CHAPITRE 2 : Analyse basée sur le concept de volume de contrôle

1- Introduction

Le choix d'une description dépend de la facilité de compréhension et de calcul. En mécanique des fluides, il est plus facile de travailler en eulérien car un fluide possède un nombre infiniment grand de particules, dont le mouvement est irrégulier (surtout si l'écoulement est turbulent). En mécanique des solides, il est plus facile de travailler en lagrangien car les parcelles de solides restent proches les unes des autres au cours du temps.

En effet, le fluide est caractérisé par sa capacité à s'écouler contrairement au solide, l'écoulement est composé du déplacement des particules mais aussi de leurs déformations pendant le mouvement.

Pour résoudre cette difficulté, on analyse l'évolution des quantités physiques (masse, quantité de mouvement, énergie) à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines macroscopiques : le but est d'établir une correspondance entre un bilan et le transport des grandeurs physiques par l'écoulement lié à ce bilan.

2- Volume de contrôle

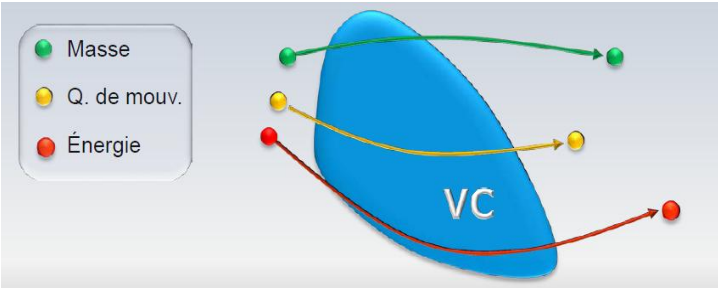
En mécanique des fluides, on peut travailler

- en un point donné M : c'est la description locale, le mouvement est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles.
- sur un volume de fluide, dit volume de contrôle : la description est plus globale, le mouvement est décrit par des équations intégrales.

2-1. définition du volume de contrôle :

Un volume de contrôle est une zone de l'espace définie par l'utilisateur pour l'étude des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie des systèmes en écoulement.

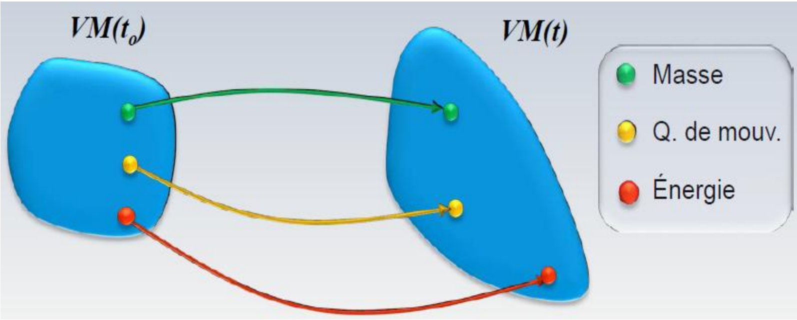
Un volume de contrôle est un volume imaginaire VC par lequel le fluide s'écoule, les quantités physiques le traverse à travers sa surface de contrôle SC.



Un volume de contrôle est un système ouvert dont la surface peut être mobile ou fixe.

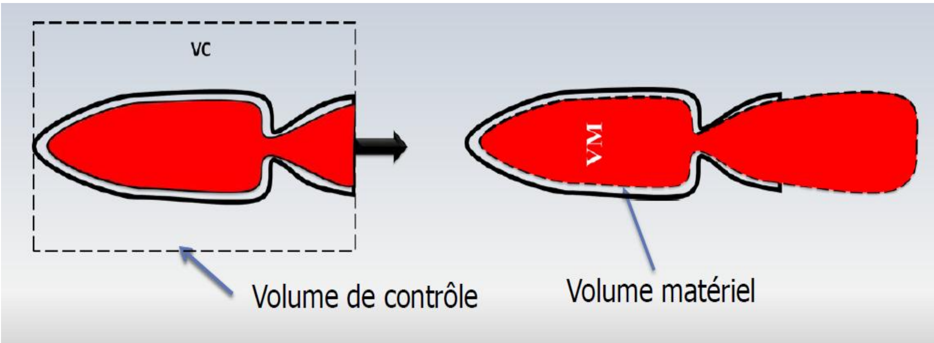
2-2. Volume matériel :

Un volume matériel est un volume de fluide qui se déplace, se déforme mais contient le même nombre de particules fluides, son enveloppe appelée surface matérielle est composée de particules fluides. On utilise le volume matériel dans la description lagrangienne.



Un volume matériel est un système fermé.

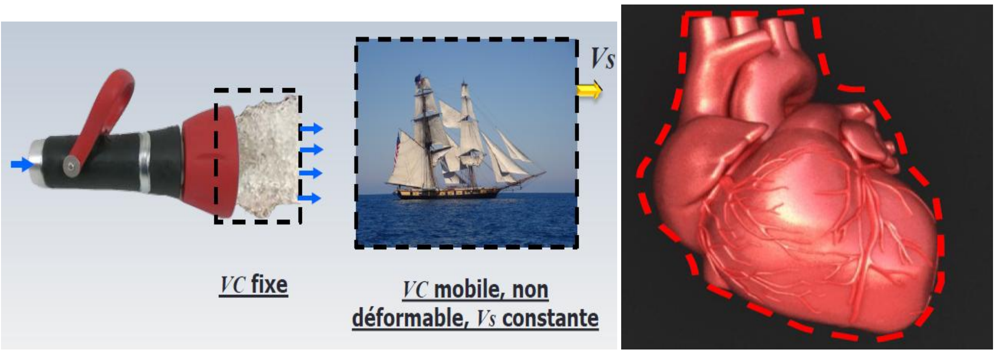
Le VC est doté d'entrées et sorties du fluide contrairement au VM.



Le VC peut être fixe, donc ne se déplace pas, ne se déforme pas avec l'écoulement.

Le VC peut être en mouvement et se déplace avec une vitesse sans se déformer.

Le VC peut être déformable.



Volume déformable

Différents cas du VC

3- Equations de transport de Reynolds

Le théorème de Reynolds ou de Leibniz-Reynolds sert à établir un lien entre le point de vue d'Euler et celui de Lagrange.

Sur un volume matériel VM, on calcule la grandeur B tel que :

$$B = \int_{VM(t)} \rho b dv$$

Avec ρdv = dm (élément de masse)

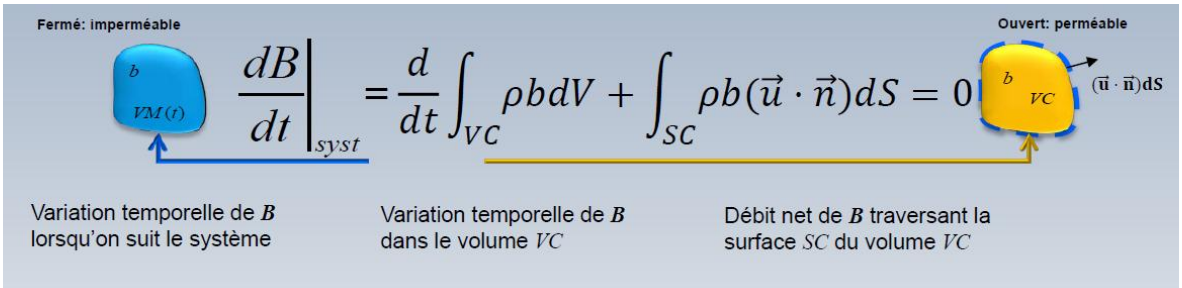
b : valeur de B par unité de masse (quantité intensive de la grandeur physique B)

Si on veut calculer la variation temporelle de cette quantité :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VM(t)} \rho b dv$$

On ne pourra pas définir cette variation car VM (t) dépend du temps (il est en mouvement et se déforme) : VM(t+dt) n'est pas égal à VM(t). C'est l'inconvénient du volume matériel.

On doit alors faire coïncider le VC (volume fixe) et le VM à un instant donné t et on effectue les calculs selon Euler c'est-à-dire sur VC. On obtient dans le cas où il n'y a pas de source ou de puits (la quantité est conservée), le bilan suivant :



D'où vient ce bilan ?

4- Equation de continuité

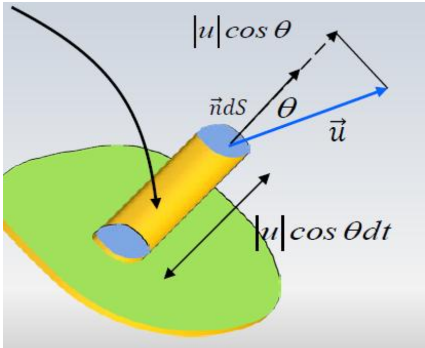
Afin de définir l'origine du bilan précédent, on va commencer par définir la notion de bilan de masse et débit.

On appelle flux, la quantité de grandeur qui transite ou traverse une surface S par unité de temps : flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie.

Le flux de masse ou quantité de matière qui traverse la surface Sest appelé débit.

Le débit volumique élémentaire est le volume élémentaire traversant une surface donnée durant un temps dt :

$$q_v = \frac{dv}{dt} = \vec{u}.\overrightarrow{ds} = \vec{u}.\vec{n}\,ds = |u|cos\theta ds$$



Toute surface possède un vecteur de direction appelé $\vec{n}$ de module unitaire et dirigé vers l'extérieur donc $\overrightarrow{dS} = \vec{n}$ds

Donc le débit volumique total sur S sera

$$Q_v = \int \vec{u}\,.\overrightarrow{ds}$$

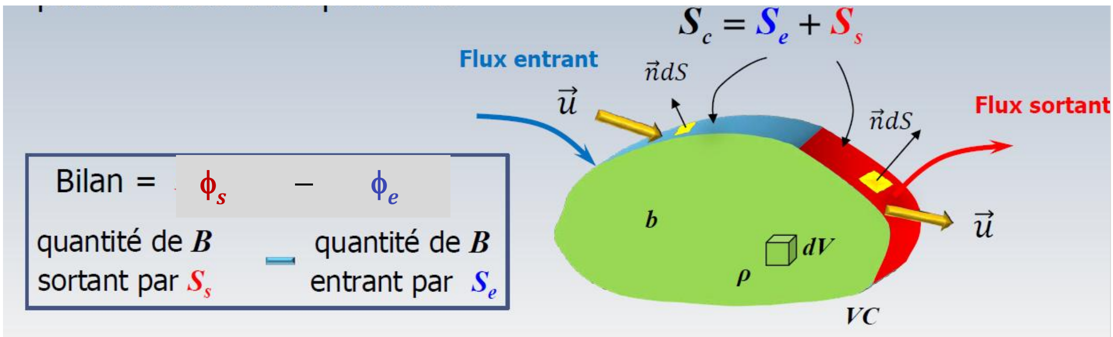
Meme chose pour le débit masique : $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \int \rho\,\vec{u}.\overrightarrow{ds} = \rho Q_v$ avec $m = \int \rho dv$

Si on généralise pour toute grandeur physique B , on a en mécanique des fluides généralement les bilans des quantités suivantes :

	B propriété	$b = \frac{B}{m}$ variable intensive
masse	m	1
Q.mouv	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
énergie	E	e

4.1. Bilan

On considère un volume de contrôle VC limité par la surface SC et traversé par un fluide transportant la quantité B : ϕ



La somme algébrique des flux entrant et sortant est égale à l'accumulation positive ou négative (production ou destruction) avec Sc=Ss+Se

$\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t} = \int_{Ss} \rho b\vec{u}.\vec{n}ds - \int_{Se} \rho b\vec{u}.\vec{n}ds$ avec b =B/m

D'un autre coté $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \int_{\mathrm{VC}} \rho \mathrm{bdv}$

Accumulation + Bilan des flux=0

dans le VC au travers la SC

Exemple de la conservation de masse appelée aussi équation de continuité **b=1 :**

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \int_{\mathrm{VC}} \rho \mathrm{dv} + \int_{SC} \rho\vec{u}.\vec{n}ds = 0$$

Donc le théorème de transport de Reynolds s'écrit pour un VM(t) qui coïncide avec VC (page 3) :

$$\left.\frac{d\boldsymbol{B}}{d\boldsymbol{t}}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b d v + \int_{SC} \rho b(\vec{u}.\vec{n}) d S$$

NB : Cette équation est valable pour un volume de contrôle fixe.

Pour un volume de contrôle qui se déforme ou se déplace , l'équation générale s'écrit :

$$\left.\frac{d\boldsymbol{B}}{d\boldsymbol{t}}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b d v + \int_{SC} \rho b(\vec{u}_{rel}.\vec{n}) d S$$

Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{u}_{rel}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}_s}$

$\vec{\boldsymbol{u}}$ vitesse du fluide

$\overrightarrow{\boldsymbol{u}_s}$ vitesse du volume de contrôle

4.2. Cas particuliers de l'équation de continuité:

1- écoulement permanent :

$$\int_{\mathrm{SC}} \rho \, \vec{\mathrm{u}}.\vec{\mathrm{n}}\mathrm{ds}=0$$

2- écoulement incompressible (même s'il est instationnaire ou non permanent)

$$\int_{\mathrm{SC}} \vec{\mathrm{u}}.\vec{\mathrm{n}}\mathrm{ds}=0$$

3- cas où les sorties et entrées sont uniformes (conservation des débits massiques et volumiques):

$$\int_{SC} \rho \vec{u}.\vec{n} ds = 0 \rightarrow \sum_{sorties} \rho_i u_i S_i = \sum_{entrées} \rho_i u_i S_i \rightarrow \sum_{sorties} \dot{m}_i = \sum_{entrées} \dot{m}_i$$

$$\int_{SC} \vec{u}.\vec{n} ds = 0 \rightarrow \sum_{sorties} u_i S_i = \sum_{entrées} u_i S_i \rightarrow \sum_{sorties} Q_i = \sum_{entrées} \dot{Q}_i$$

5- Equation de conservation de la quantité de mouvement, 2ème loi de Newton :

Le principe de transport est le même pour la quantité de mouvement,

$$\left.\frac{dm\vec{u}}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{u} dv + \int_{SC} \rho\vec{u}(\vec{u}.\vec{n}) dS$$

Avec $\vec{B}$= m$\vec{u}$ donc b = $\vec{u}$

La 2ème loi de newton dit que :

$$\left.\frac{dm\vec{u}}{dt}\right)_{syst} = \sum \vec{F}_{ext}\Big)_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{u} dv + \int_{SC} \rho\vec{u}(\vec{u}.\vec{n}) dS$$

Et puisque à un instant donné t, le VM coïncide avec le VC donc :

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big)_{syst} = \sum \vec{F}_{ext}\Big)_{VC}$$

Dans le cas permanent et le volume de contrôle ne se déforme pas :

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{u} dv = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_{rel}} = \vec{u}$$

On a : $\sum \vec{F}_{syst} = \int_{SC} \rho\vec{u}(\vec{u}.\vec{n}) dS$

Et si les vitesses d'entrée et sortie sont uniformes sur la surface :

$$\sum \vec{F}_{VC} = \int_{SC} \rho\vec{u}(\vec{u}.\vec{n}) dS = \vec{u}\int_{SC} \rho(\vec{u}.\vec{n}) dS = \sum_{sortie} \dot{m}_i \vec{u_i} - \sum_{entrée} \dot{m}_i \vec{u_i}$$

Pour une seule entrée et une seule sortie, on obtient l'équation suivante ou théorème d'Euler

$$\boxed{\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m}\,(\vec{u}_{sortie} - \vec{u}_{entrée})}$$

6- Dérivée des équations de bilans

Le calcul effectué sur des équations intégrales sur un volume de contrôle permet d'aboutir à des équations locales sous forme de dérivées de ces intégrales.

6-1. Dérivée de l'équation de conservation de la masse

Sous sa forme intégrale l'équation s'écrit, en supposant qu'il n'ya pas de production ou destruction de la matière :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int_{\mathrm{VC}} \rho \mathrm{dv} + \int_{SC} \rho\vec{u}.\vec{n}ds = 0$$

En utilisant le théorème de Green – Ostogradski pour une quantité quelconque $\vec{F}$, appelé aussi théorème de flux-divergence stipule que :

$$\oiint_{Sc} \vec{F}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{VC} \vec{\nabla}.\vec{F}\, dv$$

Donc les débits traversant la surface SC sont écrits en termes d'intégrale de volume par leur divergence et l'équation devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{VC}} \rho\, \mathrm{dv} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int_{\mathrm{VC}} \rho \mathrm{dv} + \int_{VC} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{(\rho u)}dv = 0$$

D'où :

$$\int_{\mathrm{VC}} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\mathrm{dv} = \int_{\mathrm{VC}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{u})\right)\mathrm{dv} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{u}) = 0$$

C'est l'équation de continuité

6-2. Dérivée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Sous sa forme intégrale l'équation s'écrit, :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int_{\mathrm{VC}} \rho\vec{\mathrm{u}}\mathrm{dv} + \int_{SC} \rho\vec{u}.\overrightarrow{(u.\vec{n})}ds = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

En utilisant le théorème de Green – Ostogradski:

$$\oiint_{Sc} \rho\vec{u}.\overrightarrow{(u.\vec{n})}ds = \iiint_{VC} \vec{\nabla}.\rho\vec{u}\,\vec{u}\, dv = \iiint_{VC} \vec{u}.(\vec{\nabla}.\rho\vec{u})\, dv$$

Donc les flux traversant la surface SC sont écrits en termes d'intégrale de volume par leur divergence et l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{u}dv + \int_{VC} \vec{u}.\overrightarrow{(\nabla}.\rho\vec{u})dv = \int_{VC} \rho\vec{g}dv + \int_{SC} -p\vec{n}ds + \int_{SC} \tau\vec{n}ds$$

De la même manière on transforme les intégrales sur les SC en intégrales sur le VC des forces surfaciques (force de pression et force visqueuse ou de frottement)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{u}dv + \int_{VC} \vec{u}.\overrightarrow{(\nabla}.\rho\vec{u})dv = \int_{VC} \rho\vec{g}dv + \int_{VC} -\vec{\nabla}pdv + \int_{SC} \vec{\nabla}\tau dv$$

D'où en prenant l'intégrale sur le même volume Vc en commun, on obtient l'équation différentielle ou la dérivée de la quantité de mouvement par :

$$\int_{VC} \left\{\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{(\nabla}.\rho\vec{u})\right\} dv = \int_{VC} \left\{-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}dv + \vec{\nabla}\tau\right\}dv$$

$$\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{(\nabla}.\rho\vec{u}) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}dv + \vec{\nabla}\tau$$

Cette équation est appelée équation de mouvement.