

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة دروس في مقياس

تحليل السلاسل الزمنية 2

من إعداد الاستاذ : إبراهيم عدلي

السنة الجامعية 2019-2020

فهرس المحتويات

الصفحة	العنوان
i	المقدمة
1	الفصل التمهيدي: العمليات العشوائية
1	1. مفهوم العمليات العشوائية
2	2. أنواع العمليات العشوائية
4	3. الإستقرارية
6	4. شروط الاستقرارية
10	الفصل الأول : نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة
10	1. خصائص نماذج الانحدار الذاتي
12	2. طرق تقدير نماذج الانحدار الذاتي
17	3. خصائص نماذج المتوسطات المتحركة
18	4. طرق تقدير نماذج المتوسطات المتحركة
20	5. خصائص نماذج ARMA
22	6. طرق تقدير نماذج ARMA
24	الفصل الثاني : منهجية بوكس جينكينز
24	1. مرحلة التعرف
27	2. مرحلة التقدير
28	3. مرحلة التشخيص
30	4. مرحلة التنبؤ
32	الفصل الثالث : السلاسل غير المستقرة و الإنحدار الزائف
32	1. خصائص السلاسل غير المستقرة
34	2. تجربة يول 1926
38	3. تجربة جرونجر 1974
42	4. خصائص الانحدار الزائف

45	الفصل الثالث : طرق التكامل المشترك
45	1. مفهوم التكامل المشترك
49	2. طريقة أنجل وجرونجر ذات المرحلتين
55	3. طريقة جوهانسن
59	4. تمارين الفصل الثالث
60	الفصل الرابع : نماذج أشعة الإنحدار الذاتي VAR و VECM
60	1. مفهوم نماذج VAR
65	2. إستقرارية نماذج VAR
67	3. التحليل الديناميكي لنماذج VAR
70	4. تمارين الفصل الرابع
72	قائمة المصطلحات
75	قائمة المراجع

الفصل التمهيدي : العمليات العشوائية

مفهوم العمليات العشوائية

السلسلة الزمنية عبارة عن تتابع قيم عبر الزمن ، فمثلا سلسلة الناتج الداخلي الخام للجزائر للفترة 2000- 2018 هو عبارة عن تتابع قيم حقيقية خلال هاته الفترة، لنمذجة هاته السلسلة نفترض أن كل قيمة من قيمها هي نتيجة لمتغير عشوائي ما، له خصائصه وتوزيعه الاحتمالي. تتابع هاته المتغيرات العشوائية عبر الزمن يسمى عملية عشوائية.

الفكرة الاساسية التي يقوم عليها التحليل الحديث للسلاسل الزمنية هي افتراض أن هناك عمليات عشوائية قادرة على توليد عدد لا نهائي من السلاسل الزمنية ، لذلك نسعى من خلال دراسة خصائص السلسلة الزمنية محل الدراسة معرفة العملية العشوائية التي ولدت لنا هاته السلسلة ، فإذا تمكنا من معرفة ذلك سهل علينا استخدام هاته العملية العشوائية في توليد قيم مستقبلية.

العمليات العشوائية المستقرة

تكون السلسلة الزمنية مستقرة إذا كانت خصائصها (المتوسط ، التباين ، التغير) هي نفسها عند قياسها من أي مجال من مجالات السلسلة، بمعنى أنها مستقلة عن الزمن . من خلال هذا التعريف تكون السلسلة الزمنية التي تظهر اتجاهًا عامًا أو موسمية غير مستقرة. يمكننا أن نجعل هذا التعريف أكثر دقة من خلال وضع إطار إحصائي مناسب. تعريف: تكون العملية العشوائية y_1, y_2, \dots, y_t مستقرة إذا كان المتوسط ، التباين والتغير الذاتي مستقلة عن الزمن :

$$E[y_t] = \mu, \text{ مهما يكن } t$$

$$\text{var}(y_t) = E[(y_t - \mu)^2] = \gamma_0 = \sigma^2 \text{ مهما يكن } t$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k \text{ مهما يكن } t$$

حيث : يعبر μ عن المتوسط ، σ^2 التباين ، γ_k دالة التغير

ملاحظة: التعريف المذكور أعلاه للاستقرارية هو ما يسمى عادة بالشرط الضعيف، لكن -لحسن الحظ- يكفي لأهدافنا.

الضجة البيضاء white noise

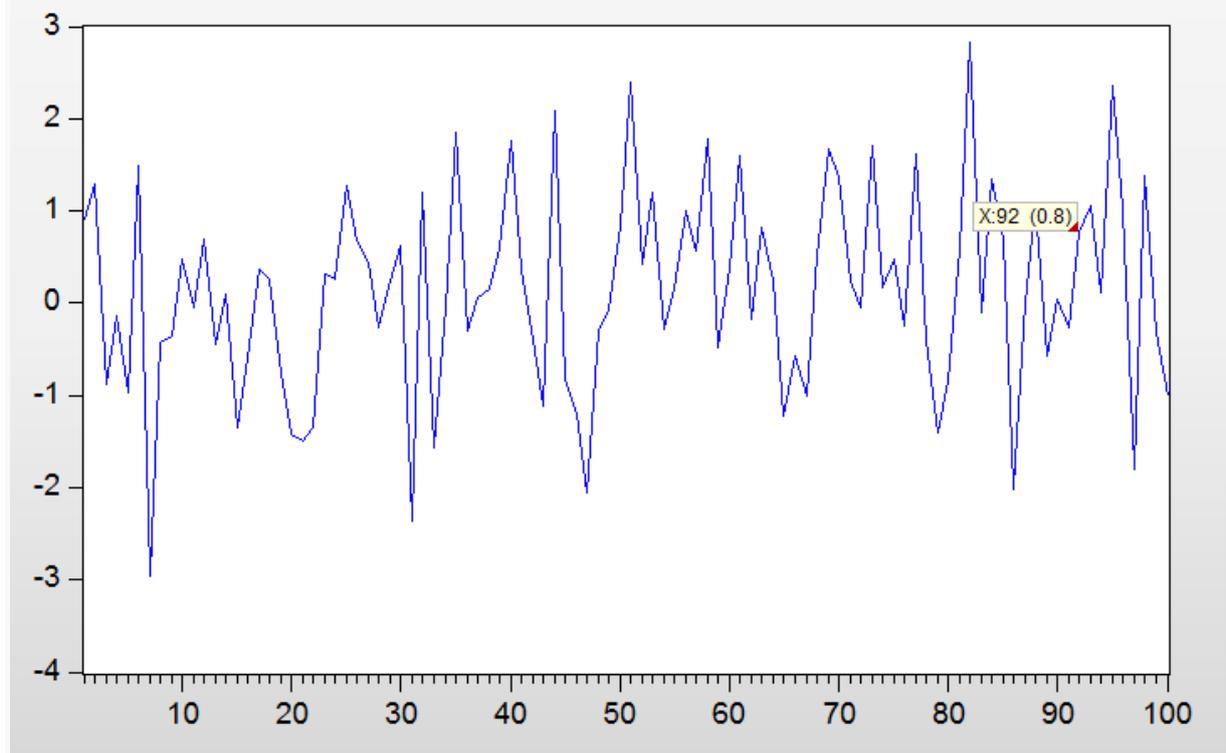
هناك عملية عشوائية مستقرة لها أهمية كبيرة في تحليل السلاسل الزمنية تسمى بالضجة البيضاء White noise ونرمز لها بالرمز ε_t ، لها الخصائص التالية:

$$E[\varepsilon_t] = 0, \text{ مهما يكن } t$$

$$\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \text{ مهما يكن } t$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \text{ مهما يكن } t$$

الشكل التالي يوضح محاكاة لضجة بيضاء طولها $n=100$



كيفية معرفة الاستقرار

بالنسبة للعمليات العشوائية النظرية (التي لها صيغة رياضية) نقوم بدراسة استقراريتها من خلال التحقق من الشروط الثلاثة السابقة. أما بالنسبة للسلاسل الزمنية (التي هي عبارة عن تتابع قيم عددية) فهناك اختبارات احصائية وطرق بيانية نستخدمها لذلك، من أشهرها اختبار ديكي فولر وأعمدة الارتباط الذاتي التي سندرسها فيما بعد.

مثال 1: أدرس استقرارية العمليات العشوائية التالية:

$$y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0$$

حيث ε_t عبارة عن ضجة بيضاء

$$y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \quad -1$$

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$Var(y_t) = Var(\varepsilon_t) + Var(\varepsilon_{t-1}) + 2cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = E\left[\left(y_t - E(y_t)\right)\left(y_{t-k} - E(y_{t-k})\right)\right] = E(y_t y_{t-k})$$

$$\begin{aligned} E(y_t y_{t-k}) &= E\left[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} - \varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1} - \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1}\right] \\ &= 0 \quad \forall k > 1 \end{aligned}$$

من أجل k=1:

$$\begin{aligned} E(y_t y_{t-1}) &= E\left[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right] \\ &= 0 - 0 - \sigma_\varepsilon^2 + 0 = -\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

ومنه فـ y_t عملية عشوائية مستقرة لأن كل من المتوسط والتباين ودالة التغيرات مستقرة عن الزمن t. تسمى هاته العملية العشوائية بالمتوسطات المتحركة من الدرجة الأولى MA(1)

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0 \quad -2$$

$$x_{t-1} = x_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \quad , \quad x_{t-2} = x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t = x_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = x_{t-3} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

وهكذا بالتعويض التراجعي نجد:

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

$$E(x_t) = E\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t E(\varepsilon_i) = 0$$

$$Var(x_t) = Var\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \sigma_\varepsilon^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned} E(x_t x_{t-k}) &= E\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i \sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i\right) \quad \forall k > 0 \\ &= E\left[(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{t-k} + \dots + \varepsilon_t)(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{t-k})\right] \\ &= E(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_{t-k} + \\ &\quad \varepsilon_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_2 \varepsilon_{t-k} + \\ &\quad \dots \\ &\quad \varepsilon_{t-k}^2 + \dots + \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t + \\ &\quad \dots \\ &\quad \varepsilon_t \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \\ &= E(\varepsilon_1^2) + 0 + \dots + E(\varepsilon_2^2) + 0 + \dots + E(\varepsilon_{t-k}^2) + \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$E(x_t x_{t-k}) = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$$

إذن من خلال تباين العملية العشوائية ودالة تباينها اللتان غير مستقلتان عن الزمن، نستنتج أنها عملية عشوائية غير مستقرة.

تعتبر هاته العملية من أشهر العمليات العشوائية غير المستقرة وتسمى بالمشي العشوائي (دون انحراف)

اهمية دراسة الاستقرار

عند دراستنا لمنهجية بوكس جينكينز سوف نرى أن شرط الاستقرار أمر ضروري لنمذجة السلسلة الزمنية ، فلو وجدنا السلسلة غير مستقرة لابد ان نجعلها مستقرة من خلال الطرق التي سندرسها لاحقا - ان شاء الله- ، فيا ترى لماذا تعتبر الاستقرار شرط ضروري؟

إذا كانت العملية العشوائية - المولدة للسلسلة محل الدراسة - غير مستقرة فإننا سنواجه صعوبات كبيرة في عملية النمذجة سواء من ناحية دراسة خصائصها واستكشافها أو من ناحية تقدير المعلمات وأيضا التنبؤ¹

المحاضرة الثانية: دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

دالة الارتباط الذاتي

نرمز لدالة الارتباط الذاتي **autocorrelation function (ACF)** ذات الدرجة (التأخير) K بالرمز ρ_k وتساوي (في حالة المجتمع):

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

حيث γ_k هي دالة التغير الذاتي للمجتمع ، و γ_0 هو تباين العملية العشوائية:

$$\gamma_k = \text{COV}(y_i, y_{i-k}) = E \left[(y - E(y)) (y_{i-k} - E(y_{i-k})) \right]$$

أما دالة الارتباط الذاتي للعينة فتساوي:

$$r_k = \frac{s_k}{s_0}$$

حيث تمثل s_k دالة التغير والتي تساوي:

$$s_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n (y_i - \bar{y})(y_{i-k} - \bar{y})$$

\bar{y} يمثل المتوسط الحسابي:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$s_0 \text{ و } S_0 \text{ يمثل التباين أي: } s_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

¹ للتفصيل أكثر ارجع الى كتاب التحليل الحديث للسلاسل الزمنية ص 101

<https://www.physics-pdf.com/2019/01/Book-Time-Series-pdf.html>

رسم قيم دالة الارتباط الذاتي في أعمدة متغيرة مع قيم K يسمى بأعمدة الارتباط الذاتي correlogram . وعادة ما يتم أخذ $n/3 = k$ أو $n/4$

مثال 2: أوجد دالة الارتباط الذاتي للعمليات العشوائية التالية :

$$y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0$$

حيث ε_t عبارة عن ضجة بيضاء

الحل:

$$y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - 1$$

سبق وأن وجدنا عند دراسة الإستقرارية:

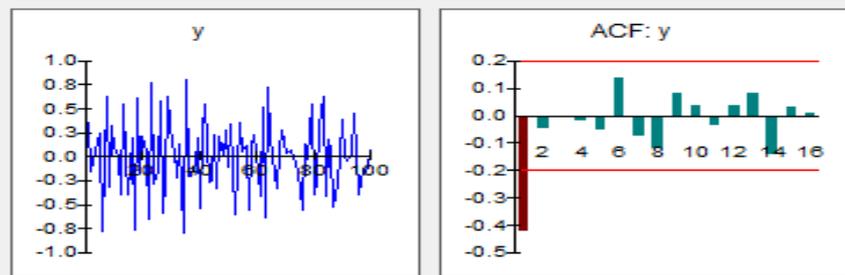
$$\gamma_0 = \text{Var}(y_t) = 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -\sigma_\varepsilon^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

ومنه نجد :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -0.5 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

الشكل التالي يوضح دالة الارتباط الذاتي لمحاكاة العملية العشوائية $y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ حجمها 100



$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0 \quad -2$$

سبق وأن وجدنا عند دراسة الإستقرارية:

$$\gamma_0 = \text{Var}(x_t) = t\sigma_\varepsilon^2$$

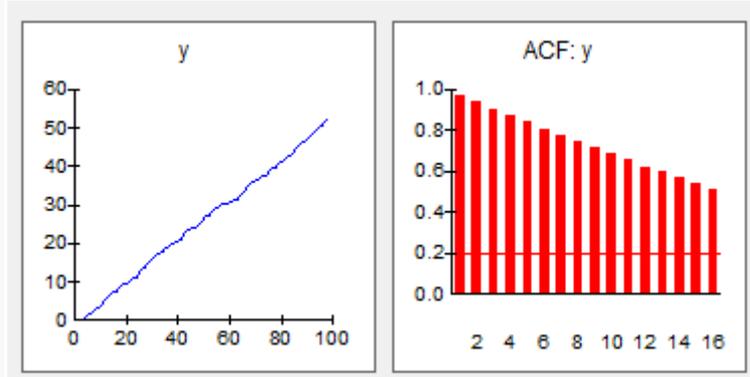
$$\gamma_k = (t - k)\sigma_\varepsilon^2$$

ومنه نجد :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(t-k)\sigma_\varepsilon^2}{t\sigma_\varepsilon^2} = 1 - \frac{k}{t}$$

الشكل التالي يوضح دالة الارتباط الذاتي لمحاكاة العملية العشوائية (t=100):

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0$$



ملاحظة هامة: نلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي للعملية العشوائية غير المستقرة تتلاشى ببطء

مثال 3:

لتوضيح كيفية حساب دالة الارتباط الذاتي من بيانات واقعية (سلسلة أرقام) نورد المثال التالي:

تمثل البيانات التالية المبيعات السنوية لأحد المحلات بالآلاف

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
المبيعات	22	24	25	26	23	28	30	29	32	34

أ- أحسب معاملات التغير الذاتي والارتباط الذاتي k=5

ب- مثل معاملات الارتباط الذاتي ببيانيا

الحل

دالة التغير

$$s_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n (y_i - \bar{y})(y_{i-k} - \bar{y})$$

$$s_1 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})(y_{i+1} - \bar{y})$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})(y_{i-1} - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} [(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + \dots \\ &\quad + (y_9 - \bar{y})(y_{10} - \bar{y})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})(y_{i-1} - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} [(22 - \bar{y})(24 - \bar{y}) + (24 - \bar{y})(25 - \bar{y}) + \dots \\ &\quad + (32 - \bar{y})(34 - \bar{y})] \end{aligned}$$

ومنه

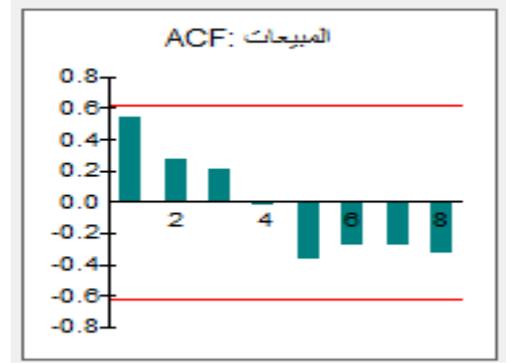
$$r_1 = \frac{s_1}{s_0} = 0.53$$

بنفس الطريقة نكمل باقي المعاملات

1	0.539
2	0.275
3	0.211
4	-0.024
5	-0.362
6	-0.278
7	-0.281
8	-0.331

أعمدة الارتباط الذاتي

رسم اعمدة الارتباط الذاتي باستخدام برنامج اكسل

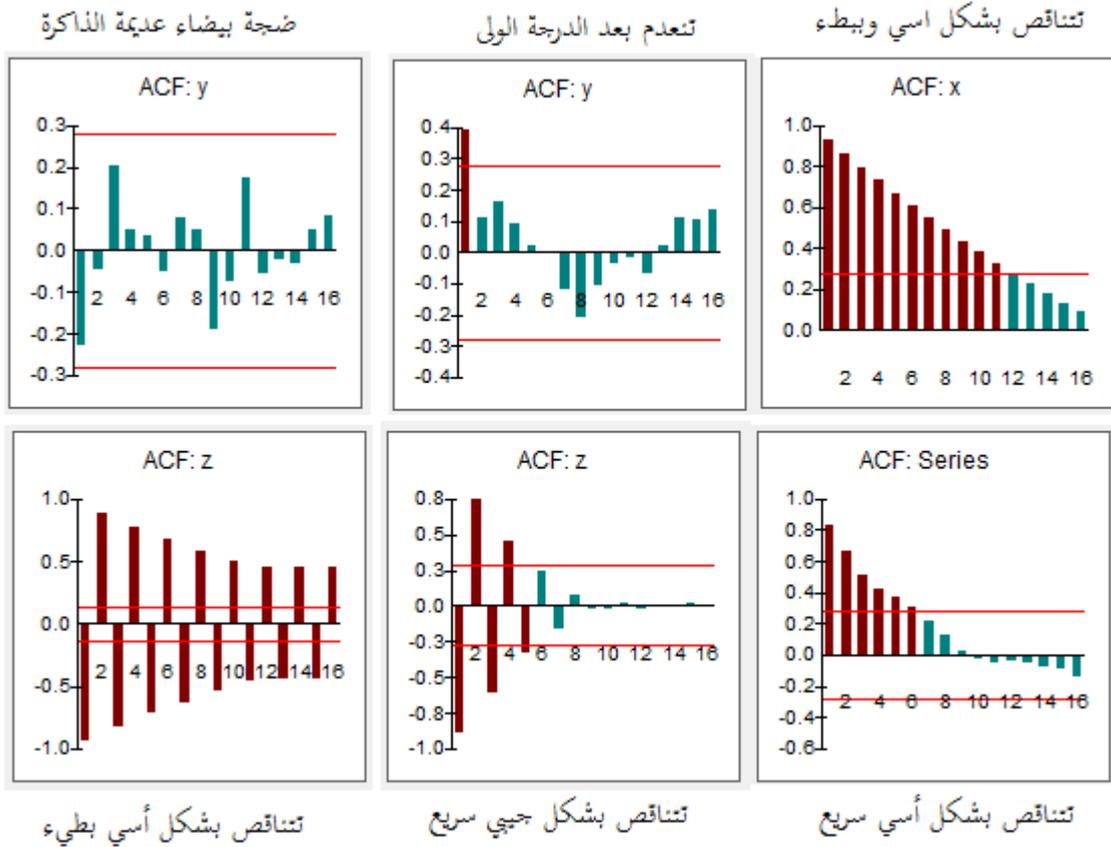


خصائص دالة الارتباط الذاتي وأهميتها:

- معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة 0 يساوي 1 أي: $\rho_0 = 1$
- معامل الارتباط الذاتي يكون دائما محصورا بين -1 و 1 أي: $\rho_k \in [-1, 1]$
- إذا كان $\rho_k = 0$ فمعناه لا توجد علاقة خطية بين y_i و y_{i-k} ، لكن قد توجد علاقة غير خطية؛
- الدالة ρ_k تناظرية حول 0، أي $\rho_k = \rho_{-k}$ ، لذلك دائما نكتفي بدراسة ρ_k

تأخذ دالة الارتباط الذاتي أشكالا كثيرة فتارة نجدتها تتناقص بشكل أسي بطيء وتارة بشكل أسي سريع ، وأحيانا تنعدم بعدة الفجوة الأولى فقط $k=1$ ، وتارة تتناقص بشكل جيبي ...، تميز هاته الأشكال مفيد جدا - بل يشكل حجرة الزاوية في منهجية بوكس جينكينز- في معرفة استقرارية السلسلة وتحديد النموذج المناسب لتمثيل سلوكها، وأيضا لدراسة صلاحية النموذج من خلال فحص شكل دالة الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي.

أمثلة عن أشكال دالة الارتباط الذاتي:



معنوية معاملات الارتباط الذاتي:

تغيرات دالة الارتباط الذاتي وإنعدامها عند فجوات معينة مفيد جدا في دراسة الاستقرار وتحديد نماذج $ARMA(p,q)$ ، لذلك لابد من إيجاد معيار معين من خلاله نحكم بانعدام قيمة ρ_k ، ففي الواقع التطبيقي لا يمكن ان نجد قيمة لـ $r_k = 0.000000$ بدقة .

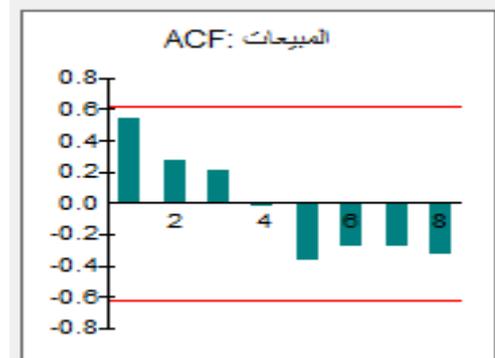
دالة الارتباط الذاتي للعيونة r_k (مقدر دالة المجتمع) تتبع تقريبا -لما يكون حجم العينة كبير- التوزيع الطبيعي:

$$r_k \sim N(0, 1/\sqrt{n})$$

يكون معامل الارتباط الذاتي ρ_k معنوي إذا كان: $|r_k| > z/\sqrt{n}$ عند مستوى α ، فمثلا عند مستوى 5% ، $z=1.96$ ، و n : يمثل حجم العينة .

مثال :

بالرجوع إلى المثال السابق نجد : $z/\sqrt{n} = 1.96/\sqrt{10} = 0.6198$ ، فإذا كانت $|r_k| > 0.6198$ تكون مختلفة عن الصفر إحصائياً عند مستوى 5% وإلا فلا . في المثال السابق نلاحظ أن جميع معادلات الارتباط الذاتي غير معنوية (محصورة بين 0.6198 و-0.6198):



دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دوراً هاماً لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي ، فمن خلالها نستطيع تحديد درجة نماذج الانحدار الذاتي ونماذج ARMA عموماً، فهي أحد الأدوات الهامة في منهجية بوكس جينكينز. وقبل التطرق لتعريف هاته الاداة وطرق تقديرها نقدم بمفهوم الارتباط الجزئي في نماذج الانحدار المعروفة.

عند قيامنا بإنحدار y على x_1, x_2, x_3, x_4 ، يعرف الارتباط الجزئي بين y و x_1 بالقانون التالي:

$$\frac{cov(y, x_1 | x_2, x_3, x_4)}{\sqrt{var(y | x_2, x_3, x_4) \cdot var(x_1 | x_2, x_3, x_4)}}$$

فهو يقيس صافي العلاقة الخطية بين y و x_1 بعد حذف تأثير المتغيرات x_2, x_3, x_4 و يحسب باستخدام معامل الارتباط بين سلسلة بواقي إنحدار y على x_2, x_3, x_4 وبواقي إنحدار x_1 على x_2, x_3, x_4 .

بالنسبة للسلاسل الزمنية، يعرف الارتباط الذاتي الجزئي ذو الدرجة h على أنه معامل الارتباط الجزئي بين y_i و y_{i-h} بشرط معرفة قيم $y_{i-1}, \dots, y_{i-h+1}$:

$$\frac{cov(y_i, y_{i-h} | y_{i-1}, \dots, y_{i-h+1})}{\sqrt{var(y_i | y_{i-1}, \dots, y_{i-h+1}) \cdot var(y_{i-h} | y_{i-1}, \dots, y_{i-h+1})}}$$

نلاحظ من خلال التعريف أن الارتباط الذاتي الجزئي من الدرجة الأولى يساوي الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى .

فمعامل الارتباط الذاتي الجزئي من الدرجة الثانية ϕ_{22} مثلا: يقيس قوة العلاقة الخطية بين y_i و y_{i-2} بعد حذف تأثير y_{i-1} .

مثل دالة الارتباط الذاتي ، تعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئي على أنها علاقة دالية بين معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{kk} والفجوة الزمنية k ، وتمثل أيضا في شكل أعمدة بيانية **correlogram**

خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تتميز دالة الارتباط الذاتي بعدة خصائص²:

- معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة صفريساوي الواحد ، أي $\phi_{00} = 1$ لأي عملية عشوائية مستقرة؛
- قيمة ϕ_{kk} تقع دائما ضمن المجال $[1,-1]$ ؛
- معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الأولى يساوي دائما معامل الارتباط الذاتي عند الدرجة الأولى أي $\phi_{11} = \rho_1$ ، لأنه لا يوجد متغير بين y_i و y_{i-1} ؛
- إذا كان $\phi_{kk} = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين متغيرين الفاصل الزمني بينهما k ، لكن قد توجد علاقة غير خطية .

تأخذ دالة الارتباط الذاتي الجزئي أشكالا شبيهة بدالة الارتباط الذاتي فتارة نجدها تتناقص بشكل أسي بطيء وتارة بشكل أسي سريع ، وأحيانا تنعدم بعدة الفجوة الأولى فقط $k=1$ ، وتارة تتناقص بشكل جيبي ...، تميز هاته الأشكال مفيد جدا - بل يشكل حجرة الزاوية في منهجية بوكس جينكينز- تحديد النموذج المناسب لتمثيل سلوكها، وأيضا لدراسة صلاحية النموذج من خلال فحص شكل دالة الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي.

طرق تقدير دالة الارتباط الذاتي الجزئي

هناك عدة طرق لتقدير دالة الانحدار الذاتي الجزئي من بيانات سلسلة زمنية ، من بينها:

² سمير مصطفى شعراوي ، التحليل الحديث للسلاسل الزمنية ص128-129

1. طريقة انحدار البواقي: تعتمد على إجراء الانحدار مرتين ، لتوضيح ذلك نفترض أننا نريد حساب ϕ_{22} - أي معامل الارتباط الذاتي الجزئي الذي يقيس العلاقة بين y_t و y_{t-2} بعد إزالة أثر y_{t-1} - فنقوم أولاً بانحدار y_t على y_{t-1} ثم نحسب سلسلة البواقي e_1 . بعد ذلك نجري إنحدار y_{t-2} على y_{t-1} ونحسب سلسلة البواقي e_2 ، ثم في الأخير معامل ارتباط بيرسون بين سلسلي البواقي e_1 و e_2 الذي يعتبر مقدر لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي الذاتي ϕ_{22} ، أي $\hat{\phi}_{22} = cor(e_1, e_2)$. تعتبر هاته الطريقة سهلة في التصور والفهم لأننا -ببساطة- قمنا بعزل أثر y_{t-1} على كل من y_t و y_{t-2} ثم قمنا بحساب الارتباط بين اللمتغيرين الخاليين من اثر y_{t-1} ، إلا انها طريقة بطيئة جدا ومكلفة تتطلب حساب عشرات الانحدارات (حسب عدد k) ، لذلك لن نعول عليها.

2. طريقة الانحدار المباشر: الطريقة الاولى تستخدم عدة معادلات لتقدير معامل واحد ، هناك طريقة اخرى اسرع -لكن ليست هي الافضل- والتي تستخدم معادلة واحدة لتقدير كل معامل ، فلتقدير معامل الارتباط الجزئي الأول ϕ_{11} نقوم بانحدار y_t على y_{t-1} :

$$y_t = \hat{\phi}_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ولتقدير معامل الارتباط الجزئي الثاني ϕ_{22} نقوم بانحدار y_t على y_{t-1} و y_{t-2} :

$$y_t = \phi_{21} y_{t-1} + \hat{\phi}_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t$$

وهكذا لتقدير معامل الارتباط الجزئي رقم k نقوم بانحدار y_t على y_{t-1} و y_{t-2} ... y_{t-k} :

$$y_t = \phi_{k1} y_{t-1} + \phi_{k2} y_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_{kk} y_{t-k} + \varepsilon_t$$

صحيح ان هاته الطريقة أسرع من الطريقة السابقة ومع ذلك تكلف الوقت كبير والعمليات الحسابية الهائلة .

3. باستخدام معادلات (نظام) يول والكر - سنتكلم عليها بالتفصيل لاحقا- ، تعطى وفق المعادلة التالية :

$$C_k = R_k \hat{\phi}_{ki} \Rightarrow \hat{\phi}_{ki} = R_k^{-1} C_k$$

حيث تمثل R_k مصفوفة الارتباط الذاتي وتساوي :

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{k-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & & r_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

أما C_k فيمثل عمود معاملات الارتباط الذاتي ، أي :

$$C_k = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_k \end{bmatrix} \text{ و } \hat{\phi}_{ki} \text{ يساوي } \hat{\phi}_{ki} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{k1} \\ \hat{\phi}_{k2} \\ \dots \\ \hat{\phi}_{kk} \end{bmatrix} \text{ ، تمثل معاملات الارتباط الذاتي الجزئي } \hat{\phi}_{kk}$$

من خلال العلاقة السابقة نستطيع تمثيل معاملات الارتباط الذاتي الجزئي $\hat{\phi}_{kk}$ بدلالة معاملات الارتباط الذاتي

لما $k=1$ ، بالتعويض نجد: $r_1 = \hat{\phi}_{11}$

لما $k=2$ ، بالتعويض نجد:

$$C_2 = R_2 \hat{\phi}_{2i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{21} \\ \hat{\phi}_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \hat{\phi}_{21} + r_1 \hat{\phi}_{22} \\ r_2 = r_1 \hat{\phi}_{21} + \hat{\phi}_{22} \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نحصل على قيمة $\hat{\phi}_{22}$

لما $k=3$ ، بالتعويض نجد:

$$C_3 = R_3 \hat{\phi}_{3i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{31} \\ \hat{\phi}_{32} \\ \hat{\phi}_{33} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \hat{\phi}_{31} + r_1 \hat{\phi}_{32} + r_2 \hat{\phi}_{33} \\ r_2 = r_1 \hat{\phi}_{31} + \hat{\phi}_{32} + r_1 \hat{\phi}_{33} \\ r_3 = r_2 \hat{\phi}_{31} + r_1 \hat{\phi}_{32} + \hat{\phi}_{33} \end{cases}$$

بحل جملة ثلاث معادلات نجد قيمة $\hat{\phi}_{33}$

تمرين باستخدام بيانات المثال رقم 3 أحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي حتى الدرجة $k=4$

3- طريقة دوربن : تعتبر هاته الطريقة الأكثر استخداما من طرف مصممي البرامج الاحصائية بسهولة برمجتها (على غرار برنامج Eviews)، وهي مشتقة من الطريقة السابقة:

$$\hat{\phi}_{11} = r_1$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_j}$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \phi_{k-1,k-j} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

مثال : باستخدام بيانات المثال رقم 3 أحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي حتى الدرجة $k=4$

$$\hat{\phi}_{11} = r_1 = 0.539$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{r_2 - \hat{\phi}_{11} r_1}{1 - \hat{\phi}_{11} r_1} = \frac{0.275 - 0.539^2}{1 - 0.539^2} = -0.0228$$

$$\phi_{21} = \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22} \hat{\phi}_{11} = 0.539 - (-0.0228 * 0.539) = 0.551$$

وبالمثل نحسب $\hat{\phi}_{33}$:

$$\hat{\phi}_{33} = \frac{r_3 - (\phi_{21} r_2 + \hat{\phi}_{22} r_1)}{1 - (\phi_{21} r_1 + \hat{\phi}_{22} r_2)}$$

$$\phi_{31} = \phi_{21} - \hat{\phi}_{33} \hat{\phi}_{22}$$

$$\phi_{32} = \hat{\phi}_{22} - \hat{\phi}_{33} \phi_{21}$$

وبنفس الطريقة نكمل حساب باقي المعاملات

مؤثرات السلاسل الزمنية

عند دراستنا لخصائص نماذج ARMA(p,q) عند درجات أكبر من 1 ، $p, q > 1$ ، تتعقد العمليات الجبرية ، لذلك سنستخدم بعض المؤثرات التي لها خصائص جبرية تسهل علينا عملية البرهنة والحساب.

مؤثر التأخير L (الازاحة الى الخلف)

إذا كانت قيمة السلسلة الزمنية عند الزمن t هي y_t وعند الزمن $(t-r)$ هي y_{t-r} فإن مؤثر التأخير L يعرف كما يلي :

$$Ly_t = y_{t-1}$$

$$L^2 y_t = LLy_t = Ly_{t-1} = y_{t-2}$$

...

...

$$L^r y_t = y_{t-r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

ويتمتع بخصائص جبرية ملائمة منها:

$$Lc = c, \quad Lcy_t = cLy_t \quad \forall c \in R$$

$$L^0 y_t = y_t$$

$$L(y_t + X_t) = Ly_t + LX_t$$

$$LL^r y_t = L^{r+1} y_t, \quad r = 1, 2, \dots$$

$$(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \dots) y_t = \frac{y_t}{1 - \phi L} \quad \text{for } |\phi| < 1$$

مؤثر الفرق

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta \Delta y_t = \Delta(y_t - y_{t-1}) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

$$\Delta^2 y_t = (1 - L)^2 y_t$$

$$\Delta^r y_t = (1 - L)^r y_t$$

المحاضرة الثالثة

تهدف هذه المحاضرة الى التعرف على نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركات ARMA(p,q) وخصائصها .

ندرس الان النماذج المستخدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية ، وندرس خصائصها من خلال ما تم تناوله في الدروس السابقة من :الاستقرارية ودوال الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي.

تقوم منهجية بوكس جينكينز على نظرية وولد التي أثبت أن جميع العمليات العشوائية المستقرة يمكن تمثيلها بأحد النماذج الثلاثة : AR(p) ، MA(q) ، ARMA(p,q) . p,q>0

الصياغة العامة لنظرية وولد تاخذ المعادلة التالية:

$$y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

$$\psi_0 = 1 , \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 < \infty$$

حيث ε_t عبارة عن ضجة بيضاء تتبع التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$

إلا أن هذه الصيغة غير عملية لأنه لا يمكن تقدير ما لانهاية من المعلمات ، لذلك تم البرهنة على أن المعادلة أعلاه تكافئ عمليات عشوائية من نوع ARMA(p,q).

نماذج الانحدار الذاتي AR(p)

عند دراستنا لنموذج الانحدار الخطي البسيط ، رأينا أنه عبارة عن نمذجة المتغير التابع y كدالة خطية للمتغير المستقل x بالإضافة إلى حد خطأ عشوائي .

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

كذلك نموذج الإنحدار الذاتي هو عبارة عن إنحدار المتغير على ماضيه أي إنحدار القيمة الحالية y_t على القيم السابقة $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ ويأخذ الشكل التالي AR(p):

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

حتى يسهل علينا دراسة خصائص النموذج AR(p) نبدأ بأبسط نموذج وهو AR(1).

أ- نموذج AR(1)

نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولى هو عبارة عن إنحدار خطي بسيط للمتغير على التأخير الأول بالإضافة إلى حد الخطأ العشوائي:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1- شرط الاستقرار :

في حالة $|\phi_1| = 1$ يسمى نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى بنموذج المشي العشوائي

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad x_0 = 0 \quad \text{بالرجوع الى المثال رقم 1 :}$$

وجدنا أن عملية المشي العشوائي عملية عشوائية غير مستقرة ، حيث برهنا أن :

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

$$E(x_t) = E\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t E(\varepsilon_i) = 0$$

$$Var(x_t) = Var\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \sigma_\varepsilon^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(x_t x_{t-k}) = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$$

إذن ، حتى يكون النموذج مستقراً يجب أن تكون المعلمة: $|\phi_1| < 1$ ، أي يأخذ النموذج الصيغة التالية:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\phi_1| < 1$$

او بتعبير أدق ، يجب أن تكون جذر المعادلة التالية أكبر من 1 :

$$1 - \phi_1 z = 0$$

الآن نحسب كل من التوقع والتباين:

$$\begin{aligned} E(x_t) = \phi_0 + \phi_1 E(x_{t-1}) + E(\varepsilon_t) &\Leftrightarrow E(x_t) = \phi_0 + \phi_1 E(x_t) \\ \Leftrightarrow E(x_t) &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \end{aligned}$$

لأن العملية العشوائية مستقرة $E(x_t) = E(x_{t-1})$

$$\begin{aligned} V(x_t) &= V(\phi_0) + V(\phi_1 x_{t-1}) + 2\phi_1 \text{cov}(\phi_0, x_{t-1}) + 2\text{cov}(\phi_0, \varepsilon_t) + 2\text{cov}(x_{t-1}, \varepsilon_t) + V(\varepsilon_t) \\ &= 0 + \phi_1^2 V(x_{t-1}) + 0 + 0 + 0 + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

لأن العملية العشوائية مستقرة $V(x_t) = V(x_{t-1})$

دالة التباين: γ_k

قبل حساب γ_k ، ينبغي ان نذكر ببعض خصائص التباين:

$$\begin{aligned} \text{cov}(a + y, b + x) &= \text{cov}(y, x) \quad \forall a, b \in R \\ \text{cov}(y, y) &= V(y) \end{aligned}$$

باستخدام الخاصية الأولى:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_t, x_{t-k}) &= \text{cov}(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \phi_0 + \phi_1 x_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}) \\ &= \text{cov}(\phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \phi_1 x_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \text{COV}(x_t, x_{t-k}) = E [(x_t - E(x_t))(x_{t-k} - E(x_{t-k}))] \\
&= E(x_t x_{t-k}) \\
&= E((\phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t) x_{t-k}) \\
&= \phi_1 E(x_{t-1} x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k}) \\
&= \phi_1 \gamma_{k-1} + 0
\end{aligned}$$

وهكذا بالتعويض التراجعي نجد :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} = \phi_1 (\phi_1 \gamma_{k-2}) = \phi_1^2 (\phi_1 \gamma_{k-3}) = \dots = \phi_1^k \gamma_0$$

دالة الارتباط الذاتي ρ_k

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1^k \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1^k$$

دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} :

واضح من خلال تعريف دالة الارتباط الذاتي الجزئي أن :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

مثال : لتكن لدينا العملية العشوائية التالية :

$$x_t = 4 + 0.7x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

بما أن $1 > 0.7$ فإن العملية العشوائية عملية مستقرة

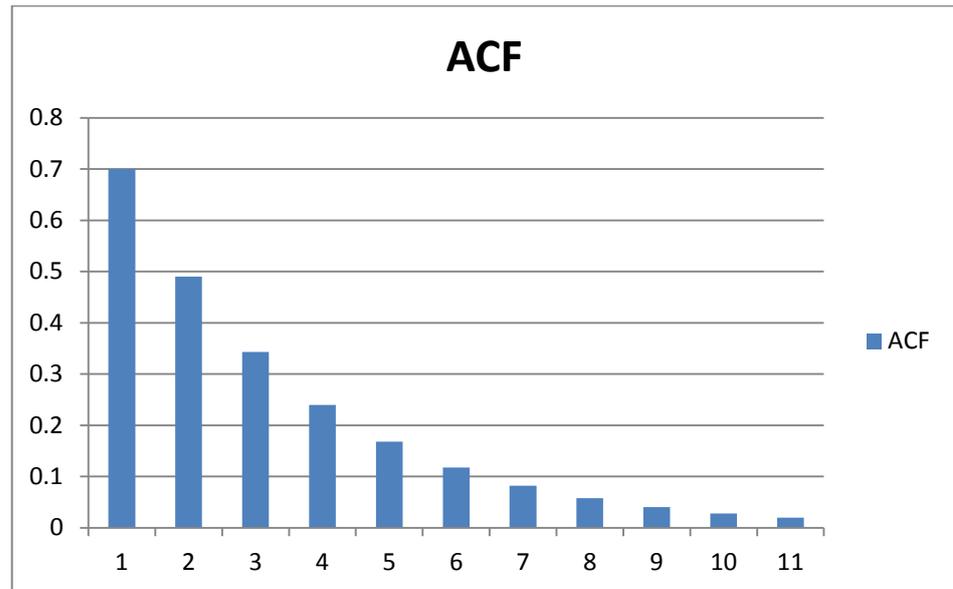
$$E(x_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} = \frac{4}{1 - 0.7} = 13.33$$

$$V(x_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{1}{1 - 0.7^2} = 1.96$$

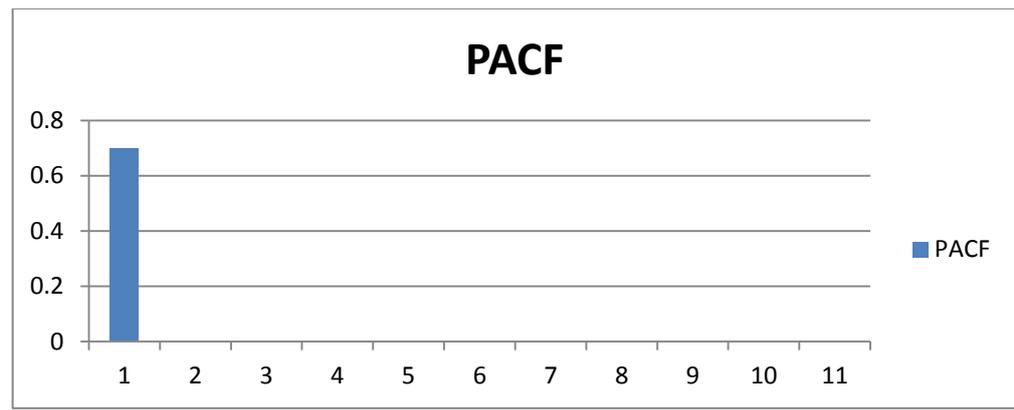
$$\rho_k = \phi^k = 0.7^k$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ρ_k	0.7	0.49	0.343	0.24	0.168	0.117	0.082	0.057	0.04

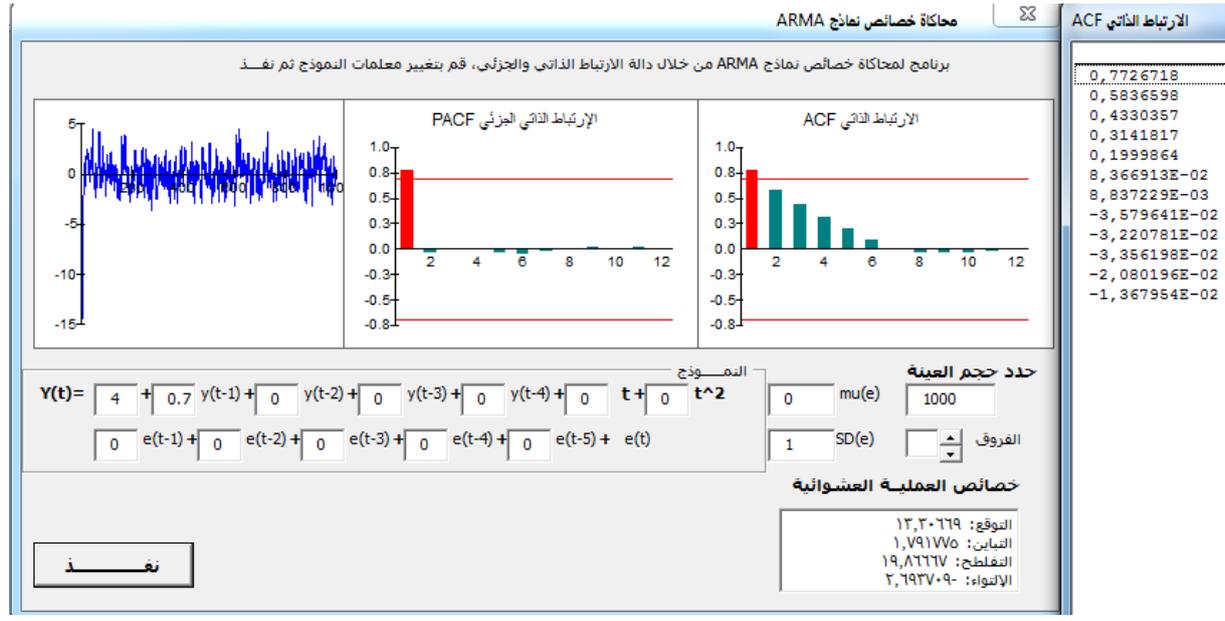
إذن دالة الارتباط الذاتي للعملية العشوائية السابقة تأخذ الشكل التالي:



$$\phi_{11} = 0.7$$



باستخدام المحاكاة قمنا بتوليد عملية عشوائية حجمها 1000 مطابقة للعملية السابقة ، فكانت النتائج كما هي موضحة في الشكل التالي:



المصدر: قمت بتطويره باستخدام لغة VBA Excel

من خلال الشكل أعلاه نلاحظ تقارب كبير بين النتائج النظرية ونتائج المحاكاة

ب- نموذج AR(p)

بعد أن رأينا خصائص نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى نأتي إلى تعميم النتائج في حالة الدرجة p، والذي يعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

1- شرط الاستقرار

باستخدام معامل التأخير يصبح النموذج السابق كالتالي :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

حتى يكون النموذج مستقرا ، يجب أن تكون جذور كثير الحدود التالي أكبر من الواحد :

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

مثال : أدرس استقرارية العملية العشوائية من نوع AR(2) التالية :

$$y_t = 3 + 2y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t$$

نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية:

$$1 - 2z + 0.5z^2 = 0$$

2- خصائص نماذج AR(p)

توقع نموذج الانحدار الذاتي المستقر من الدرجة p:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \phi_0 + \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + E(\varepsilon_t) \\ &= \phi_0 + \phi_1 E(y_t) + \phi_2 E(y_t) + \dots + \phi_p E(y_t) \\ &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \end{aligned}$$

بالنسبة للتباين، دالة التباين ودالة الارتباط الذاتي يتم استنتاجهم من خلال معادلة يول وولكر:

لكل نموذج AR(p) مستقر لدينا :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} & \forall k > 0 \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} & \forall k > 0 \\ \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2 \end{aligned}$$

بالإضافة إلى الخصائص السابقة لدينا الخصائص التالية :

$$\gamma_k = \gamma_{-k} , \rho_k = \rho_{-k} , \rho_0 = 1$$

مثال : بتطبيق الخصائص السابقة قم بحساب كل من ، التباين ، دالة التباين الذاتي، دالة الارتباط الذاتي للنموذج AR(2):

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} : \text{التوقع}$$

دالة الارتباط الذاتي : باستخدام الخصائص السابقة نجد :

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_{-1} = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad \forall k > 1 \quad \text{وهكذا:}$$

التباين :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 = \phi_1 (\rho_1 \gamma_0) + \phi_2 (\rho_2 \gamma_0) + \sigma^2$$

بتعويض قيم ρ_2 و ρ_1 نجد :

$$V(y_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2(1 - \phi_2)}{(1 - \phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2 \phi_1^2 + (1 - \phi_2)\phi_2^2}$$

دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} :

واضح من خلال تعريف دالة الارتباط الذاتي الجزئي أن :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi_k \\ 0 \end{cases} \quad k > p$$

تطبيق عددي : ليكن لدينا النموذج التالي :

$$y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, 4)$$

المطلوب :

- 1- أحسب كل من التوقع والتباين؛
- 2- احسب دالة الارتباط الذاتي ومثلها ببيانيا (k=7)؛
- 3- احسب دالة الارتباط الذاتي الجزئي ومثلها ببيانيا؛
- 4- قم بمحاكاة النموذج باستخدام برمجية الاقتصاد الكمي³.

الحل :

شرط الاستقرار: أن تكون حلول المعادلة التالية أكبر من 1

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$$

وهذا الشرط يتحقق إذا كان : $|\phi_2| < 1$ and $|\phi_1| + \phi_2 < 1$

لدينا من النموذج : $|0.3| < 1$ and $|0.5| + 0.3 < 1$ ، إذن شرط الاستقرار محقق

التوقع :

$$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{2}{1 - 0.5 + 0.3} = 10$$

التباين :

$$\begin{aligned} V(y_t) &= \frac{\sigma^2(1 - \phi_2)}{(1 - \phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2\phi_1^2 + (1 - \phi_2)\phi_2^2} \\ &= \frac{4(1 - 0.3)}{(1 - 0.3) - (0.5)^2 + 0.3(0.5)^2 + (1 - 0.3)(0.3)^2} = 8.974 \end{aligned}$$

دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = \frac{0.5}{1 - 0.3} = 0.714$$

³برمجية الاقتصاد الكمي عبارة عن إضافة لبرنامج إكسل قمت بتطويرها باستخدام لغة VBA Excel

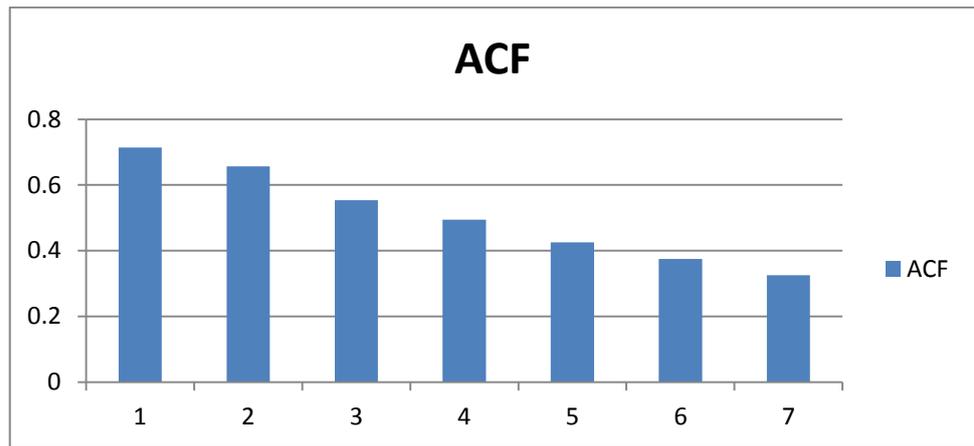
$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 = \frac{0.5^2}{1-0.3} + 0.3 = 0.657$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \Rightarrow \rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 = 0.5 * 0.714 + 0.3 * 0.657 = 0.554$$

وهكذا بنفس الطريقة نجد :

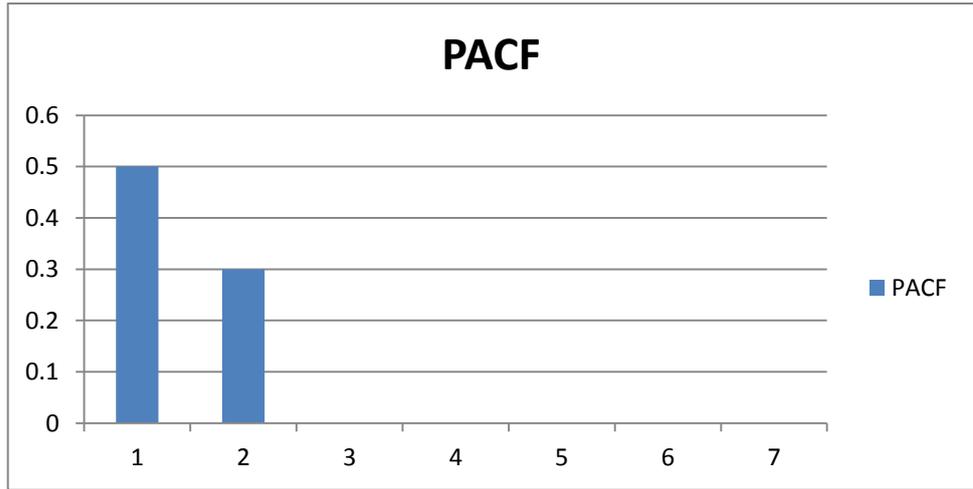
k	1	2	3	4	5	6	7
ρ_k	0.714	0.657	0.554	0.494	0.425	0.375	0.325

نمثل بيانات الجدول في اعمدة بيانية فنحصل على الشكل التالي:

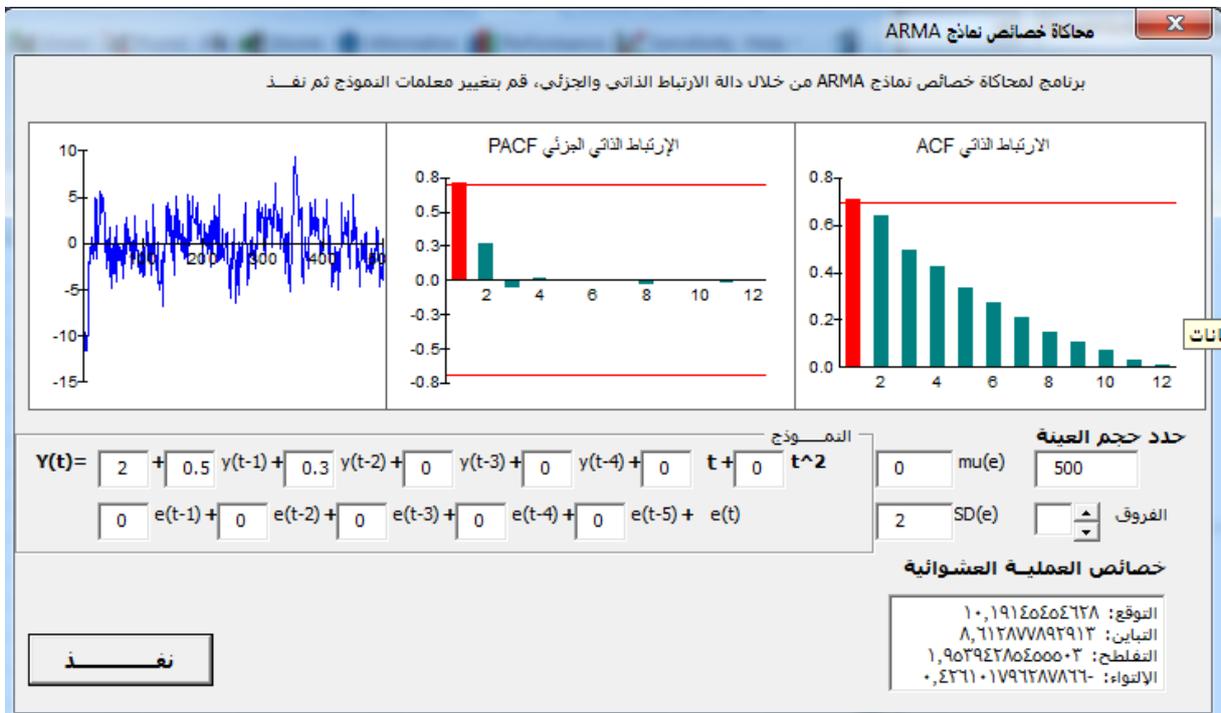


دالة الارتباط الذاتي الجزئي ϕ_{kk} :

$$\phi_{11} = 0.5, \phi_{22} = 0.3, \phi_{33} = 0 \dots \phi_{kk} = 0 \quad \forall k > 2$$



المحاكاة : قمنا بمحاكاة العملية العشوائية السابقة فتحصلنا على النتائج التالية :



تقدير معلمات النموذج $AR(p)$

في الواقع العملي نمتلك بيانات عن سلسلة زمنية (تتابع ارقام) ولا نعرف النموذج النظري الذي يمثل هاته السلسلة ولا معلماته . معرفة النموذج المناسب ممكنة من خلال حساب دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي باستخدام بيانات السلسلة ثم مقارنتها مع النماذج النظرية التي درسناها . نأتي الان الى دراسة الطرق التي نستطيع من خلالها حساب قيم المعلمات ϕ_i باستخدام بيانات السلسلة .

هناك العديد من الطرق منها :

أ- طريقة معادلات يول ويلكر

رأينا سابقا عند دراسة خصائص نماذج AR(p) أننا نستطيع حساب قيم ρ_i باستخدام قيم معاملات النموذج ϕ_i ، وقلنا بأن المعادلات التي تربط بينهما تسمى معادلة يول ويلكر. هذا من الناحية النظرية أما في الواقع العملي فنحتاج إلى العكس، بمعنى أننا نعرف قيم ρ_i المقدرة (r_i) ونجهل قيم المعلمات المقدرة $\hat{\phi}_i$.

إذن تتمثل هاته الطريقة في استخدام معاملات الارتباط الذاتي r_i أو التغير الذاتي s_i المحسوب من البيانات لحساب قيم المعلمات المجهولة $\hat{\phi}_i$ و $\hat{\sigma}^2$

نعيد كتابة معادلات يول ويلكر

$$\begin{aligned} s_k &= \hat{\phi}_1 s_{k-1} + \hat{\phi}_2 s_{k-2} + \dots + \hat{\phi}_p s_{k-p} & \forall k > 0 \\ r_k &= \hat{\phi}_1 r_{k-1} + \hat{\phi}_2 r_{k-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{k-p} & \forall k > 0 \\ s_0 &= \hat{\phi}_1 s_1 + \hat{\phi}_2 s_2 + \dots + \hat{\phi}_p s_p + \hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

تطبيق: باستخدام بيانات المثال رقم 3 قم بتقدير معاملات النموذج في الحالتين:

- 1- بافتراض أن النموذج المناسب للبيانات هو AR(1)؛
- 2- بافتراض أن النموذج المناسب للبيانات هو AR(2).

الحل: نعيد كتابة البيانات والنتائج التي توصلنا إليها:

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
المبيعات	22	24	25	26	23	28	30	29	32	34

$$r_1=0.539 \quad r_2 = 0.275 \quad \bar{y} = 27.3 \quad \text{var}(y)=14.21$$

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \bullet \text{ بافتراض أن النموذج المناسب هو AR(1):}$$

حساب $\hat{\phi}_1$: لدينا من خلال معادلات يول ويلكر:

$$r_1 = \hat{\phi}_1 r_0 \quad (r_0 = 1) \Rightarrow \hat{\phi}_1 = r_1 = 0.539$$

حساب $\hat{\phi}_0$:

$$E(y_t) = \bar{y} = \frac{\hat{\phi}_0}{1 - \hat{\phi}_1} \Rightarrow \hat{\phi}_0 = \bar{y}(1 - \hat{\phi}_1) = 27.3(1 - 0.539) = 12.58$$

حساب تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}^2$:

$$s_0 = \hat{\phi}_1 s_1 + \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = s_0 - \hat{\phi}_1 s_1 = s_0(1 - \hat{\phi}_1 r_1) = 14.21(1 - 0.539^2) = 10.08$$

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

• بافتراض أن النموذج المناسب هو AR(2):

حساب $\hat{\phi}_2$ من خلال معادلات يول ويلكر نجد:

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 r_1 \Rightarrow \hat{\phi}_1 = r_1 - \hat{\phi}_2 r_1$$

$$r_2 = \hat{\phi}_1 r_1 + \hat{\phi}_2 \Rightarrow \hat{\phi}_2 = r_2 - \hat{\phi}_1 r_1 = r_2 - (r_1 - \hat{\phi}_2 r_1) r_1$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{0.275 - 0.539^2}{1 - 0.539^2} = -0.021$$

حساب $\hat{\phi}_1$:

$$\hat{\phi}_1 = r_1 - \hat{\phi}_2 r_1 = 0.55$$

حساب $\hat{\phi}_0$:

$$E(y_t) = \bar{y} = \frac{\hat{\phi}_0}{1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2} \Rightarrow \hat{\phi}_0 = \bar{y}(1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2) = 27.3(1 - 0.55 + 0.021) = 12.86$$

حساب تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}^2$:

$$s_0 = \hat{\phi}_1 s_1 + \hat{\phi}_2 s_2 + \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = s_0 - \hat{\phi}_1 s_1 - \hat{\phi}_2 s_2 = s_0(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2)$$

$$= 14.21(1 - 0.55 * 0.539 + 0.021 * 0.275) = 10.076$$

ب- طريقة الانحدار (المربعات الصغرى)

الطريقة الثانية تتمثل في تقدير معاملات نموذج الانحدار الذاتي باستخدام المربعات الصغرى العادية مثلما رأينا في مقياس الاقتصاد القياسي عند دراستنا لنموذج الانحدار الخطي المتعدد. فنموذج AR(p) هو في الحقيقة عبارة عن إنحدار خطي متعدد متغيره التابع y_t هو y_t والمتغيرات المستقلة X هي $y_{t-2}, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$

$$Y = \phi X + \varepsilon$$

$$Y = y_t, \phi = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & y_{t-1} & \dots & y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}, \varepsilon = \varepsilon_t$$

إذن مقدر المربعات الصغرى العادية OLS يساوي :

$$\hat{\phi} = (X'X)^{-1} X'Y$$

ج- طريقة المعقولة العظمى

سنذكر هذه الطريقة بالتفصيل عند كلامنا عن نماذج ARMA

نماذج المتوسطات المتحركة MA(q)

عبارة عن مزيج خطي من ماضي الأخطاء العشوائية وتأخذ الشكل التالي:

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_p \varepsilon_{t-p} + \varepsilon_t$$

حيث ε_t عبارة عن ضجة بيضاء تتبع التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$

نماذج MA(q) مستقرة دائما لذلك لا نبحث على شرط الاستقرار

خصائص نماذج MA(q):

لتسهيل البراهين نبدأ بنموذج MA(1)

• نموذج MA(1)

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

شرط الإنعكاس : نماذج MA(q) مستقرة بالتعريف - كما أن نماذج AR(1) تحقق شرط الإنعكاس بالتعريف- إلا أنها لا تكون قابلة للإنعكاس إلا إذا كان جذر المعادلة التالية أكبر من 1 :

$$1 - \theta_1 z = 0$$

$$|\theta_1| < 1 \text{ أي}$$

وشرط الإنعكاس مهم جدا لأنه يضمن تناقص تأثير ماضي السلسلة $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-i}$ على y_t كلما ابتعدنا كثيرا⁴.

التوقع :

$$E(y_t) = \theta_0 + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = \theta_0 \quad / \quad E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

التباين: من خلال خصائص الضجة البيضاء نجد :

$$V(y_t) = V(\theta_0) + \theta_1^2 V(\varepsilon_{t-1}) + V(\varepsilon_t) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2) \quad / \quad V(\varepsilon_t) = V(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$$

دالة التغير الذاتي:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E[(y_t - \theta_0)(y_{t-1} - \theta_0)] = E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(\theta_1 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1})] \\ &= \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) \\ &= \theta_1 \sigma^2 \end{aligned}$$

⁴ للتفصيل أكثر إرجع إلى التحليل الحديث للسلسلة الزمنية ص 215-216

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E[(y_t - \theta_0)(y_{t-2} - \theta_0)] = E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(\theta_1 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2})] \\ &= \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

دالة الارتباط الذاتي :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 \sigma^2}{\sigma^2(1+\theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{(1+\theta_1^2)} \\ \rho_k &= 0 \quad \text{for } k > 1\end{aligned}$$

دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

إشتقاق الصورة العامة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج MA(1) أصعب بكثير من اشتقاق دالة الارتباط الذاتي ويتطلب معرفة مسبقة بطريقة حل معادلات الفروق ، لذلك لن نذكر البرهان ونكتفي بذكر التعريف فقط (في حالة تحقق شرط الانعكاس):

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \quad |\theta_1| < 1$$

• نموذج MA(p)

نأتي الان الى تعميم النتائج السابقة :

شرط الإنعكاس

حتى يكون النموذج قابلا للإنعكاس ، يجب أن تكون جذور كثير الحدود التالي أكبر من الواحد (أو بتعبير أدق خارج دائرة الوحدة) :

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q = 0$$

التوقع :

$$E(y_t) = \theta_0 + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) + \dots + \theta_p E(\varepsilon_{t-p}) + E(\varepsilon_t) = \theta_0$$

التباين: من خلال خصائص الضجة البيضاء نجد :

$$V(y_t) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_p^2)$$

دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho_k = \frac{\theta_k + \sum_{j=1}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2}$$

$$\rho_k = 0 \quad \text{for } k > q$$

دالة الارتباط الذاتي الجزئي :

لن نذكر الصيغ الرياضية لدالة الارتباط الذاتي الجزئي لأنها معقدة جدا ، ونكتفي بوصف سلوكها فشكلها مثل شكل دالة الارتباط الذاتي لنموذج الانحدار الذاتي ، اما أن تتناقص بشكل أسي أو جيبي ، كما هو موضح في الاشكال التالية :

تطبيق عددي : ليكن لدينا النموذج التالي :

$$y_t = 4 + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,4)$$

المطلوب :

- 1- تحقق من شرط الإنعكاس؛
- 2- أحسب كل من التوقع والتباين؛
- 3- احسب دالة الارتباط الذاتي ومثلها بيانيا .

قم بمحاكاة النموذج باستخدام برمجية الاقتصاد الكمي

الحل

شرط الإنعكاس : أن تكون حلول المعادلة التالية أكبر من 1

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 = 0$$

وهذا الشرط يتحقق إذا كان : $|\theta_2| < 1$ and $|\theta_1| + \theta_2 < 1$

لدينا من النموذج : $|0.3| < 1$ and $|0.5| + 0.3 < 1$ ، إذن شرط الإنعكاس محقق

التوقع :

$$E(y_t) = \theta_0 = 4$$

التباين:

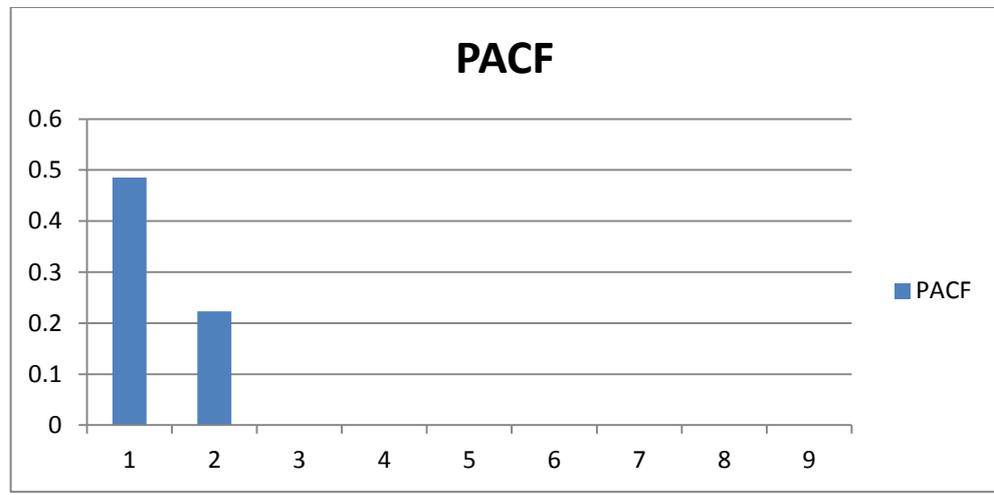
$$V(y_t) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 4(1 + 0.5^2 + 0.3^2) = 5.36$$

الارتباط الذاتي

$$\rho_1 = \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.5 + 0.5 * 0.3}{1 + 0.5^2 + 0.3^2} = 0.485$$

$$\rho_2 = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = 0.223$$

$$\rho_k = 0 \text{ for } k > 2$$



تقدير معالم النموذج MA(q)

هناك العديد من الطرق ، نذكر منها :

أ- طريقة معاملات الارتباط الذاتي

عند دراسة خصائص نماذج MA(q) أننا نستطيع حساب قيم ρ_i باستخدام قيم معالم النموذج . هذا من الناحية النظرية أما في الواقع العملي فنحتاج إلى العكس ، بمعنى أننا نعرف قيم ρ_i المقدرة (r_i) ونجهل قيم المعالم المقدرة $\hat{\theta}_i$. فنستطيع من خلال حساب معاملات الارتباط الذاتي r_i للسلسلة محل الدراسة والتباين s_0 أن نقدر المعالم $\hat{\theta}_i$ و $\hat{\sigma}^2$. ولتوضيح ذلك نبدأ بنموذج MA(1):

التوقع :

$$E(y_t) = \bar{y} = \hat{\theta}_0$$

التباين:

$$V(y_t) = S_0 = \hat{\sigma}^2 (1 + \hat{\theta}_1^2)$$

دالة الارتباط الذاتي :

$$r_1 = \frac{\hat{\theta}_1}{(1 + \hat{\theta}_1^2)} \Rightarrow r_1 + r_1 \hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_1 = 0$$

بحل المعادلة نجد :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}$$

تطبيق عددي

تطبيق : باستخدام بيانات المثال رقم 3 قم بتقدير معالم النموذج في الحالتين:

3- بافتراض أن النموذج المناسب للبيانات هو MA(1) :

4- بافتراض أن النموذج المناسب للبيانات هو MA(2) .

الحل : نعيد كتابة البيانات والنتائج التي توصلنا إليها :

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
المبيعات	22	24	25	26	23	28	30	29	32	34

$$r_1=0.539 \quad r_2 = 0.275 \quad \bar{y} = 27.3 \quad \text{var}(y)=14.21$$

• بافتراض أن النموذج المناسب هو MA(1) : $y_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

حساب $\hat{\theta}_0$: لدينا من خلال معادلات يول ويلكر :

$$\hat{\theta}_0 = \bar{y} = 27.3$$

حساب $\hat{\theta}_1$:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4*0.539^2}}{2*0.539} =$$

حساب تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}^2$:

$$s_0 = \hat{\phi}_1 s_1 + \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = s_0 - \hat{\phi}_1 s_1 = s_0 (1 - \hat{\phi}_1 r_1) = 14.21(1 - 0.539^2) = 10.08$$

السلاسل غير المستقرة والانحدار الزائف

التعامل مع السلاسل غير المستقرة ومشكلة الانحدار الزائف لم تكن وليدة سنة 1974 على يد Granger وزميله في مقالهم المعنون بـ Spurious regressions in econometrics . بل سبقهم الى ذلك Yule سنة 1926 في تجربة يدوية قام من خلالها بحساب الاف السلاسل ومئات معاملات الارتباط لثلاث انواع من المتغيرات $I(0)$ ، $I(1)$ ، $I(2)$ مع رسم المدرجات التكرارية واستنتاج التوزيعات الاحتمالية (تخيلوا كم اخذ ذلك من وقت !!)

وقد نشر هذه النتائج في مقال بعنوان

" Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time series (with discussion) "

ولاقت انذاك قبول وتأثير فكانت دراسة العلاقة بين السلاسل الزمنية تجرى بتحفظ ، ثم مع مرور الوقت أهملت -نسبيا- هذه الدراسة الى ان نشر Granger وزميله مقالهم الذين استخدموا الحاسوب في عملية المحاكاة وحساب مؤشرات اخرى مهمة .

حاولت في هذا الفيديو شرح التجربة مع التطبيق باستخدام المحاكاة على برنامج افيزو .

ساتبعه - لاحقا - باذن الله بدراسة Granger وزميله.

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon_1 = 3$$

$$\varepsilon_2 = 5$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \sim I(1)$$

$$x_t = x_0 + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \quad / x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \varepsilon_1 = 3$$

$$x_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3 + 5 = 8$$

$$\vdots$$

$$v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

$$v_1 = 7$$

$$v_2 = 6$$

$$\vdots$$

$$\Delta y_t = v_t \Leftrightarrow y_t = y_{t-1} + v_t \sim I(1)$$

$$y_t = y_0 + \sum_{t=1}^T v_t \quad / y_0 = 0$$

$$y_1 = 0 + v_1 = 7$$

$$y_2 = v_1 + v_2 = 7 + 6 = 13$$

$$\vdots$$

$$\Delta w_t = x_t \Leftrightarrow w_t = w_{t-1} + x_t \sim I(2)$$

$$w_t = w_0 + \sum_{t=1}^T x_t \quad / w_0 = 0$$

$$w_1 = 0 + x_1 = 3$$

$$w_2 = x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11$$

$$\vdots$$

$$\Delta z_t = y_t \Leftrightarrow z_t = z_{t-1} + y_t \sim I(2)$$

$$z_t = z_0 + \sum_{t=1}^T y_t \quad / z_0 = 0$$

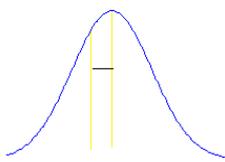
$$z_1 = 0 + y_1 = 7$$

$$w_2 = y_1 + y_2 = 7 + 13 = 20$$

⋮

سندوق يحتوي على ٥٠ ورقة برقعة من ١٠ الى ٥٠.

1	2	13	4	5	12
45	33	48	18		
27					
50	19	47	31		
22	38				
21	23	14			



$I(0)$ $I(1)$ $I(2)$

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ $\Delta x_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ $\Delta w_t = x_t \Leftrightarrow w_t = w_{t-1} + x_t$

$\varepsilon_1 = 3$ $x_t = x_0 + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \quad / x_0 = 0$ $w_t = w_0 + \sum_{t=1}^T x_t \quad / w_0 = 0$

$\varepsilon_2 = 5$ $x_1 = 0 + \varepsilon_1 = 3$ $w_1 = 0 + x_1 = 3$

⋮ $x_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3 + 5 = 8$ $w_2 = x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11$

⋮ ⋮ ⋮

$$r_{x,y} = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$H_0 : r_{x,y} = 0$

$H_1 : r_{x,y} \neq 0$

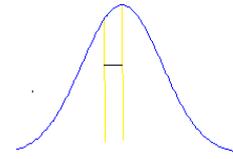
$$t^* = \frac{|\rho_{x,y}|}{\sqrt{\frac{(1 - \rho_{x,y}^2)}{n - 2}}}$$

$t^* > t_{n-2}^{\alpha/2}$

لحسب عدد مرات رفض الفرضية الصفرية في الحالات الثلاث

سندوق يحتوي على ٥٠ ورقة برقعة من ١٠ الى ٥٠.

1	2	13	4	5	12
45	33	48	18		
27					
50	19	47	31		
22	38				
21	23	14			



$I(0)$ $I(1)$ $I(2)$

$v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ $\Delta y_t = v_t \Leftrightarrow y_t = y_{t-1} + v_t$ $\Delta z_t = y_t \Leftrightarrow z_t = z_{t-1} + y_t$

$v_1 = 7$ $y_t = y_0 + \sum_{t=1}^T v_t \quad / y_0 = 0$ $z_t = z_0 + \sum_{t=1}^T y_t \quad / z_0 = 0$

$v_2 = 6$ $y_1 = 0 + v_1 = 7$ $z_1 = 0 + y_1 = 7$

⋮ $y_2 = v_1 + v_2 = 7 + 6 = 13$ $w_2 = y_1 + y_2 = 7 + 13 = 20$

⋮ ⋮ ⋮

الانحدار الزائف مقال granger 1974

افتتح مقاله بملاحظة مهمة وهي انه في كثير من الاحيان عند تقديرنا لنموذج قياسي نتحصل على قيمة مرتفعة لمعامل التحديد R2 مع قيمة منخفضة جدا لدوربن واتسن DW (هذه الملاحظة جعلها فيما بعد إشارة مهمة لوجود الانحدار الزائف).

وهذا ما يوحي بالتناقض لان قيمة مرتفعة لمعامل التحديد معناه ان النموذج استطاع تفسير حجم كبير من المعلومات الموجودة في المتغير التابع ، ووجود ارتباط ذاتي قوي معناه معلومات كثيرة غير مفسرة !!

هذا ما جعل الكثيرين -ومنهم هندري- يعتبرون ان الانحدار الزائف هو في الحقيقية ناتج عن عدم توصيف جيد للنموذج specification of model قبل كل شيء (سنرجع لهاته النقطة لاحقا).

قبل عرض نتائج المحاكاة اود ان اثير تساؤل مهم

قد يسال احدنا سؤال مهم : اذا كان عدم استقرارية السلاسل يؤدي الى مشاكل في عملية الاستقراء الاحصائي حول المعلمات فلماذا :

عند دراستنا لنماذج الانحدار دائما ما نبدأ بذكر فرضيات النموذج المعروفة ولا نجد فرضية الاستقرارية ضمن هذه الفرضيات ؟

الجواب : لسببين :

اولا : فرضية عدم عشوائية المتغيرات التفسيرية تتضمن كثير من الامور من بينها (عدم الاستقرارية) ،

ثانيا : في مقررات القياس الاقتصادي 1 و 2 لا نذكر برهنة الخصائص التقاربية للمقدرات (لانها تتطلب معرفة متقدمة في الاحتمالات والاحصاء الرياضي) . فلو اخذنا كتاب : THEIL, H. (1971) *Principles of Econometrics* ، نجد انه عند برهنة خصائص مقدرات *ols* والتوزيع التقاربي لها يذكر الفرضيتين التاليتين :

$$E(\varepsilon / X) = 0 \quad Var(\varepsilon / X) = \sigma^2 I \quad -1$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} X' X \right) = Q \quad -2$$

، وطبعاً هاته النهاية لا تتحقق في حالة السلاسل غير المستقرة

نرجع الان الى التجربة

-1 تجربة Granger وزميله

-1 توليد العمليات العشوائية

قام بتوليد عمليتين عشوائيتين حجمهما (n=50) من النوع :

$$y_t = y_{t-1} + v_t \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث : $\varepsilon_t \sim IN(0,1)$ $v_t \sim IN(0,1)$ ، كل منهما عبارة عن عملية عشوائية صافية او ضجة بيضاء white noises. ومستقلين عن بعضهما البعض .

نلاحظ ان كل من x و y عبارة عن مسار عشوائي Random Walks لا علاقة بينهما .

قبل المواصلة نود شرح كيفية توليد مثل هاته العمليات العشوائية :

نقوم اولاً بسحب 50 مشاهدة من ε_t و v_t من مجتمعين كل منهما يتبع التوزيع الطبيعي :

$$\begin{array}{ll} v_t \sim N(0,1) & \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ v_1 = 7 & \varepsilon_1 = 3 \\ v_2 = 6 & \text{و} \quad \varepsilon_2 = 5 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

ثم بعد ذلك نعطي قيم ابتدائية لـ x و y (استخدم Granger : $y_0=x_0=100$) ونقوم باكمال حساب باقي القيم وفق العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \Delta x_t = \varepsilon_t &\Leftrightarrow x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \sim I(1) \\ x_t &= x_0 + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \quad / x_0 = 100 \\ x_1 &= 100 + \varepsilon_1 = 103 \\ x_2 &= 100 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 100 + 103 + 5 = 208 \\ &\vdots \end{aligned}$$

بنفس الطريقة لـ y

$$\begin{aligned} \Delta y_t = v_t &\Leftrightarrow y_t = y_{t-1} + v_t \sim I(1) \\ y_t &= y_0 + \sum_{t=1}^T v_t \quad / y_0 = 100 \\ y_1 &= 100 + \varepsilon_1 = 107 \\ y_2 &= 100 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 100 + 107 + 6 = 213 \\ &\vdots \end{aligned}$$

فائدة مهمة : تسمية السلاسل المستقرة بعد إجراء الفروق بالمتكاملة جاء من العلاقة التالية :

$$x_t = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \quad \text{لان المجموع في الحالة المستمرة يسمى تكاملا}$$

2- إجراء الإنحدار :

(عند اجراء الانحدار بين x و y كان المنتظر هو عدم معنوية اختبار ستودنت ، وقيمة منخفضة لمعامل التحديد R^2)

قام جرونجر وزميله بإجراء إنحدار y على x وحساب كل من قيمة t_c ستودنت و معامل التحديد R^2 و دوربن واتسن DW . وكرر العملية 100 مرة وفي كل مرة يقارن قيمة t_c المحسوبة مع الجدولية عند مستوى 5% ($t_T = 2.016$) ويسجل عدد مرات الرفض ($t_c > t_T$).

(من المفترض في الحالة العادية - حسب نظرية المعاينة- ان نجد عدد مرات الرفض قريبة من 5% = 5 ، لان الفرضية الصفرية الصحيحة فيكون حجم القبول الصحيح 95 وحجم الرفض الخاطئ 5.)
بعد ذلك قام جرونجر بتوسيع التجربة لتشمل عدد اكبر من المتغيرات المستقلة غير المستقرة (المشابهة ل $x(1)$)

حتى تتضح الرؤية أكثر ، نقارن نتائج هاته التجربة مع حالة المتغيرات المستقرة وهذا ما فعله جرونجر ، فقام باخذ الفروق الاولى للمتغيرات لجعلها مستقرة واجرئ نفس التجربة السابقة .

النتائج موضحة في الجدول التالي:

		Per cent times H_0 rejected ^a	Average Durbin-Watson d	Average R^2	Per cent $R^2 > 0.7$
<i>Random walks</i>					
عدد المتغيرات Levels	$m = 1$	76	0.32	0.26	5
	$m = 2$	78	0.46	0.34	8
	المتغيرات غير مستقرة $m = 3$	93	0.55	0.46	25
	$I(1)$ $m = 4$	95	0.74	0.55	34
	$m = 5$	96	0.88	0.59	37
Changes	$m = 1$	8	2.00	0.004	0
	$m = 2$	4	1.99	0.001	0
	المتغيرات مستقرة $m = 3$	2	1.91	-0.007	0
	$I(0)$ $m = 4$	10	2.01	0.006	0
	$m = 5$	6	1.99	0.012	0

نلاحظ من خلال الجدول ان عدد مرات رفض H_0 في حالة وجود متغير واحد كانت 76 مرة (76%) ، بمعنى ان احتمال الوقوع في الرفض الخاطئ هو 0.76 وهذا ما يفسر ظهور -غالبا- العلاقة المعنوية بين متغيرين ليس بينهما علاقة في الاصل .

هذه النسبة تزداد كلما اضفنا متغيرات مفسرة جديدة لتصل الى 96 % في حالة 5 متغيرات .

كما نلاحظ ان قيمة R^2 مرتفعة نوعا ما وقيمة DW منخفضة كثيرا (تناقض)

حتى تتضح الصورة أكثر نقارن هاته النتيجة مع الحالة المستقرة ، فماذا نلاحظ؟

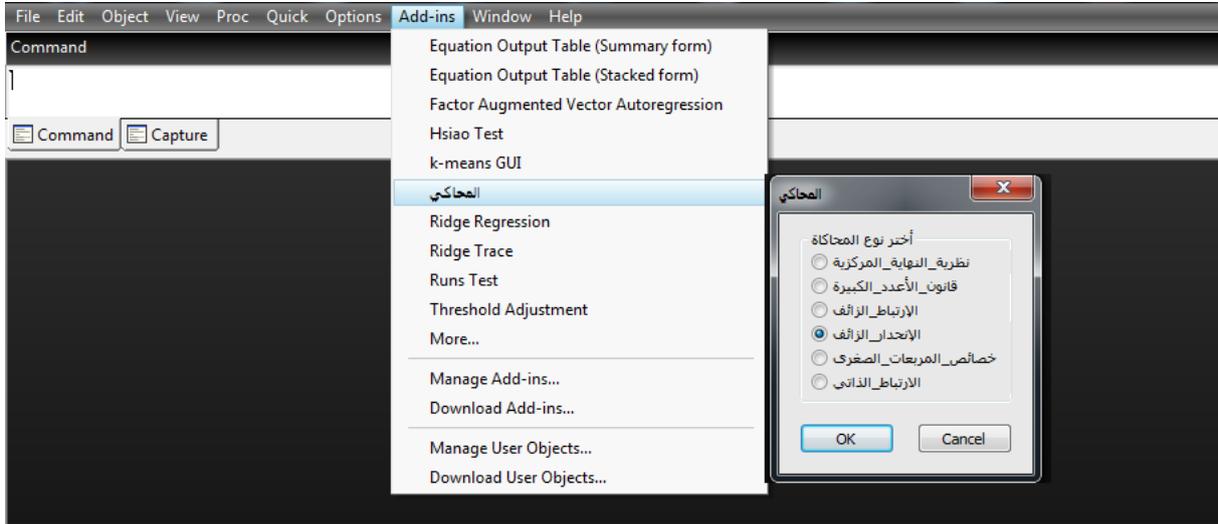
قيمة منخفضة لعدد مرات الرفض (8) - قريبة من قيمتها الحقيقية =5 ، متوسط $DW=2$ (لا يوجد مشكلة ارتباط ذاتي) ، قيمة R^2 (0.004) قريبة من قيمتها الحقيقية 0.

هذا هو ملخص التجربة التي قام Granger وزميله سنة 1974 ليأتي بعد ذلك Philips سنة 1986 فيثبت -رياضيا - ان التوزيع التقاربي للمعلمات -في هاته الحالة- لا يتبع التوزيع المعروف (التوزيع الطبيعي) مما يجعل نتائج اختبار ستودنت -وغيره من الاختبارات- غير صالحة ومضللة .

II- اجراء التجربة باستخدام برنامج EViews

يمكن اجراء تجارب محاكاة مونت كارلو بسلاسة وسهولة نظرا لما يوفره برنامج افيز من ادوات برمجية قوية وسريعة وسهلة الاستخدام . لكن لعرض كيفية ذلك يتطلب شرح حول اساسيات البرمجة ، لذلك سأكتفي بعرض المحاكاة من خلال برمجية صغيرة قمت بتطويرها - سميتها المحاكي- عبارة عن اضافة لبرنامج افيز توفر الكثير من تجارب المحاكاة المستخدمة في القياس الاقتصادي . باذن الله عندما ارى انها تستحق النشر سأنشرها لتعم الفائدة .-

بعد فتح برنامج افيزوز نختار add-in كما هو موضح في الصورة :



وبعد اختيار الانحدار الزائف ، تظهر النافذة التالية :



اخترنا حجم العينة يساوي 50 وعدد المتغيرات المستقلة يساوي 1 فقط لتسهيل المقارنة (بين حالة الاستقرارية وعدم الاستقرارية) ، فكانت النتيجة كالتالي:

- جدول تلخيصي
- توزيع بيّنًا مستقر
- توزيع بيّنًا 1
- توزيع بيّنًا 2
- توزيع بيّنًا 3

	حالة الاستقرارية m=1	
H0 عدد مرات رفض	4.000000	67.00000
متوسط دورين واثنين	2.023629	0.340274
متوسط معامل التحديد	0.020705	0.256571
عدد مرات معامل التحديد أكبر من 0,7	0.000000	6.000000

تجربة جرونجر 1974 (الانحدار الزائف) بأعين أخرى

شرحنا في المنشور السابق تجربة جرونجر ، حيث قام بتوليد سلسلتين غير مستقرتين (مسار عشوائي بدون إزاحة)

$Y = y_t - 1 + u$ و $x = x_t - 1 + v$ ، ثم قام بتقدير نموذج (على السلاسل الاصلية وبعد اخذ الفروق):

نموذج السلاسل الاصلية : $y = a + bx + w$ واختبر الفرضية : $H_0: b = 0$

نموذج الفروق الاولى : $dy = a_1 + b_1 dx + w_1$ واختبر الفرضية : $H_0: b_1 = 0$

وتوصل (في الحالة الاولى) الى ان اختبار ستودنت يتجه نحو رفض الفرضية الصفرية مع أنها صحيحة

في الواقع (لأنه لا توجد علاقة بين x و y) ، بمعنى تشوه في حجم الخطا من النوع الاول ($\alpha = 0.76$)

اما في الحالة الثانية فكان اختبار ستودنت يتجه نحو قبول الفرضية الصفرية وكانت قيمة الفا α

قريبة من المستوى الحقيقي ($\alpha = 0.06$) ،

بناء على هاته التجربة شدد على ضرورة استخدام الفروق الاولى عند القيام بالنمذجة (اكدها في

مقال له سنة 1977)

فكرة اخذ الفروق الاولى لقيت انتقادا لاذعا (خاصة من مدرسن لندن ومنهم هندري) لان النظرية الاقتصادية قائمة على تحليل التوازن الذي يكون بين المتغيرات في المستوى. وكان هناك تفسير اخر للتجربة التي قام بها جرونجر

فرض الفرضية الصفرية (b=0) لا يعني قبول وجود علاقة بين x و y ، بل تعني أن $y=a+w$ (حد ثابت زائد ضجة بيضاء) وهذا خطأ لأن العملية المولدة للبيانات هي $Y=y_{t-1}+u$ (وليست مجرد حد ثابت وضجة بيضاء) ، اذن فمعقول جدا ان يرفض اختبار ستودنت الفرضية الصفرية. (لان النموذج خاطئ وليس لا توجد علاقة بين x و y)

ورأوا ان المشكلة مشكلة حسن توصيف النموذج بالدرجة الاولى وليست عدم الاستقرار فبالذي ينبغي ان يختبر هو :

$$y=a+bx+w \quad \text{وليس} \quad y=a+cy_{t-1}+bx+w$$

وبقي هذا التوجه سائد الى الان في مدرسة لندن فمشكلة عدم الاستقرار لا تاخذ حيز كبير في دراساتهم بقدر ما تأخذ مشكلة التوصيف الجيد للنموذج أو التمثيل الجيد للعملية المولدة للبيانات

ينبغي أن ننطلق من نموذج الانحدار الذاتي والابطاء الموزعة ARDL(1,1)

$$y_t = m + \alpha y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + v_t$$

في الحقيقة هذا هو النموذج المناسب للعمليات المولدة لـ x و y وليس النموذج الساكن السابق

قائمة المراجع

- 1- عبد القادر عطية، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، القاهرة، الدار الجامعية، 2000
- 2- عباس السيد، الاقتصاد القياسي، الاسكندرية، الدار الجامعية، 1988
- 3- فهمي عبد العزيز، الكومبيوتر والاقتصاد القياسي ، بيروت، دار الراتب الجامعية، 1990
- 4- سمير عبد العزيز، الاقتصاد القياسي، الاسكندرية، مكتبة الاشعاع، 1998
- 5- عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، بيروت، دار الطليعة، 1983
- 6- هاري كليجيان ووالاس أوتس ،مقدمة في الاقتصاد القياسي، المبادئ والتطبيقات؛ ، ترجمة د. المرسي حجازي ود. عبدالقادر عطية. جامعة الملك سعود، الرياض (2001م).
- 7- R. Carter Hill, William E. Griffiths, and George G. Judge, Undergraduate Econometrics, 3rd Edition, John Wiley & Sons; 2006