x \times p(x)$	0	0.3	0.4	0.3	0.8	0.5	2.3
$x^2 \times p(x)$	0	0.3	0.8	0.9	3.2	2.5	7.7

المصدر: من إعداد الباحث

الإجابة

- متوسط عدد الحوادث(أي الأمل الرياضي)، باستعمال الصيغة في الأعلى هو، مجموع جداء عدد الحوادث X في الاحتمال المقابل لها، أي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 5 \times \frac{1}{10} = 2.3$$

إذا نتوقع بالمتوسط أن عدد الحوادث في ولاية جيجل سيكون 2 حوادث (بالتقريب إلى العدد الصحيح).

- التباين والانحراف المعياري، يكفي استعمال الصيغة الثانية، ونحسب فقط القيمة $\sum_i x_i^2 p_i$، للقيام بذلك يكفي تربيع قيمة x_i وضربها في الاحتمال المقابل لها (انظر السطر الأخير في الجدول)، بعد الحساب حصلنا على $\sum_i x_i^2 p_i = 7.7$. وبما أن الأمل الرياضي تم حسابه، إذا التباين $V(x) = 7.7 - (2.3)^2 = 2.41$

التباين ليس له وحدة قياس، إذا لقياس مستوى تشتت ظاهرة حوادث المرور في الولاية، نعتمد على الانحراف المعياري . $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2.41} = 1.55$

4-2- الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي المتصل

تبقى التعريفات المذكورة سابقاً للأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري صحيحة كذلك في حال التوزيع الاحتمالي المتصل، هناك فرق فقط في طريقة الحساب لاختلاف بنية البيانات وخاصية المتغير الكمي المتصل. هنا سنعمل على مجالات متصلة (لمجموعة الأعداد الحقيقية$\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$).

- الأمل الرياضي $E(x)$ سيُحسب باستعمال التكامل على مجال تعريف المتغير X، ويُعطى بالعبارة التالية

$$E(x) = \int_{\Omega_x} xf(x)dx$$

- التباين ذكرنا انه $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$، إذا يكفي (وبعد حساب الأمل الرياضي) أن نحسب قيمة $E(X^2)$ ، وهو مُعطى أيضا بنفس شكل عبارة الأمل الرياضي،

$$E(X^2) = \int_{\Omega_x} x^2 f(x)dx$$

عند الانتهاء من حساب قيمة الأمل الرياضي وقيمة $E(X^2)$ (الذي يُسمى بالعزم من الدرجة 2) نعوضهما في عبارة التباين لحساب قيمته.

مثال

باستعمال معطيات التمرين في الصفحة 34، وجدنا أن دالة التوزيع الاحتمالية الممثلة للشكل البياني (شبه المحترف)، $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}; \forall x \in 0 \leq x \leq 2$ ، احسب الأمل الرياضي والتباين لهذه الدالة؟

- **حساب الأمل الرياضي** $E(x)$

$$E(x) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x(\frac{1}{6} + \frac{x}{3})dx = \int_0^2 (x\frac{1}{6} + \frac{x^2}{3})dx$$

الدالة الأصلية للدالة $(\frac{x}{6} + \frac{x^2}{3})$ هي الدالة $(\frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{9})$، ومنه يمكن التعويض في مجال قيم المتغير للحصول على قيمة التكامل (والذي يمثل الأمل الرياضي)

$$E(x) = (2^2\frac{1}{12} + \frac{2^3}{9}) - (0^2\frac{1}{12} + \frac{0^3}{9}) = \frac{44}{36} \approx 1.22$$

- **حساب التباين** $V(x)$

التباين كما عرفناه سابقاً هو الفرق بين الأمل الرياضي ل $E(X^2)$ ومربع الأمل الرياضي ل X، أي $E(x)$، يكفي إذا حساب $E(X^2)$ وهي معطاة بالتكامل التالي

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2(\frac{1}{6} + \frac{x}{3})dx = \int_0^2 (\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{3})dx$$

الدالة الأصلية للدالة $(x^2\frac{1}{6} + \frac{x^3}{3})$ هي الدالة $(\frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{12})$، ومنه يمكن التعويض في مجال قيم المتغير للحصول على قيمة التكامل (والذي يمثل الأمل الرياضي للمتغير X^2)

$$E(x^2) = (\frac{2^3}{18} + \frac{2^4}{12}) - (\frac{0^3}{18} + \frac{0^4}{12}) = \frac{64}{36} = 1.77$$

بالتعويض في عبارة التباين، نجد $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow V(x) = 1.77 - (1.22)^2$، ومنه

التباين يساوي $V(x) = 1.77 - 1.48 = 0.289$

4-3- خواص الأمل الرياضي و التباين لمتغير عشوائي :

كتذكير، $E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم p_i بالمقارنة مع المفهوم في الإحصاء الوصفي $E(X)$ هو $\overline{x}$

و في ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة ، فانعدام $E(X)$ يدل على أن اللعبة عادلة و $E(x) \succ 0$ يعني أن اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب

كما في مجال الإحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري مقاييس للتشتت .

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس المجال و a عدد حقيقي

لدينا $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(aX) = aE(X)$

حيث $E(X+Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضياتيان لكل من X+Y و aX

ليكن X متغير عشوائي و a ، b عددان حقيقيان ، ينتج من المبرهنة السابقة الخواص التالية :

- $E(X+b) = E(X) + b$
- $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$
- $Var(aX) = a^2\ Var(X)$ و $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$
- $Var(X+b) = Var(X)$ و $\sigma(X+b) = \sigma(X)$