REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

Cours Modélisation géométrique

Chapitre 6: La morphologie mathématique

Dr.Belhouchette K

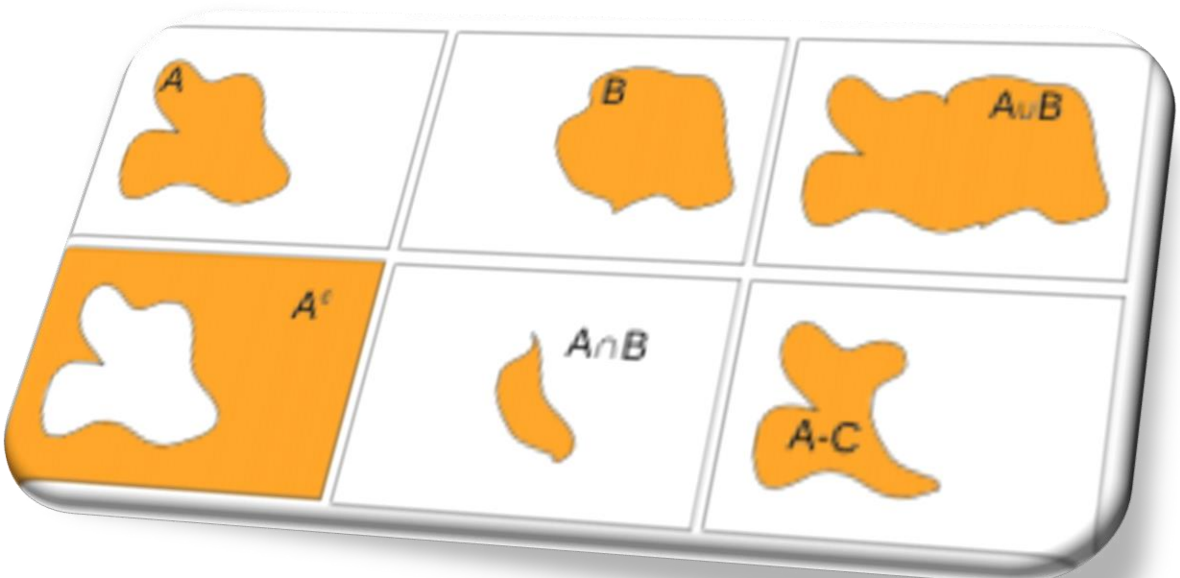
❑La morphologie mathématique est une théorie fondamentale du traitement et de l'analyse d'images.

❑Les opérateurs qu'elle propose permettent de fournir des outils pour toute la chaîne de traitement d'images, des prétraitements à l'interprétation de scènes .

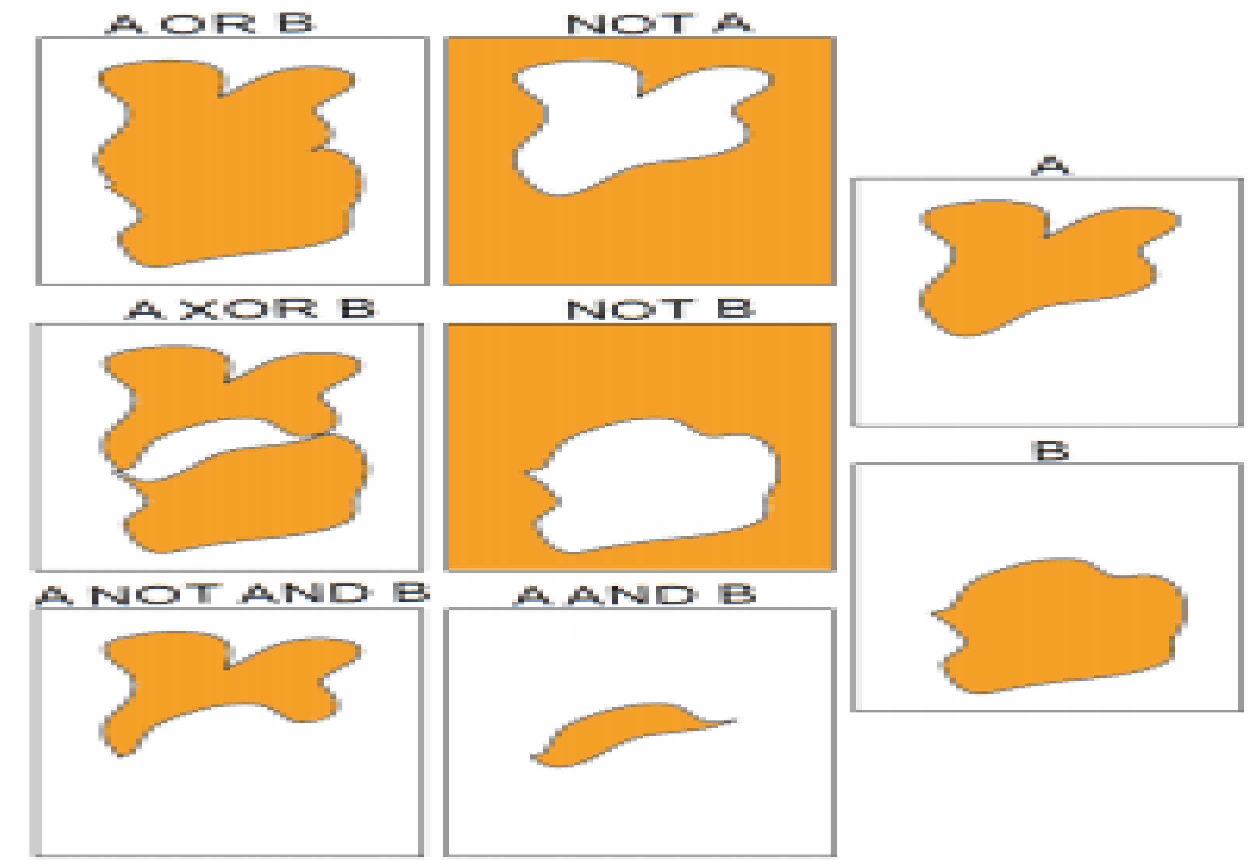
❑Avec une étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleurs.

Soit A et B deux ensembles :

Inclusion : $A \subset B \Rightarrow \forall a \in A,\ a \in B$
Union : $C = A \cup B \Rightarrow \forall c \in C,\ c \in A$ ou $c \in B$
Intersection : $C = A \cap B \Rightarrow \forall c \in C,\ c \in A$ et $c \in B$
Complément
un sous-ensemble X d'un ensemble ε servant de référentiel, le complémentaire de X dans ε est le sous-ensemble noté Xc, fourni par : $Xc = \{x \,/\, x \in \varepsilon \text{ et } x \notin X\}$
Différence : $C = A - B \Rightarrow \forall c \in C,\ c \in A$ et $c \notin B$



Ce procédé est équivalent à des opérations logiques booléennes sur chaque pixel.



- La morphologie s'applique à des images ou objets binaires et les étudie sous l'angle de leurs relations avec un ensemble fixe.

- Cet ensemble, dont on choisit la forme et la taille, est appelé **élément structurant.**

- Les relations sont de type ensembliste (réunion, intersection, etc.).

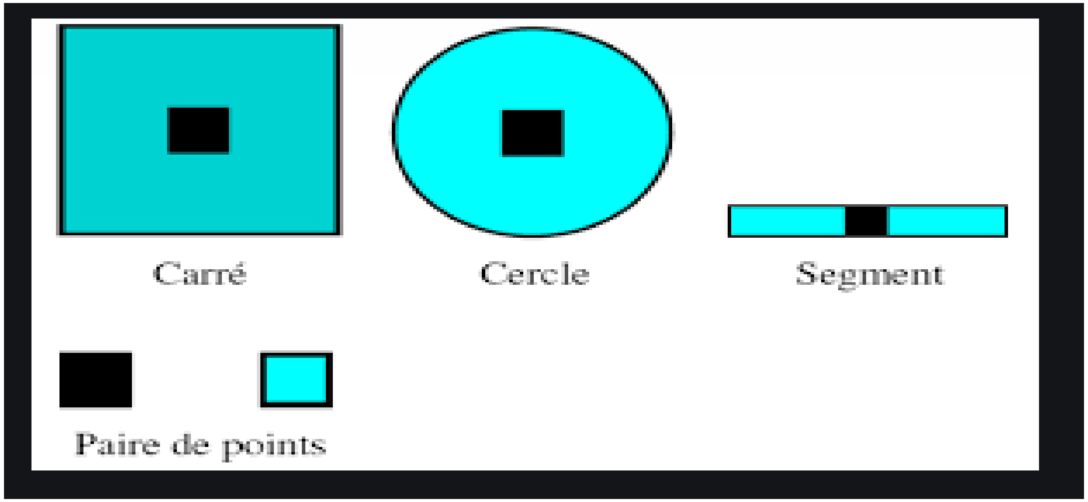
- Etant donné un élément structurant et une relation, l'image (ou l'objet) de départ est transformé en translatant l'élément structurant en tout point et en examinant si la relation entre l'objet et l'élément structurant translaté est vérifiée.

Choix de l'élément structurant

❑La forme de l'élément structurant n'est pas tellement critique, mais la forme des objets dans l'image résultat dépend fortement de celle de l'élément structurant.

❑Les éléments structurants courants sont : carrés, diamant, polygones, disques, lignes, paires de points.

❑Notons que l'application des éléments structurants arbitraires est rare.



Définition

Une dilatation est la translation de l'élément structurant sur l'ensemble étudié.

Soit :

X l'ensemble étudié

B l'élément structurant

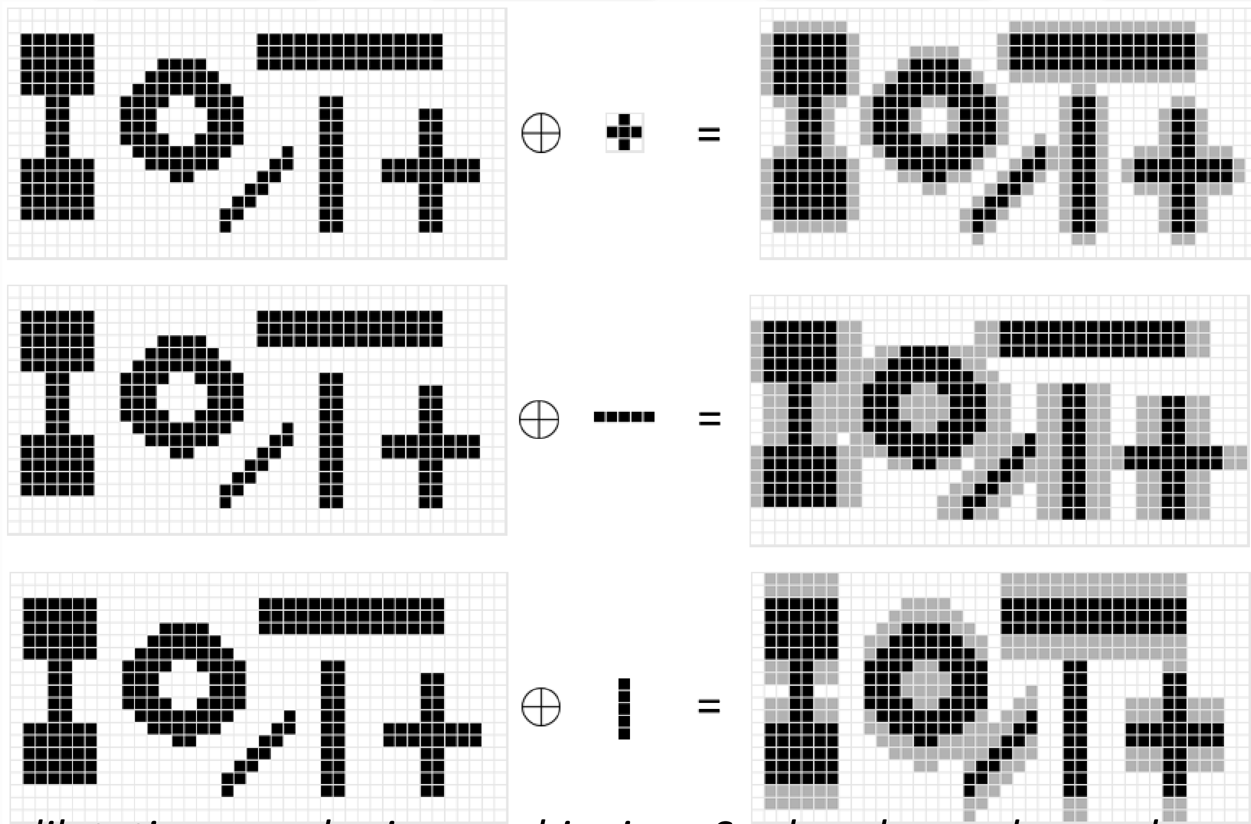
B_x l'élément structurant translaté au point x

$X \oplus B$ l'ensemble après dilatation

On a alors : $X \oplus B = [\ x \in X\ B_x$ I $X \oplus B = \{y | y \in B_x\ , x \in X\}$

Effets de la dilatation :

1. Agrandit les objets d'un rayon de l'élément structurant
2. Connecte les parties disjointes proches
3. Comble les trous



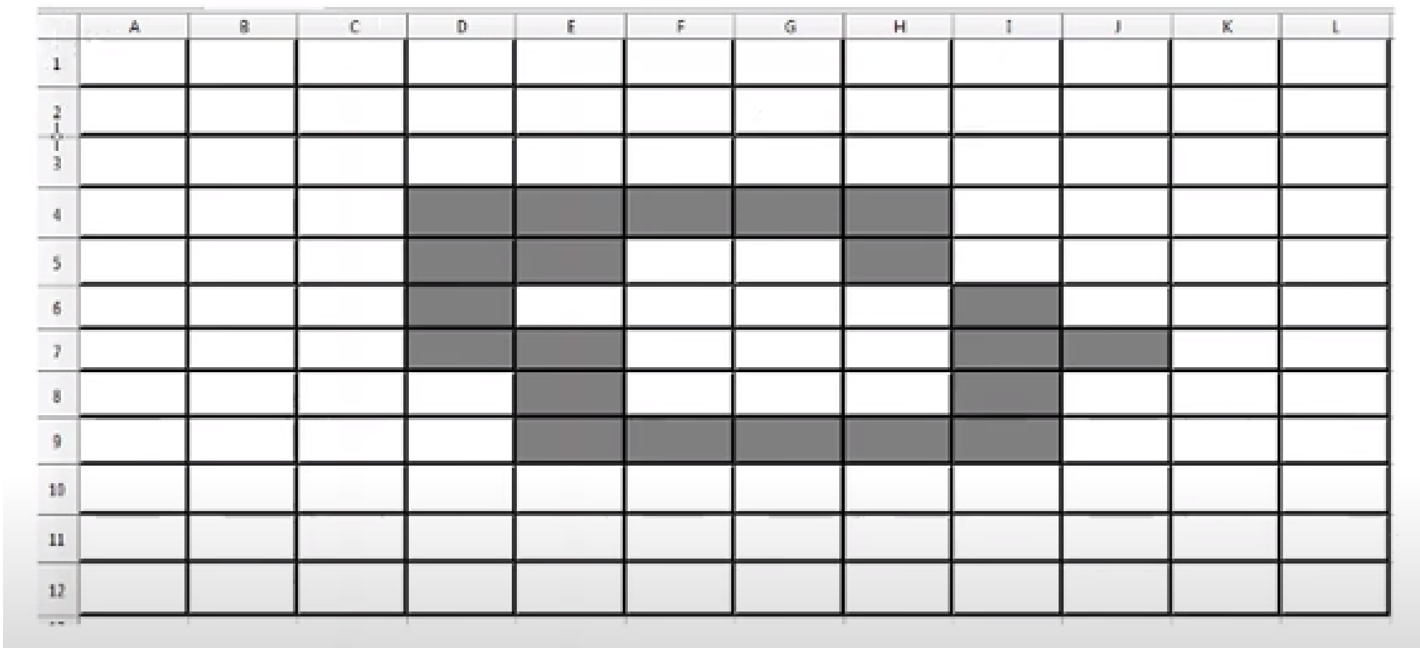
Exemple de dilatations sur des images binaires. Sur la colonne de gauche, on voit l'image originale binaire : les pixels noirs sont considérés comme faisant partis de l'image. Sur la colonne du milieu, on voit les 3 éléments structurants : 1 croix, 1 segment horizontal et 1 segment vertical. La colonne de droite montre le résultat de la dilatation de l'image par l'élément structurant : le résultat est une image binaire où les pixels noirs et gris font partis de l'image (les pixels gris ont étés ajoutés à l'image de gauche par la dilatation). On voit que la dilatation agrandit les objets présents dans l'image et que la direction et la taille de cet agrandissement dépendent de la forme de l'élément structurant.

Lors d'une dilatation :

- ❑ tous les objets vont grossir d'une partie correspondant à la taille de l'élément structurant,
- ❑ s'il existe des trous dans les objets, c'est à dire des morceaux de fond à l'intérieur des objets, ils seront comblés,
- ❑ si des objets sont situés à une distance moins grande que la taille de l'élément structurant, ils vont fusionner.

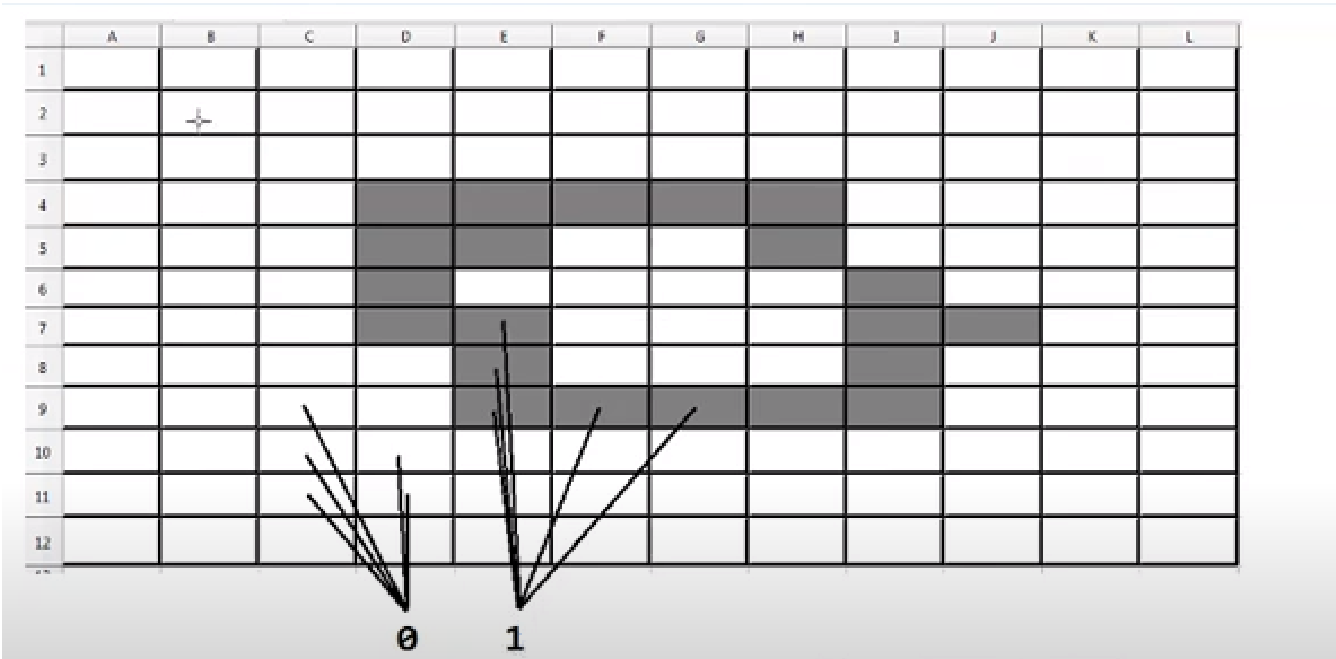
Exemple

Soit l’objet décrit dans cette figure :



Exemple

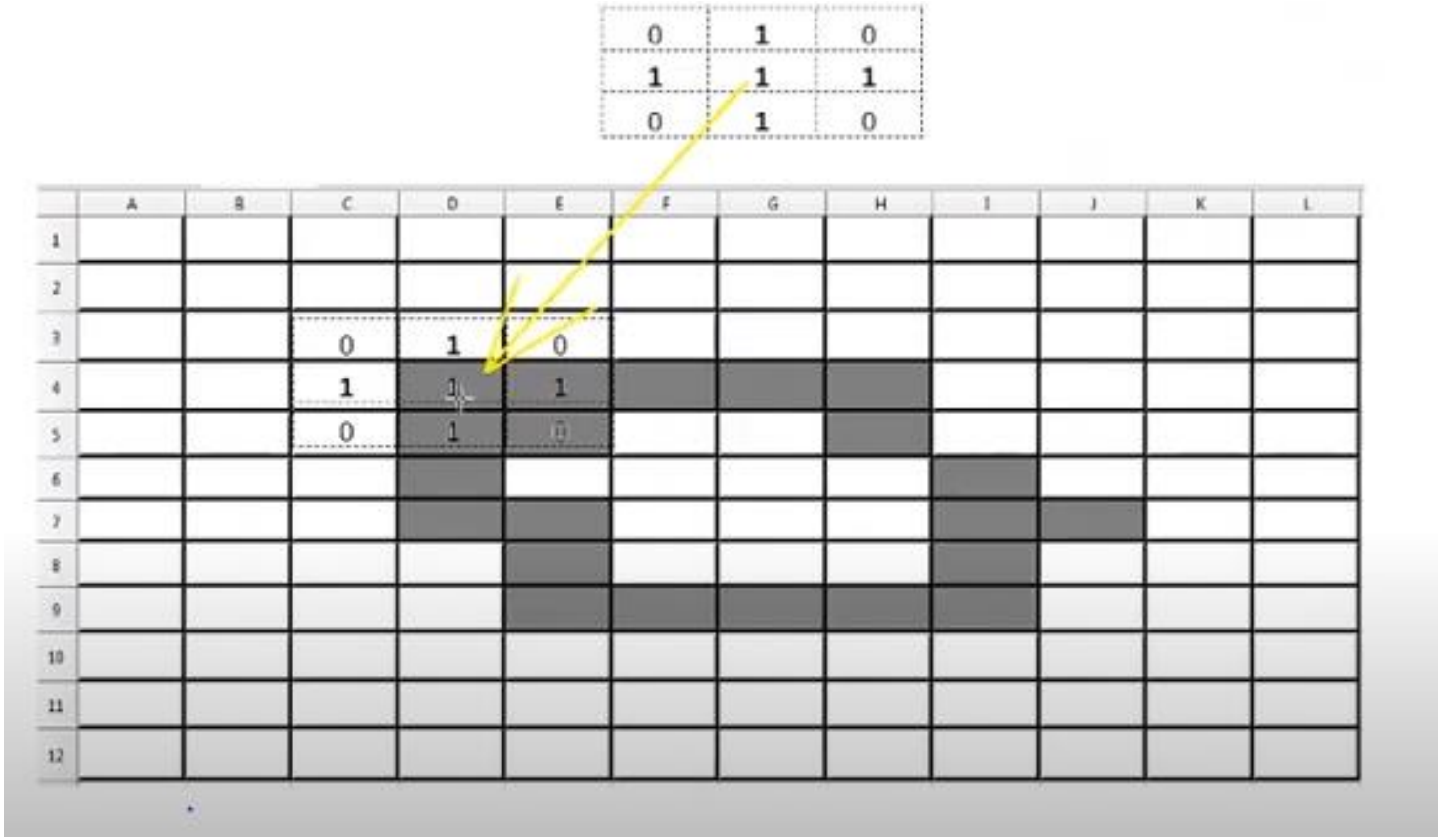
Les pixels gris sont étiquetés par 1 et les pixels blancs (vides) par 0



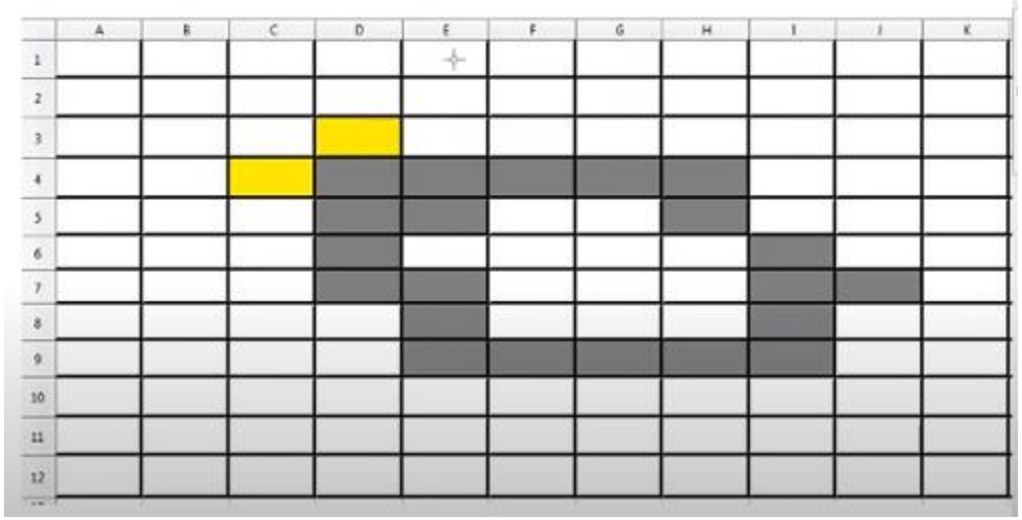
On va appliquer une dilatation de cet objet avec l'élément structurant suivant

0	1	0
1	1	1
0	1	0

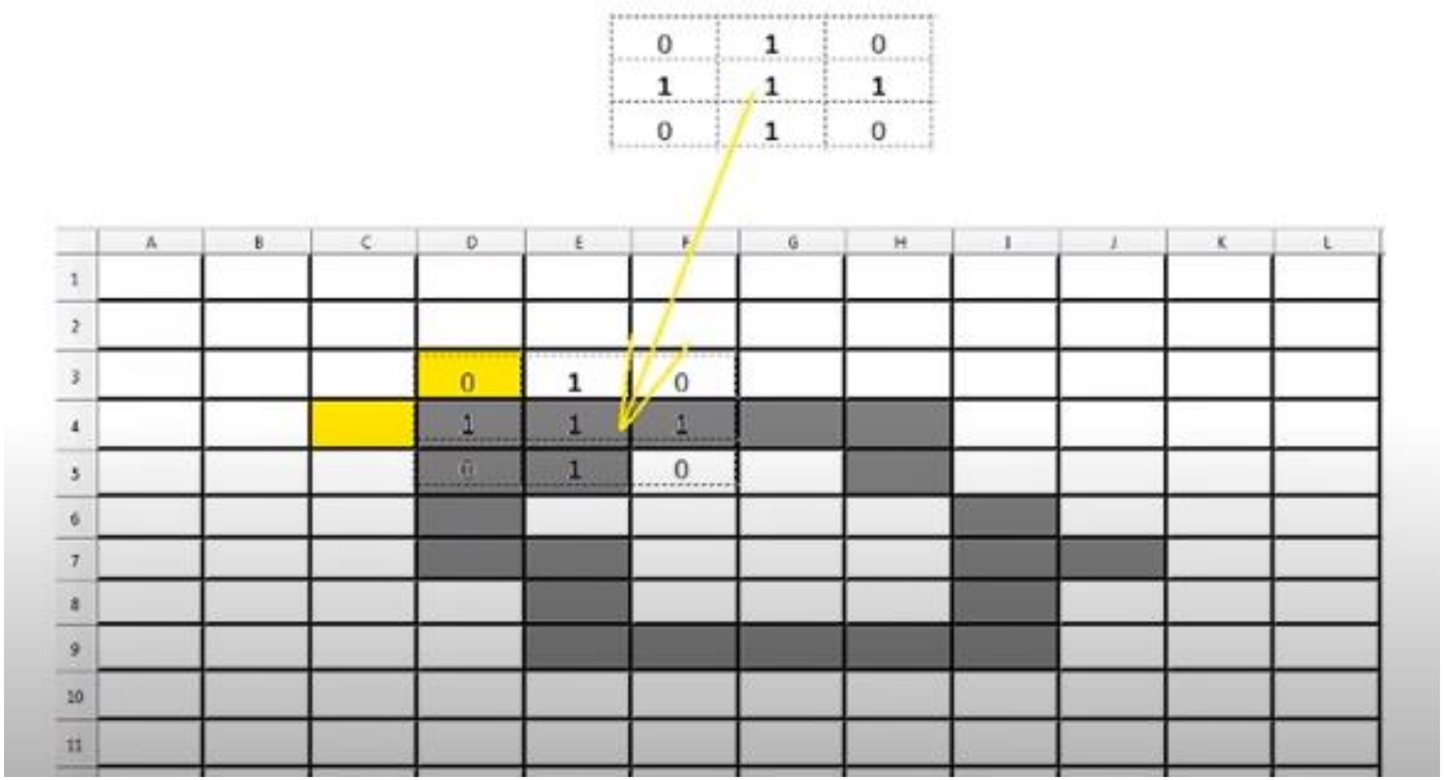
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



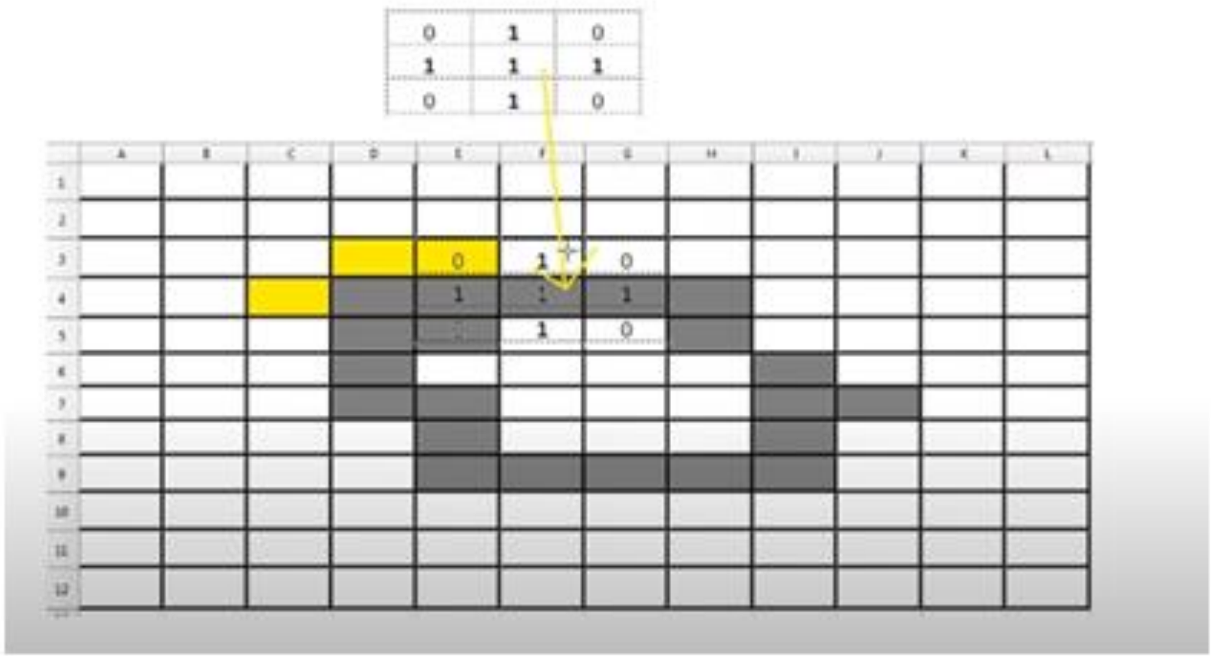
Faire passer l’élément structurant sur tous les pixels de l’objets



Faire passer l’élément structurant sur tous les pixels de l’objets
Déposer le centre de l’élément structurant sur chaque pixel

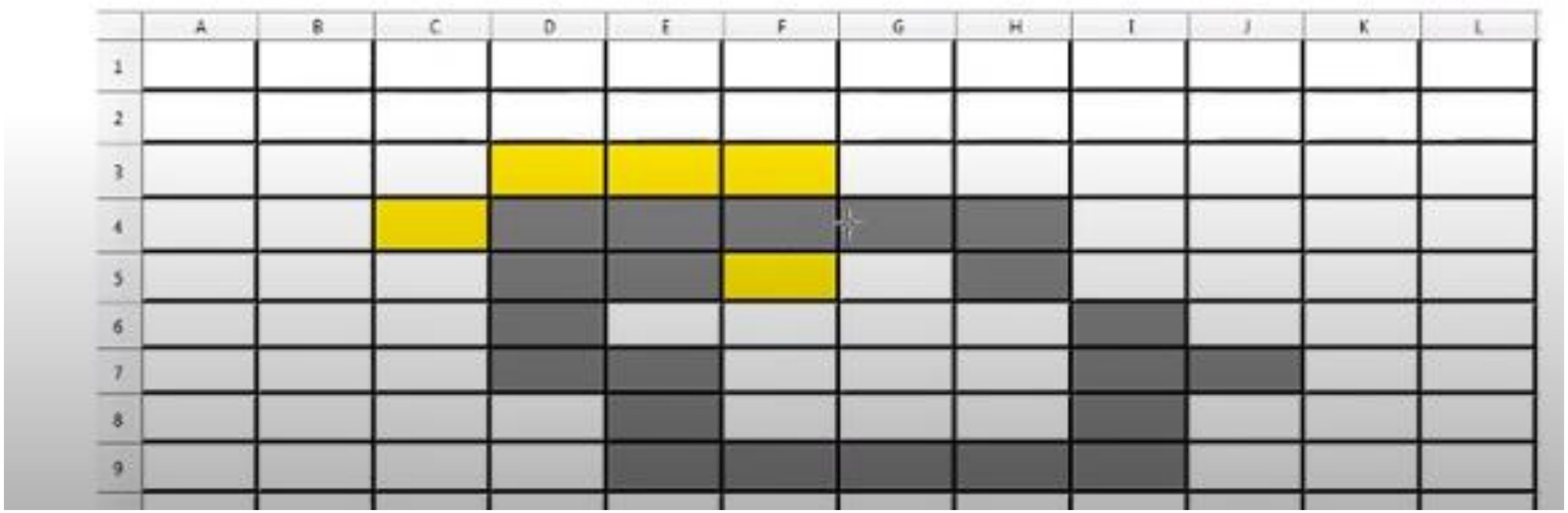


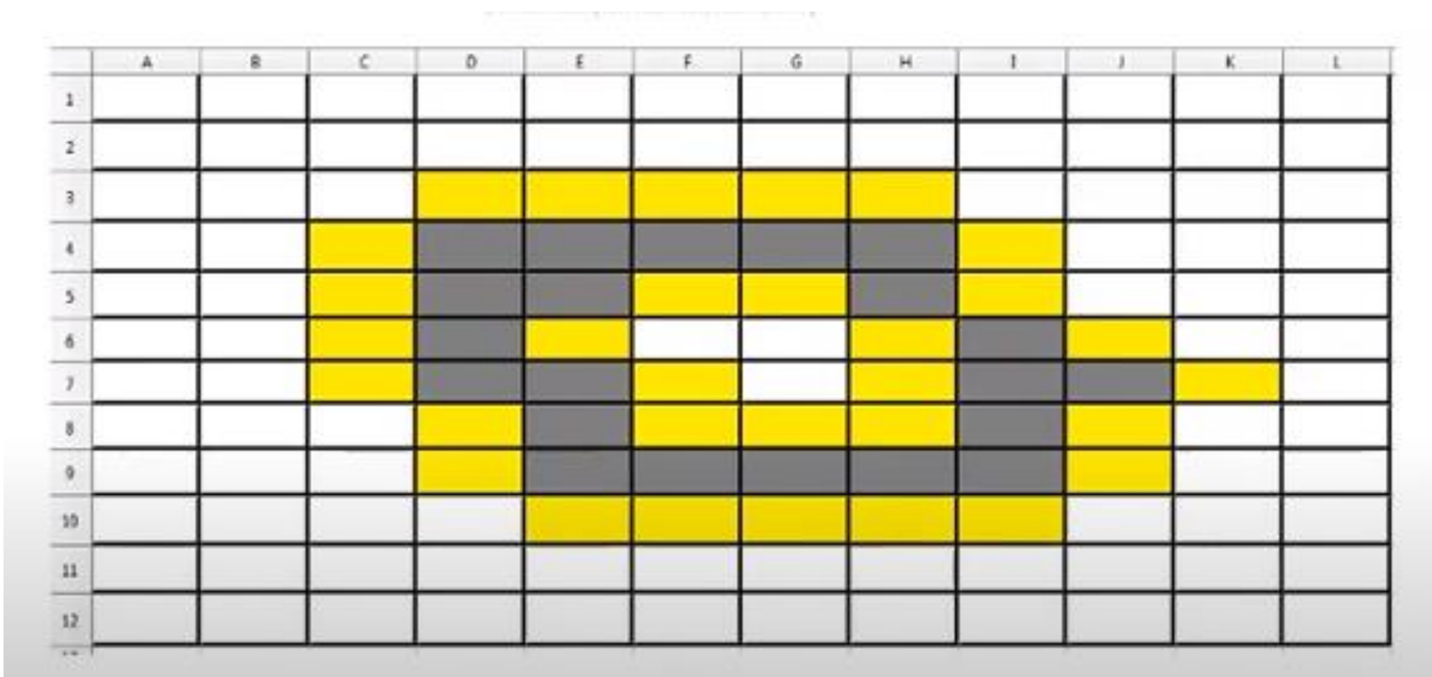
Comparer la valeur de pixel (val) avec celle de l’élément structurant(S)
Si S est supérieur à val alors val =1 sinon elle reste inchangée.



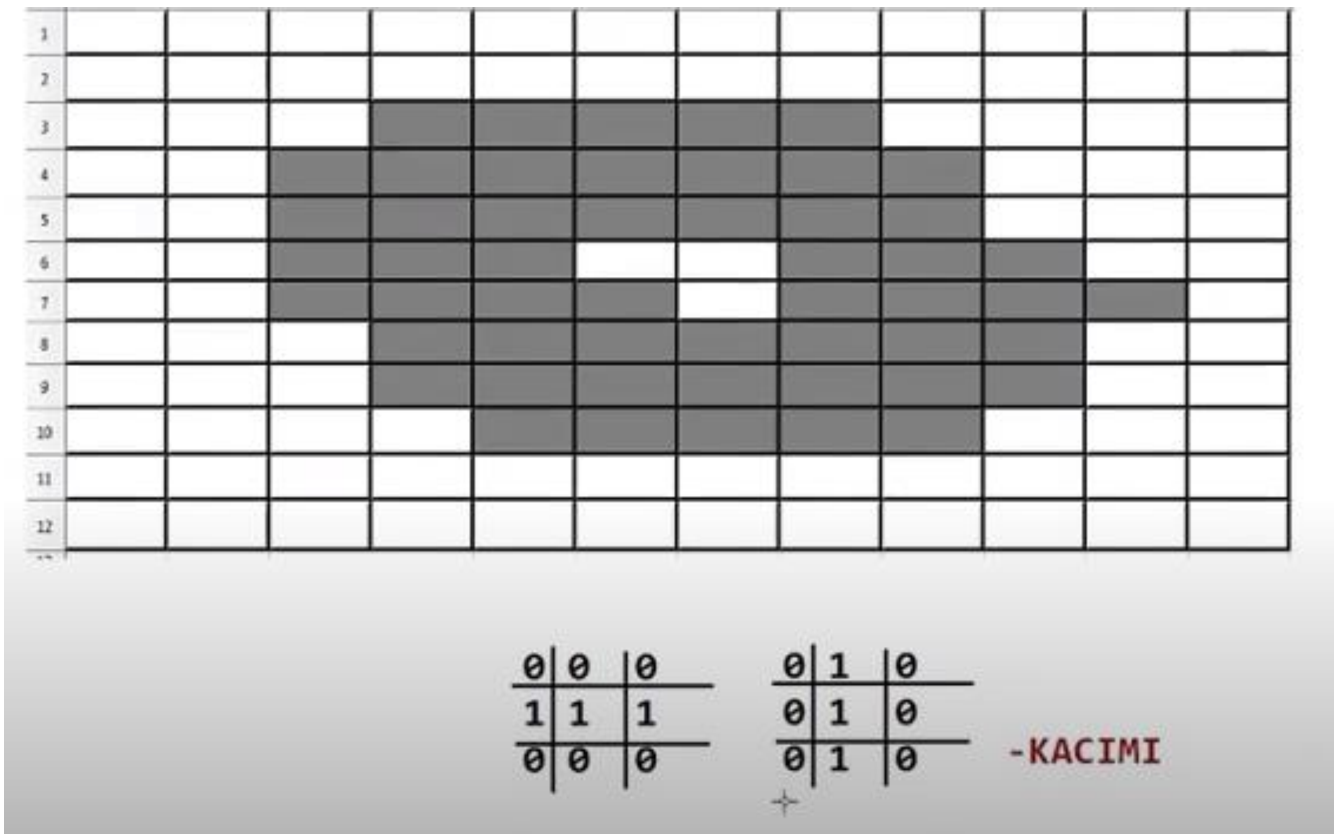
Continuer à passer l’élément structurant on comparant toujours

0	1	0
1	1	1
0	1	0





À la fin nous arrivons à dilater notre objet


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0 0 0
1 1 1
0 0 0
0 1 0
0 1 0
0 1 0
-KACIMI

Définition

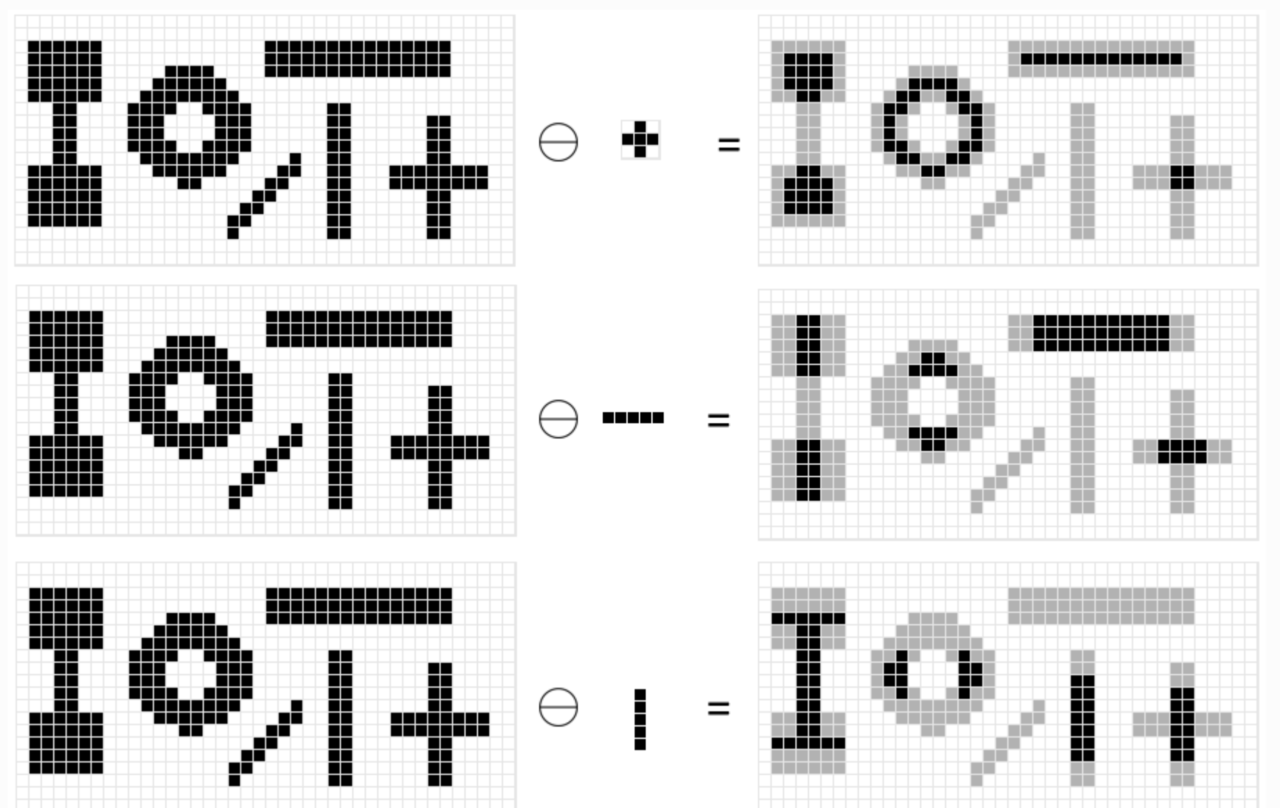
❑L'opération de l'érosion est noté $X \Theta B$

❑l'érosion est défini par : $X \Theta B = \{x|B_x \subset X\}$

❑un pixel est gardé si l'élément structurant centré sur ce pixel est entièrement contenu dans l'ensemble de départ.

Effets de l'érosion :

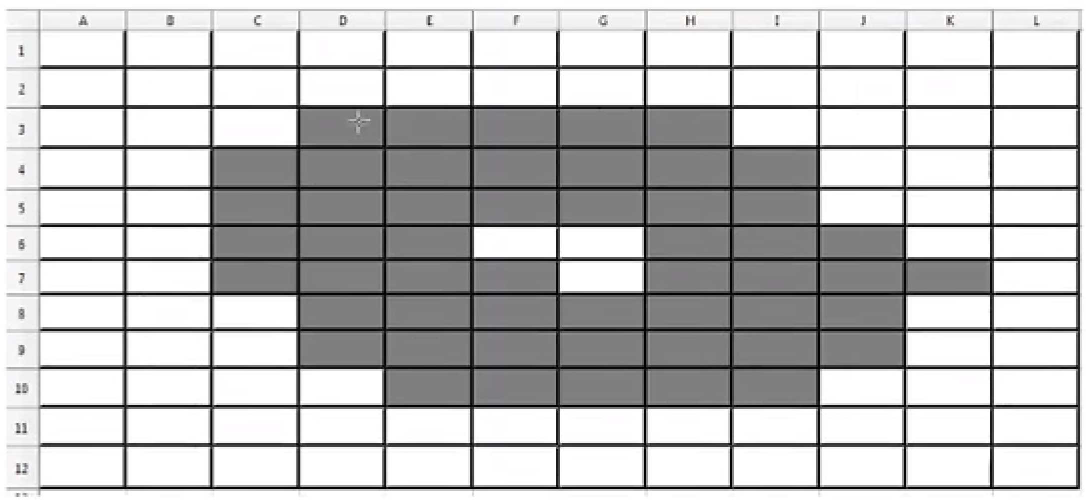
1. Diminue les objets d'un rayon de l'élément structurant
2. Sépare les éléments proches
3. Elimine les parties minces
4. Agrandit les trous



Exemple d'érosions sur des images binaires. Sur la colonne de gauche, on voit l'image originale binaire : les pixels noirs sont considérés comme faisant partis de l'image. Sur la colonne du milieu, on voit les 3 éléments structurants : 1 croix, 1 segment horizontal et 1 segment vertical. La colonne de droite montre le résultat de la dilatation de l'image par l'élément structurant : le résultat est une image binaire où les pixels noirs font partis de l'image (les pixels gris ont étés retirés à l'image de gauche par l'érosion). On voit que l'érosion réduit la taille les objets présents dans l'image et que la direction et la taille de ce rétrécissement dépendent de la forme de l'élément structurant.

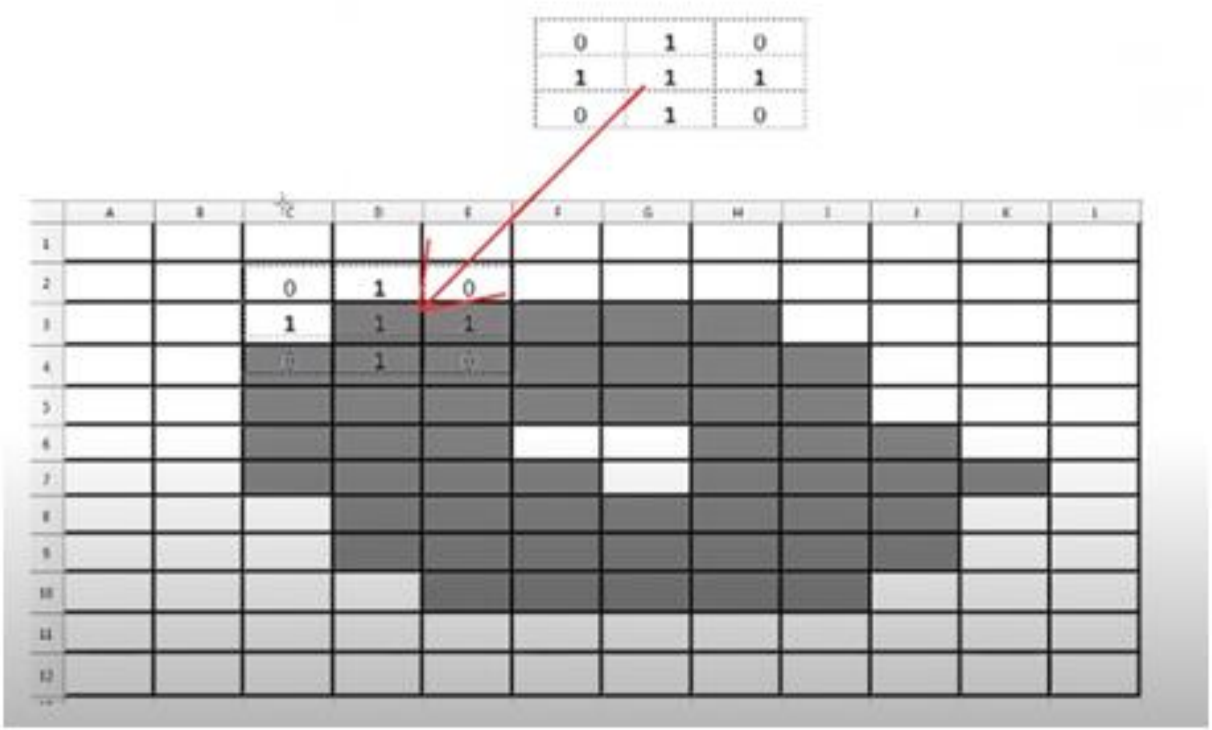
Exemple

Les pixels gris sont étiquetés par 1 et les pixels blancs (vides) par 0

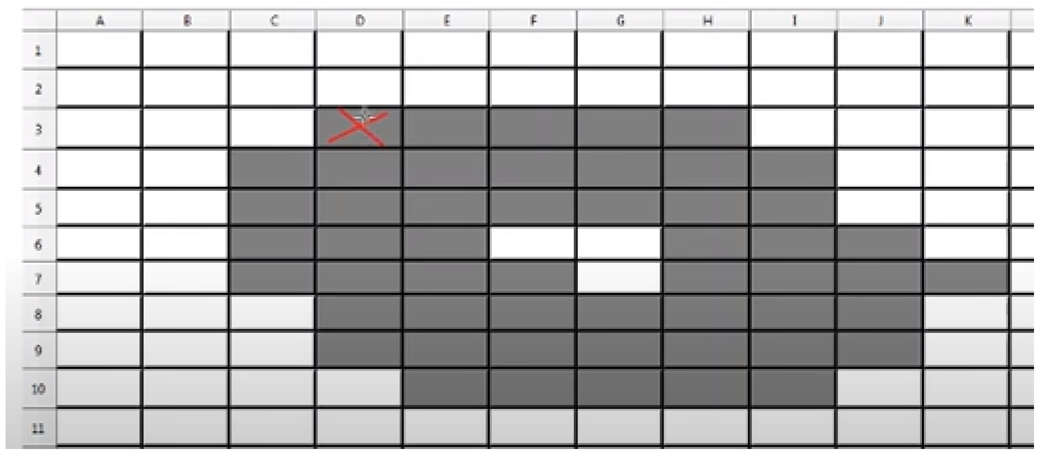


On va appliquer L'érosion à objet par l'élément structurant suivant

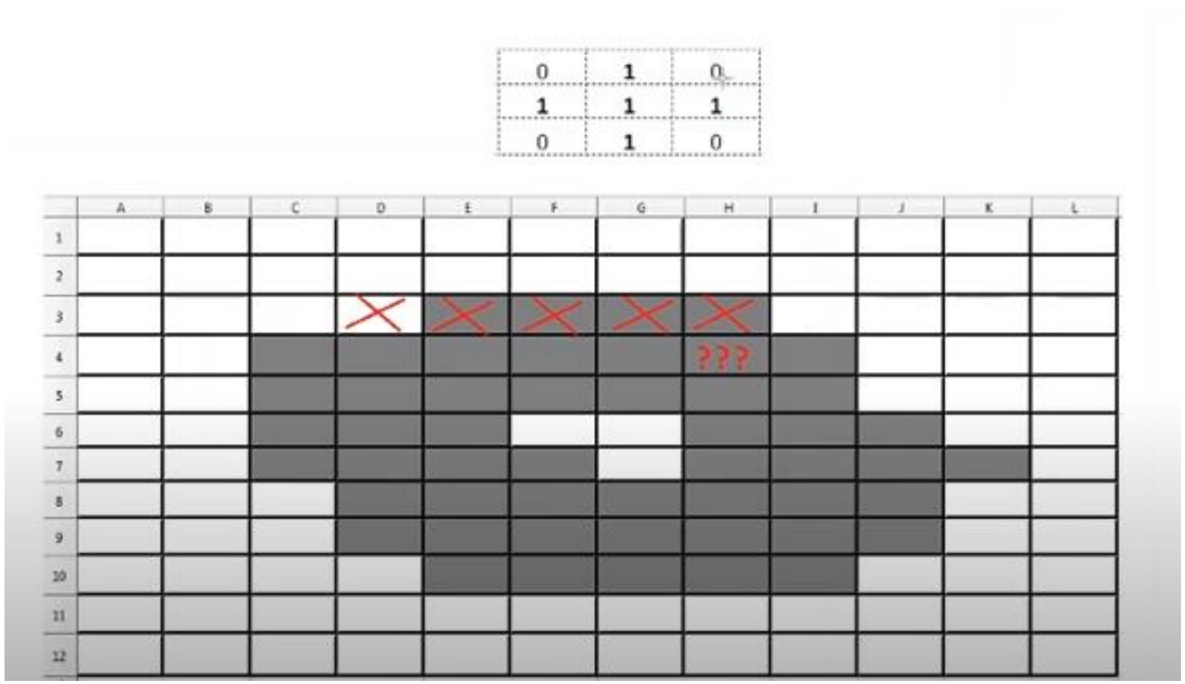
0	1	0
1	1	1
0	1	0


0 1 0
1 1 1
0 1 0

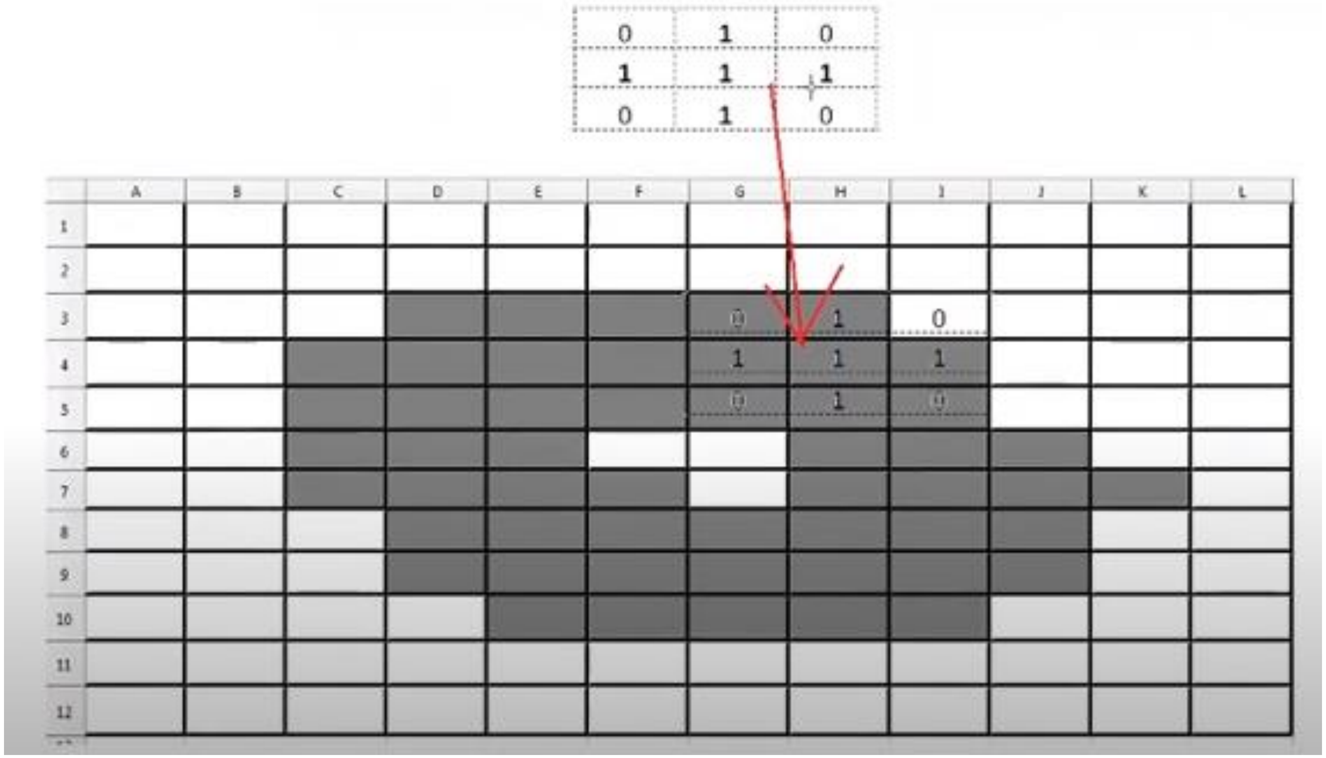
0	1	0
1	1	1
0	1	0

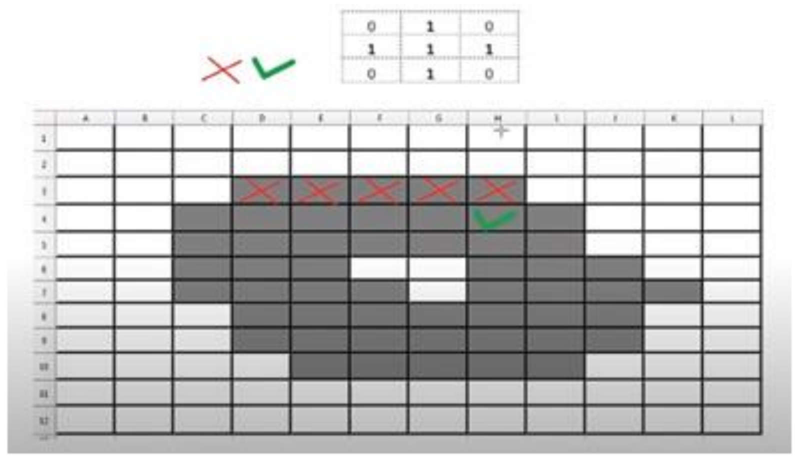


Si une seule valeur est inferieur au valeur de l’élément structurant on effectue une érosion : supprimer la case courante

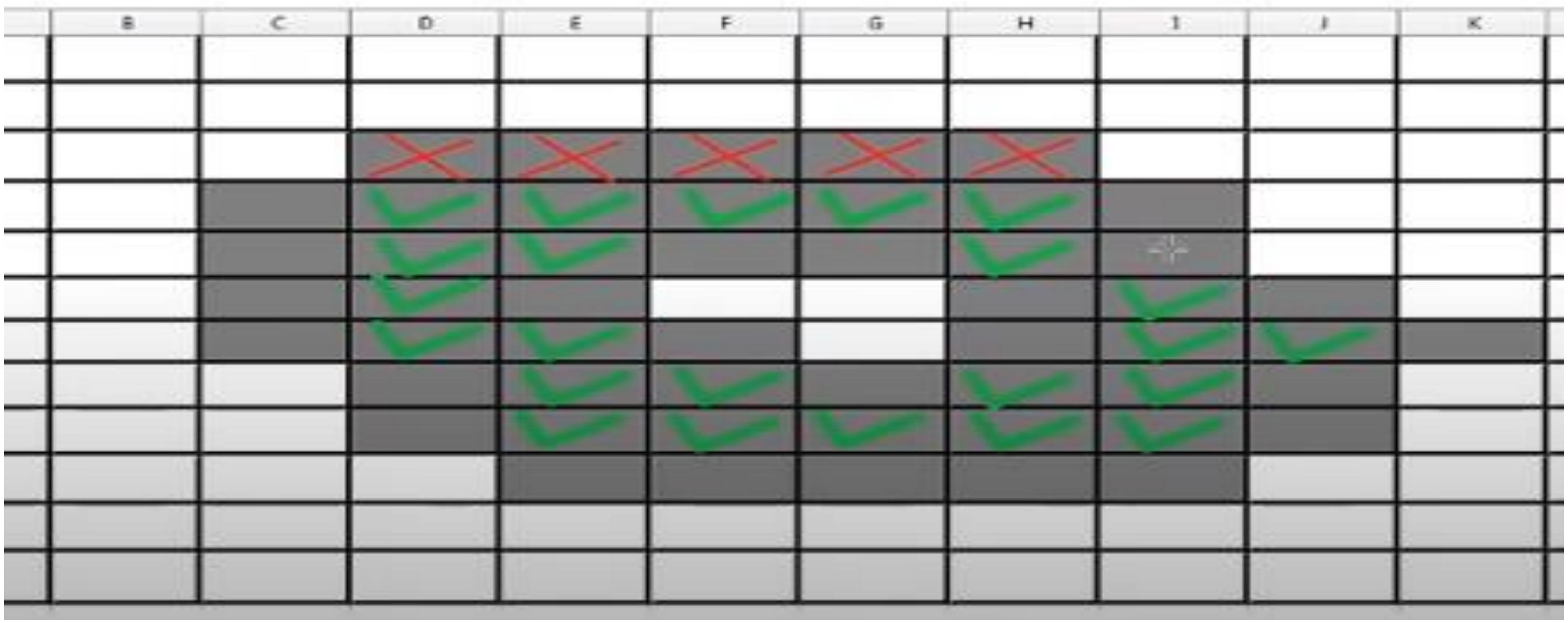


Apres la suppression d’un pixel il faut garder se valeur pour continuer à faire l’érosion des autres pixels

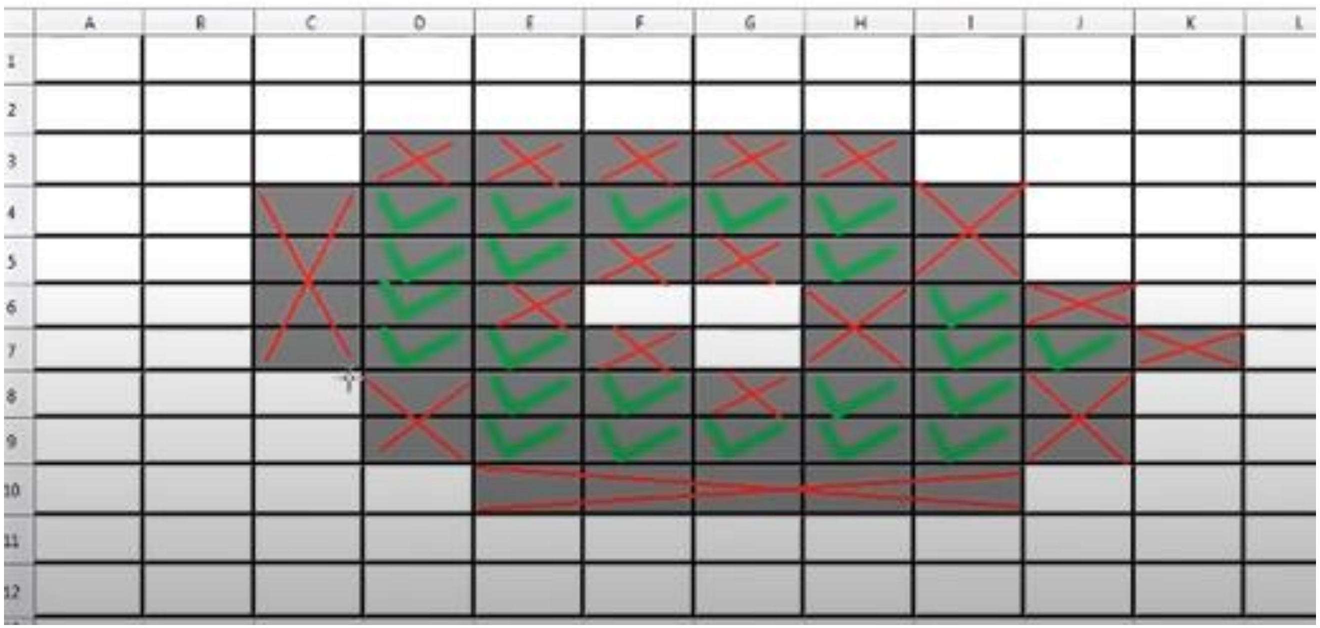

0 1 0
1 1 1
0 1 0

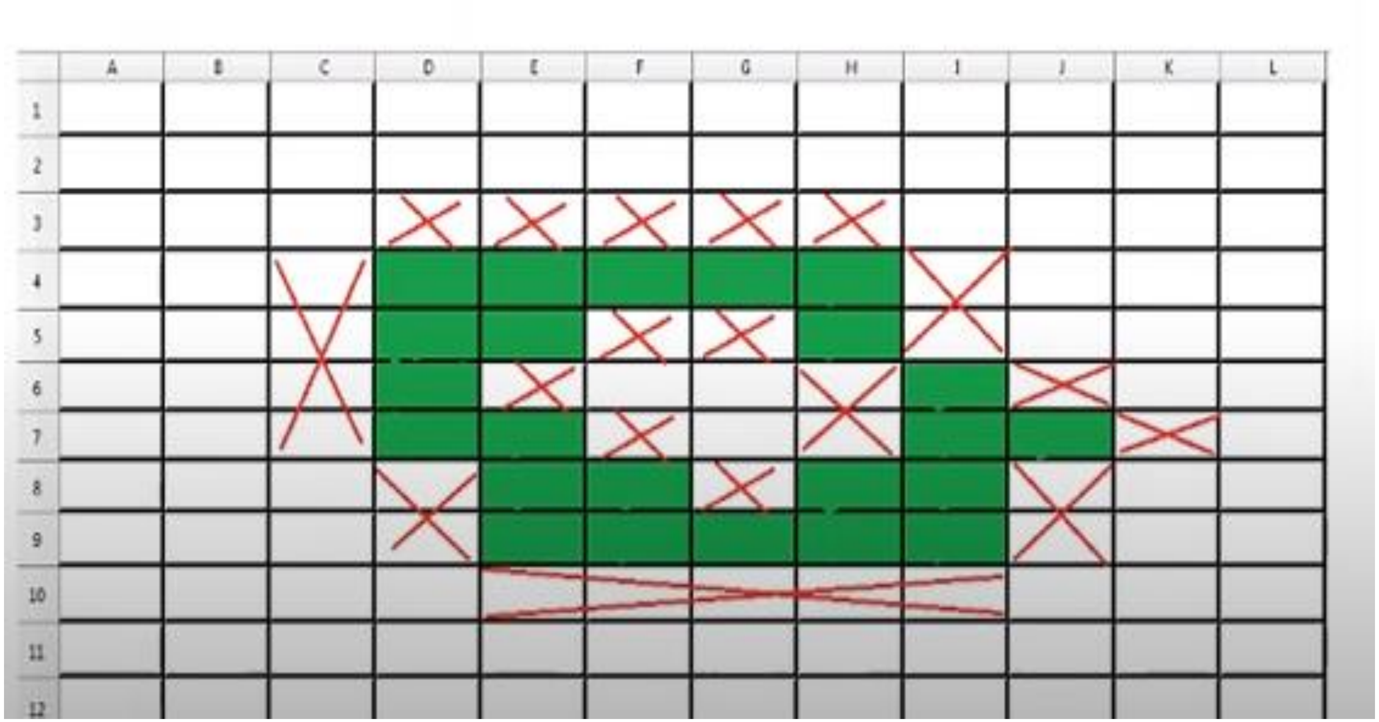

0 1 0
1 1 1
0 1 0

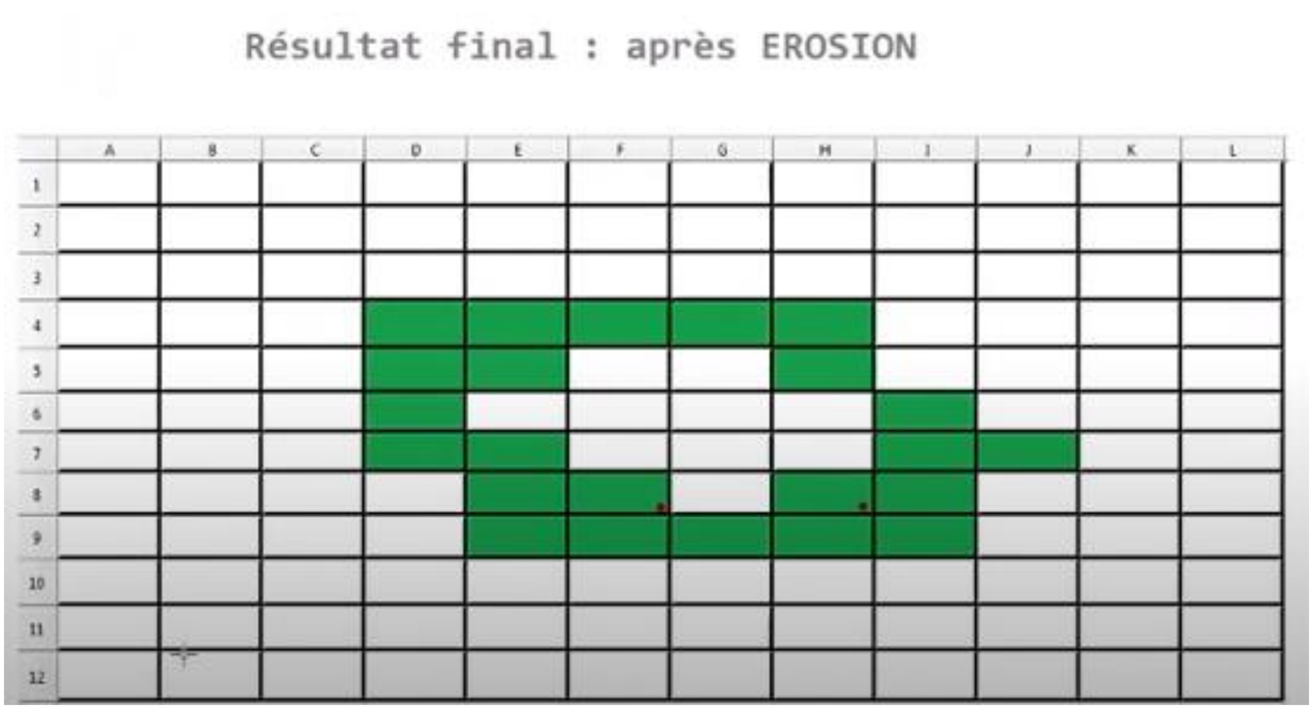
0	1	0
1	1	1
0	1	0

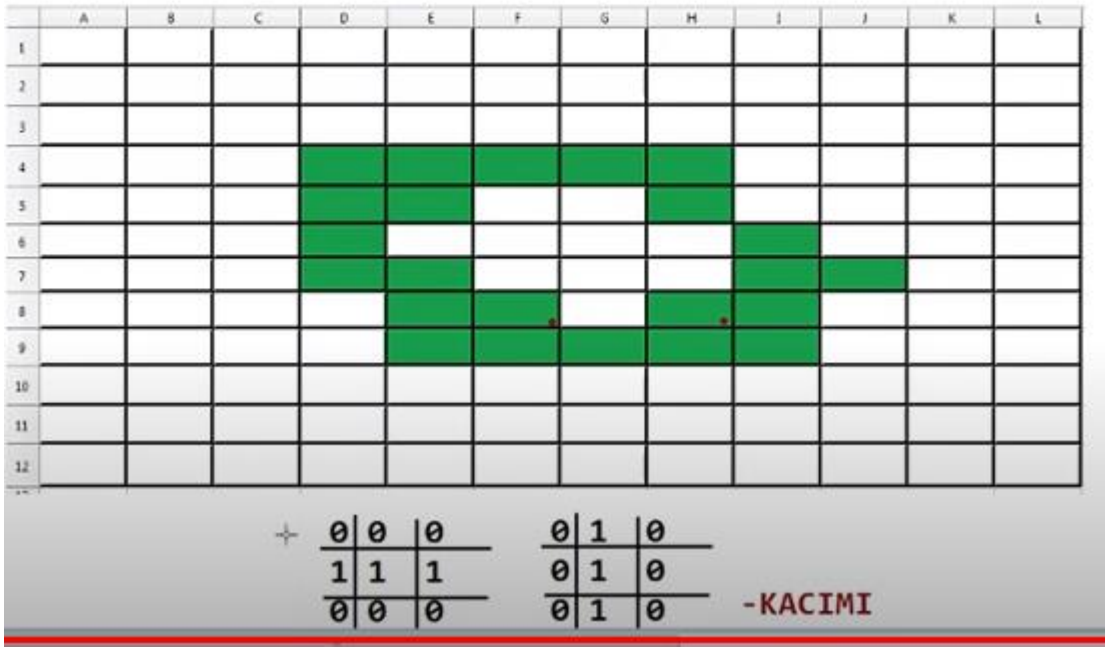


0	1	0
1	1	1
0	1	0




A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

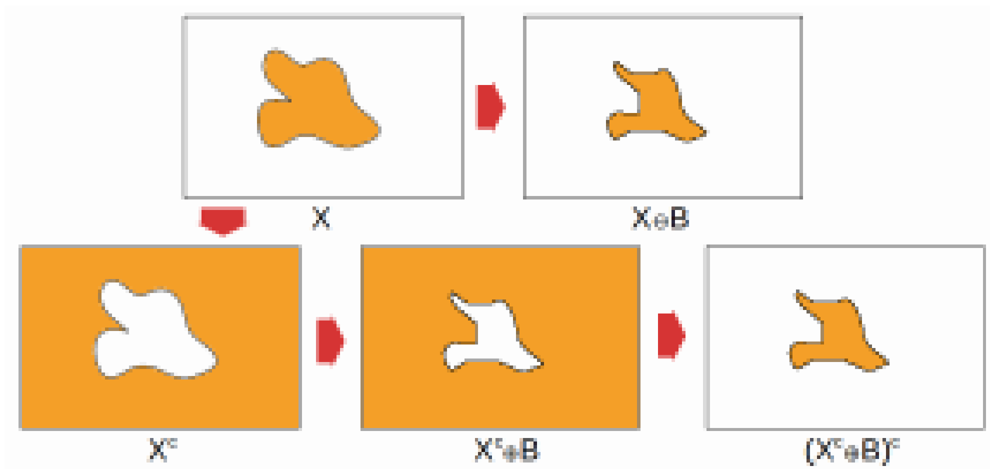

Résultat final : après EROSION
A B C D E F G H I J K L
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0 0 0
1 1 1
0 0 0
0 1 0
0 1 0
0 1 0
-KACIMI

Propriétés de la dilatation et l'érosion

- L'érosion est la transformation duale de la dilatation
- il est équivalent d'éroder un objet ou de dilater son complémentaire
- $X \, \Theta \, B = (X^{c} \oplus B)^{c}$

$(X \, \Theta \, B) \oplus B' \subset (X \oplus B') \, \Theta \, B$



Propriétés de la dilatation et l'érosion

- L'érosion et la dilatation sont invariantes en translation

$$X_z \ominus B = (X \ominus B)_z. \text{ De même } X_z \oplus B = (X \oplus B)_z$$

- L'érosion et la dilatation sont compatibles avec les homothéties

$$\lambda X \ominus \lambda B = \lambda(X \ominus B) \text{ et } \lambda X \oplus \lambda B = \lambda(X \oplus B)$$

- L'érosion et la dilatation sont des opérations croissantes

Si $X \subseteq Y$ alors $X \ominus B \subseteq Y \ominus B$ et $X \oplus B \subseteq Y \oplus B$.

Si X est inclus dans Y, alors l'érodé (le dilaté) de X est inclus dans l'érodé (le dilaté) de Y.

- La dilatation est commutative et associative

$$X \oplus B = B \oplus X \text{ et } (X \oplus B) \oplus C = X \oplus (B \oplus C)$$

Propriétés de la dilatation et l’érosion

- La dilatation est distributive par rapport à l’union

$$(\cup_i X_i) \oplus B = \cup_i (X_i \oplus B)$$

- L’érosion est distributive par rapport à l’intersection

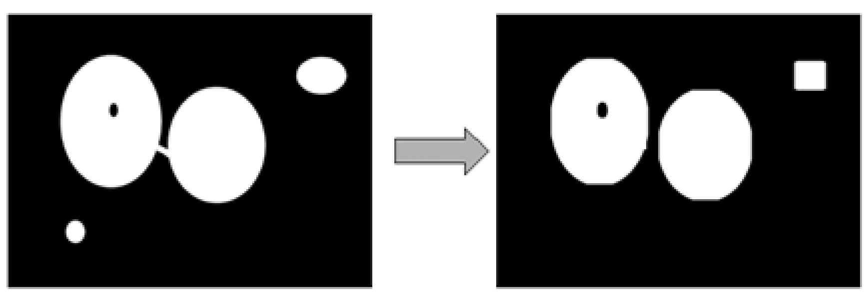
$$(\cap_i X_i) \ominus B = \cap_i (X_i \ominus B)$$

L'opération obtenue par la succession d'une érosion et d'une dilatation par le même élément structurant est l'ouverture morphologique. Elle se note :

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

En général, l'ensemble traité diffère de l'ensemble de départ :

✓L'ensemble ouvert est plus régulier et moins riche en détails que l'ensemble initial.
✓La transformation par ouverture adoucit donc les contours.
✓L'ouverture joue le rôle d'un filtrage.
✓Comme le montre l'image suivante, l'ouverture a pour propriété d'éliminer toutes les parties des objets qui ne peuvent pas contenir l'élément structurant:



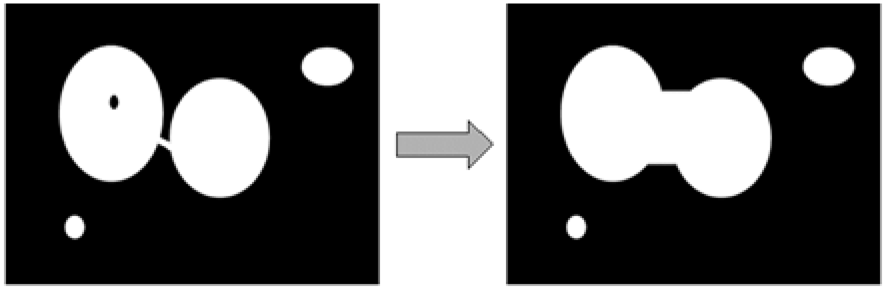
- En inversant l'ordre des opérations utilisées pour définir l'ouverture, nous obtenons une nouvelle opération appelée fermeture ; c'est une dilatation suivie d'une érosion par le même élément structurant :

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

- Il s'agit d'une opération duale de l'ouverture pour la complémentation car :

$$(X \circ B)^c = X^c \bullet \breve{B} \text{ et } (X \bullet B)^c = X^c \circ \breve{B}$$

- Comme le montre l'image suivante, la fermeture a pour propriété de combler tout ce qui est de taille inférieur à l'élément structurant:



Propriétés de l'ouverture et de la fermeture

- L'ouverture et la fermeture sont des transformations croissantes.

$$\text{Si } X \subseteq Y \text{ alors } X \circ B \subseteq Y \circ B \text{ et } X \bullet B \subseteq Y \bullet B$$

- L'ouverture est anti-extensive alors que la fermeture est extensive :

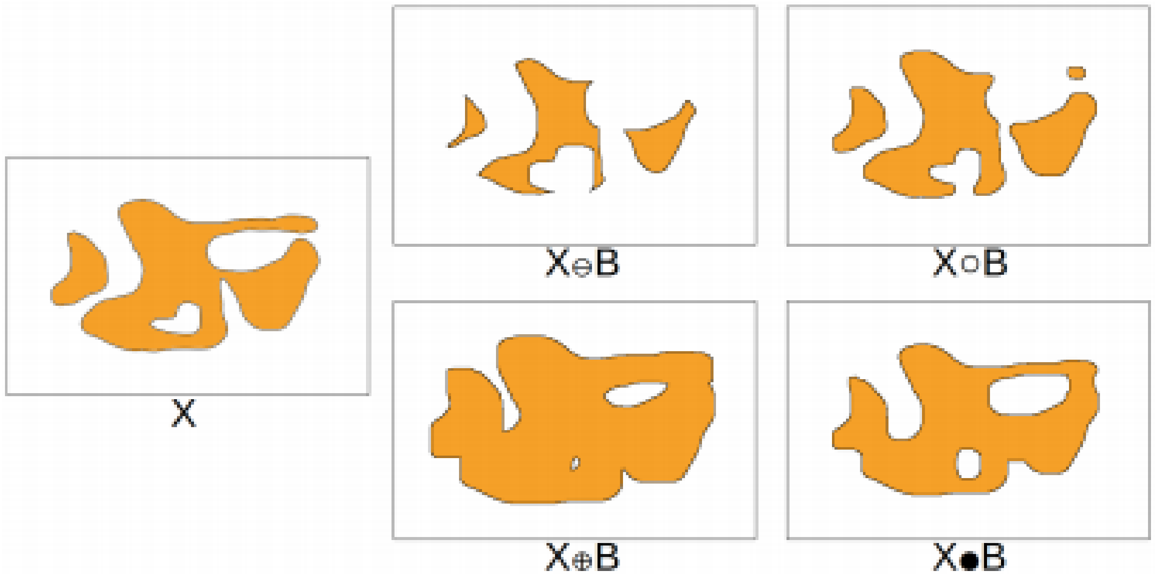
$$X \circ B \subseteq X \text{ et } X \subseteq X \bullet B$$

- L'ouverture et la fermeture sont des opérateurs idempotents(se dit d'une opération réalisée jusqu'à ce qu'elle n'ait plus d'action)

$$(X \circ B) \circ B = X \circ B \text{ et } (X \bullet B) \bullet B = X \bullet B$$

- L'ouverture et la fermeture ne dépendent pas de l'origine de l'élément structurant. Soit

$$X \circ B_z = X \circ B \text{ et } X \bullet B_z = X \bullet B$$



Ouverture et fermeture


image initiale


image binarisée


image érodée


image dilatée


image ouverte


image fermée

La morphologie → Elément structurant → La dilatation → L'érosion → L'ouverture → La fermeture