الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي –

كـلية العلـوم الاقتصـادية و التجـارية و علـوم التسييـر

قســم العلوم الاقتصادية

## مطبوعة بيداغوجية

في مقياس:

# رياضيات المؤسسة

## محاضرات مدعمة بأمثلة محلولة باستخدام برنامج QM

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D علـوم اقتصـادية، علوم تجـارية و علـوم التسييـر

الدكتور فاتح لقوقي

# فهرس المحتويات


| العنوان | الصفحة |
|---|---|
| فهرس المحتويات | 03 |
| مقدمة | 05 |
| **الفصل الأول: البرمجة الخطية** | 06 |
| **1. صياغة نماذج البرمجة الخطية** | 06 |
| 1.1. مفهوم البرنامج الخطي | 06 |
| 2.1. مجالات استخدامات البرمجة الخطية | 06 |
| 3.1. متطلبات بناء نماذج البرمجة الخطية | 06 |
| 4.1. افتراضات أساسية في البرمجة الخطية | 07 |
| 5.1. بناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي | 07 |
| **2. حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية** | 16 |
| 1.2. حالة التعظيم | 16 |
| 2.2. حالة التدنئة | 19 |
| 3.2. استخدام برنامج QM في حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية | 21 |
| 4.2. حالات خاصة عند استخدام الحل البياني | 25 |
| **3. عرض حل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس** | 30 |
| 1.3. حالة التعظيم | 30 |
| 2.3. حالة التدنئة | 35 |
| 3.3. حالات خاصة | 39 |
| 4.3. تمارين محلولة استخدام برنامج QM | 43 |
| **4. الثنائية (البرنامج المرافق)** | 48 |
| 1.4. تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي | 48 |
| 2.4. استخراج حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الثنائي | 51 |
| **5. تحليل الحساسية** | 54 |
| 1.5. مفهوم تحليل الحساسية | 54 |

| | |
|---|---|
| 2.5. التغيرات التي تطرأ في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) | 54 |
| 3.5. التغيرات في معاملات دالة الهدف | 57 |
| 4.5. التغيرات في معاملات المتغيرات في القيود | 58 |
| 5.5. تمارين محلولة باستخدام برنامج QM | 63 |
| **الفصل الثاني: مشاكل النقل** | 66 |
| **1. صياغة مشاكل النقل** | 67 |
| 1.1. دالة الهدف | 68 |
| 2.1. القيود | 68 |
| 3.1. شرط عدم السلبية | 69 |
| **2. طرق حل مشاكل النقل** | 69 |
| 1.2. إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن | 70 |
| 2.2. اختبار أمثلية الحل وتحسينه | 75 |
| **3. تمارين محلولة في مشاكل النقل باستخدام برنامج QM** | 90 |
| **4. تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة** | 91 |
| **الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود** | 95 |
| **1. أمثلية المتغير المفرد** | 95 |
| 1.1. الأمثلية المحلية والشاملة | 96 |
| 2.1. نظريات مهمة في أمثلية المتغير المفرد | 97 |
| **2. أمثلية المتغيرات المتعددة** | 99 |
| 1.2. الحدود العظمى المحلية والشاملة | 99 |
| 2.2. المتجه المتدرج ومصفوفة هيسي | 99 |
| **قائمة المراجع** | 99 |

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين نبينا محمد وعلى أله وصحبه أجمعين أما بعد:

إن التقدم الصناعي والتقني بعد الحرب العالمية الثانية أدى إلى اتساع في حجم المؤسسة مع تعدد وتنوع في نشاطاتها، الأمر الذي نتج عنه ظهور عديد المشكلات في مجالات عدة على غرار الإنتاج والتخزين والنقل والتخصيص، مما يستوجب اتخاذ قرارات رشيدة ومثلى تستند على أسس علمية بعيدة عن التخمين والحدس.

وقد تبلورت هذه الأسس العلمية المستخدمة في المؤسسة على شكل مجموعة من النظريات والأساليب الرياضية في ما يصطلح عليه رياضيات المؤسسة، ونظراً لأهمية الموضوع وتطبيقاته جاءت هذه المطبوعة في مقياس رياضيات المؤسسة والتي تهدف إلى تقديم هذه النظريات والأساليب إلى طلبة السنة الثانية ليسانس علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير، وقد توخينا أسلوب التبسيط قدر الإمكان في مختلف فصولها آملين بذلك تمكين الطالب من التحكم الجيد في هذه النظريات والأساليب المعطاة في المحاضرة من جهة ومن جهة أخرى تشجيع الطالب على استخدام بعض البرمجيات الجاهزة على غرار برنامج QM.

تحتوي هذه المطبوعة على ثلاث فصول. يتعرض الفصل الأول إلى صياغة مسائل البرمجة الخطية وكيفية حلها باستخدام الطريقة البيانية وأسلوب السمبلكس، وكذا المسألة الثنائية وتحليل الحساسية، أما الفصل الثاني فقد خصص لصياغة مسائل النقل وطرق الوصول إلى الحل الأساسي الأول وكيفية تحسينه إلى غاية بلوغ الحل الأمثل، وتطرقنا فيه أيضاً إلى كيفية تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة، بينما خصص الفصل الثالث للتطرق إلى مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود.

نأمل أننا قد وفقنا إلى حد ما في مسعانا لإيصال بعض المعرفة لطلبتنا الأعزاء وسد احتياجاتهم في هذا المجال، ونأمل أيضاً أن يوفقنا الله وإياكم إلى خدمة وطننا الغالي.

د. فاتح لقوقي

# الفصل الأول: البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية من أكثر الأساليب الكمية انتشاراً، سوءا في الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العلمية إذ تجد لها تطبيقات عديدة ومتنوعة من جهة، وتميزها بسهولة التطبيق من جهة أخرى مما ساعد في هذا الانتشار. وعليه سيتم في هذا الفصل التطرق إلى مفهوم مصطلح البرمجة الخطية ثم التعرف على كيفية بناء نماذج البرمجة الخطية بأسلوب مبسط و حسب الهدف المحدد سواء كانت المشكلة تعظيم الأرباح أو تدنئة التكاليف، ثم التطرق إلى كيفية حل هاته النماذج باستخدام الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس، ثم يتم التطرق إلى المسألة الثنائية وتحليل الحساسية.

## 1. صياغة نماذج البرمجة الخطية

### 1.1. مفهوم البرنامج الخطي

البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام، عن طريق دالة رياضية مكونة من مجموعة متغيرات من الدرجة الأولى تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية، في ظل وجود مجموعة من القيود في شكل معادلات أو متراجحات أو كلاهما من الدرجة الأولى.[1]

### 2.1. مجالات استخدامات البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات عدة لأجل حل المشكلات التي تواجه متخذ القرار في المؤسسة، زأهم هذه المجالات مايلي:[2]

- توزيع الطاقة الإنتاجية من قوى عاملة، مواد أولية، مكائن ومستلزمات الإنتاج المختلفة على العمليات الصناعية المختلفة بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد (من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات).
- تحديد جداول أو برامج عمل بما يضمن تقليل كلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار حجم الطلب المتوقع.
- تخطيط الإنتاج لصناعة نوع واحد أو أكثر وبالكميات المطلوبة من البضاعة المنتجة.

### 3.1. متطلبات بناء نماذج البرمجة الخطية:

يتطلب بناء نماذج البرمجة الخطية توفر العناصر التالية:

**1.3.1. تحديد دالة الهدف:** وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه مصاغا في صورة دالة خطية، حيث

---

[1] محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2011، ص9.

[2] السعدي رجال، **بحوث العمليات في الإدارة-المالية-التجارة**، منشورات جامعة منتوري، قسنطينة، 2004-2005، ص2.

نسعى من خلال تحديدها إلى تعظيمها وإيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود هو الربح، أو إيجاد النهاية الصغرى إذا كان الهدف المنشود هو التدنئة.[1]

**2.3.1. تحديد القيود:** وهي عبارة عن مجموعة من المتراجحات أو المعادلات أو كلاهما، بحيث نسعى إلى تحقيق الهدف المنشود في ظل هذه القيود، وتتكون القيود من شقين، أما الشق الأيسر فهو عبارة عن المتغيرات من الدرجة الأولى مضروبة في معاملات، أما الشق الأيمن فهو عبارة عن أعداد حقيقية موجبة.

**3.3.1. شرط عدم السلبية:** إذ يجب أن تكون المتغيرات موجبة أو معدومة.

**4.1. افتراضات أساسية في البرمجة الخطية:**

تُبنى البرمجة الخطية على جملة من الافتراضات لعل أهمها:

- **التناسبية:** سواء كان ذلك لدالة الهدف أو القيود، ونقصد بالتناسبية أنه مثلا إذا كان إنتاج الوحدة الواحدة يتطلب 2 ساعة عمل فإن إنتاج 10 وحدات يتطلب 20 ساعة عمل.[2]
- **الإضافية:** معنى ذلك إذا كان الربح المحقق من المنتج الأول يساوي 10 دينار والربح المحقق من المنتج الثاني يساوي 15 دينار، وتم إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول ووحدة واحدة من المنتج الثاني، فإن مجموع الأرباح سيكون 10+15=25 دينار.
- **قابلية القسمة:** معنى ذلك أن الحل ليس بالضرورة أن يكون أعداد طبيعية بل يمكن أن يكون عدد كسري.
- **الخطية:** حيث يشترط أن تكون دالة الهدف والقيود عبارة عن معادلات أو متراجحات تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى.
- **عدم السلبية:** أي أن قيم جميع المتغيرات موجبة أو معدومة كما سبق شرحه.
- **التأكد التام:** يجب أن يكون جميع المعلومات التي تعتمد عليها البرمجة الخطية مؤكدة ولا تتغير حلال فترة الدراسة، سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو القيود.

**5.1. بناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي:**

نقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في شكل تعابير أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، ولبناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي يمكن إتباع الأتي:

---

[1] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، دار اليازوري، الطبعة العربية، عمان، الأردن، 2008، ص 24,

[2] حسين محمود الجنابي، **الأحدث في بحوث العمليات**، دار الحامد، عمان، الأردن، 2010، ص 46.

**1.5.1. تحديد المتغيرات:** ويعتبر أول خطوة في بناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي، إذ يجب تحديد المتغيرات الواجب تعظيمها في حالة التعظيم أو الواجب تدنئتها في حالة التدنئة، حيث تدخل هذه المتغيرات في كتابة الشكل الرياضي في كل الخطوات اللاحقة.

**2.5.1. تشكيل جدول للمسألة:** بعد تحديد المتغيرات يجدر بنا تشكيل جدول للمسألة بحيث يحتوى هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود والكميات المحددة لدالة الهدف.[1]

**3.5.1. تحديد دالة الهدف:** وهو إمكانية التعبير عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له نسعى إلى إيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود هو تعظيم الربح، أو إيجاد النهاية الصغرى لها إذا كان الهدف هو تدنئة التكلفة، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات التي قمنا بتحديدها في الخطوة الأولى مضروبة في معامل خاص يعبر عن ربح الوحدة الواحدة في حالة التعظيم، أو يعبر عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة التدنئة.

**4.5.1. تحديد القيود:** وهو إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات والإمكانات المتاحة في صورة خطية توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة على شكل متراجحات أو معادلات أو كلاهما.

**5.5.1. شرط عدم السلبية** : إذ يجب أن تكون المتغيرات المشكلة للبرنامج الخطي غير سالبة أي موجبة أو معدومة.

ويمكن للمثال التالي أن يعطي نظرة واضحة حول خطوات بناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي:

**مثال(1-1):**

ينتج أحد المصانع نوعين من المنتجات ( كراسي وطاولات)، يستخدم في الإنتاج آلتان، يتطلب إنتاج الكرسي الواحد تشغيل الآلة الأولى مدة ساعتين وتشغيل الآلة الثانية مدة ساعة واحدة، أما إنتاج الوحدة الواحدة من الطاولات فيتطلب تشغيل الآلة الأولى مدة ساعة واحدة والآلة الثانية مدة ثلاث ساعات، إذا علمت أن :

- ربح الوحدة الواحدة من الكراسي هو دينارين بينما ربح الوحدة الواحدة من الطاولات هو دينار ونصف.
- الطاقة الإنتاجية للآلة الأولى لا يتجاوز 8 ساعات، أما الطاقة الإنتاجية للآلة الثانية لا يتجاوز 10 ساعات.

**المطلوب:** بناء النموذج الرياضي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للمصنع.

[1] محمد راتول، **مرجع سابق**، ص 17.

**الحل:**

**الخطوة الأولى: تحديد المتغيرات**

بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد المنتجات من الكراسي وعدد المنتجات من الطاولات.

نضع:

$X_1$ : عدد وحدات الإنتاج من الكراسي $X_2$ : عدد وحدات الإنتاج من الطاولات

**الخطوة الثانية: تشكيل جدول للمسألة**

لتسهيل التعامل مع المعطيات الواردة في المثال يمكن تشكيل جدول المسألة التالي:

| **الطاقة الإنتاجية القصوى لكل آلة (ساعة)** | **الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة** | | **نوع الآلة** |
|---|---|---|---|
| | الطاولات $X_2$ | الكراسي $X_1$ | |
| **8** | 1 | 2 | الأولى |
| **10** | 3 | 1 | الثانية |
| | 1.5 | 2 | الربح لكل وحدة |

**الخطوة الثالثة تحديد دالة الهدف:**

إن الهدف المنشود في هذه المسألة هو تعظيم الربح، وتعظيم الربح يتأتى بتعظيم عدد الوحدات المنتجة من النوعين، يظهر أيضا من خلال جدول المسألة أن الوحدة الواحدة من الكراسي تجلب ربحا قدره 2 وحدة نقدية، أما الوحدة الواحدة من الطاولات تجلب ربحا قدره 1.5 وحدة نقدية.

لذا يمكن كتابة دالة الهدف من الشكل التالي:

$$\mathbf{Max : Z= 2X_1 + 1.5X_2}$$

**الخطوة الرابعة: تحديد القيود**

من خلال جدول المسألة يمكن تحديد القيود على النحو التالي:

**القيد الأول ( قيد الآلة الأولى ):** إن أقصى زمن متاح للآلة الأولى هو 8 ساعات عمل ( يمكن استغلال أقل من هذا الزمن)، ونلاحظ أيضا أن تصنيع كراسي واحد يتطلب 2 ساعة عمل بينما تصنيع طاولة واحدة يتطلب ساعة واحدة فقط. لذا يمكن كتابة القيد الأول من الشكل التالي: $\mathbf{2X_1 + X_2 \leq 8}$

**القيد الثاني ( قيد الآلة الثانية ):** إن أقصى زمن متاح للآلة الثانية هو 10 ساعات عمل ( يمكن استغلال أقل من هذا الزمن) ، ونلاحظ أيضا أن تصنيع كرسي واحد يتطلب ساعة عمل واحدة بينما تصنيع طاولة واحدة يتطلب 3 ساعات عمل. لذا يمكن كتابة القيد الثاني من الشكل التالي: $X_1 + 3X_2 \leq 10$

**الخطوة الخامسة شرط عدم السلبية:**

بما أن الكميات الواجب إنتاجها لا يمكن بحال أن تكون سالبة لذلك يمكن كتابة شرط عدم سلبية المتغيرات من الشكل التالي: $X_1 \geq 0 \; ; \; X_2 \geq 0$

وعليه يمكن كتابة البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Max : } Z = 2X_1 + 1.5X_2 \\ \textbf{S / c} \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \leq 10 \end{cases} \\ X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0 \end{array}}$$

وبهذا نكون قد قمنا **ببناء الشكل الرياضي للبرنامج الخطي** بعدما كان في شكله الوصفي.

### 6.1. تمارين محلولة

**تمرين (1-1):**

تنتج شركة مختصة في مجال الإلكترونيات ثلاث أنواع من أجهزة التلفاز، تلقت طلب من أحد الشركاء التجاريين يرغب في شراء 500 جهاز من النوع الأول و 400 جهاز من النوع الثاني و 350 جهاز من النوع الثالث، لأجل ذلك استوردت الشركة 2000 وحدة من البطاقة الأم التي تدخل في صناعة التلفاز للأنواع الثلاثة، يتوفر لدى الشركة أيضاً 3000 ساعة عمل، حيث تتطلب صناعة النوع الأول من الأجهزة 3 ساعات عمل وتتطلب صناعة النوع الثاني من الأجهزة 4 ساعات عمل وتتطلب صناعة النوع الثالث من الأجهزة 6 ساعات عمل، إذا علمت أن :

- ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول لأجهزة التلفاز هو 10 دج
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الثاني لأجهزة التلفاز هو 15 دج
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الثالث لأجهزة التلفاز هو 7 دج.

**المطلوب:** بناء النموذج الرياضي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للشركة جراء هذه الطلبية.

**الحل:**

**الخطوة الأولى: تحديد المتغيرات**

بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من الأنواع الثلاثة للتلفاز بغية تعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد الوحدات المصنعة من أجهزة التلفاز للأنواع الثلاثة وعليه نضع:

$X_1$ : عدد الوحدات المصنعة من أجهزة التلفاز للنوع الأول

$X_2$ : عدد الوحدات المصنعة من أجهزة التلفاز للنوع الثاني

$X_3$ : عدد الوحدات المصنعة من أجهزة التلفاز للنوع الثالث

**الخطوة الثانية: تشكيل جدول للمسألة**

يمكن تشكيل جدول المسألة كالتالي:

| | أجهزة التلفاز النوع الأول $X_1$ | أجهزة التلفاز النوع الثاني $X_2$ | أجهزة التلفاز النوع الثالث $X_3$ | الطاقات القصوى |
|---|---|---|---|---|
| **وحدات البطاقة الأم** | 1 | 1 | 1 | **2000** |
| **ساعات العمل** | 3 | 4 | 6 | **3000** |
| **ربح كل وحدة** | 10 | 15 | 7 | |

**الخطوة الثالثة تحديد دالة الهدف:**

يمكن كتابة دالة الهدف من الشكل التالي:

$$\mathbf{Max : Z= 10X_1 + 15X_2+ 7X_3}$$

**الخطوة الرابعة: تحديد القيود**

**القيد الأول ( قيد وحدات البطاقة الأم ):** إن وحدات البطاقة الأم المتوفرة لدى الشركة لسد الطلبية هي 2000 وحدة، وبما أنها تدخل في تصنيع كل الأنواع الثلاثة، وعليه يمكن كتابة القيد الأول من الشكل التالي:

$$\mathbf{X_1 + X_2+ X_3 \leq 2000}$$

**القيد الثاني ( قيد ساعات العمل):** إن أقصى زمن متاح لتصنيع الأنواع الثلاثة لأجهزة التلفاز هو 3000 ساعة عمل ( يمكن استغلال أقل من هذا الزمن) ، أما تصنيع النوع الأول يتطلب 3 ساعات عمل بينما تصنيع النوع الثاني يتطلب 4 ساعات عمل و تصنيع النوع الثالث يتطلب 6 ساعات عمل.

وعليه يمكن كتابة القيد الثاني من الشكل التالي: $\mathbf{3X_1 + 4X_2+ 6X_3 \leq 3000}$

**القيد الثالث قيد أجهزة التلفاز من النوع الأول الواجب تصنيعها لسد الطلبية:** لسد هذه الطلبية الشركة مطالبة بتصنيع على الأقل 500 جهاز تلفاز من النوع الأول (يمكنها تصنيع أكثر من 500 جهاز من هذا النوع)، لذا يمكن كتابة هذا القيد من الشكل التالي: $X_1 \geq 500$

**القيد الرابع قيد أجهزة التلفاز من النوع الثاني الواجب تصنيعها لسد الطلبية:** يجب على الشركة تصنيع على الأقل 400 جهاز تلفاز من النوع الثاني، لذا يمكن كتابة هذا القيد من الشكل التالي: $X_2 \geq 400$

**القيد الخامس قيد أجهزة التلفاز من النوع الثاني الواجب تصنيعها لسد الطلبية:** الشركة مطالبة بتصنيع على الأقل 350 جهاز تلفاز من النوع الثالث، لذا يمكن كتابة هذا القيد من الشكل التالي: $X_3 \geq 350$

**الخطوة الخامسة شرط عدم السلبية:**

يمكن كتابة شرط عدم سلبية المتغيرات من الشكل التالي: $X_1 \geq 0 \; ; X_2 \geq 0 \; ; X_3 \geq 0$

وعليه يمكن كتابة البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Max : } Z = 10X_1 + 15X_2 + 7X_3$$

$$S/c \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \leq 2000 \\ 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 3000 \\ X_1 \geq 500 \\ X_2 \geq 400 \\ X_3 \geq 350 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \; ; \; X_2 \geq 0 \; ; X_3 \geq 0$$

وبهذا نكون قد قمنا **ببناء الشكل الرياضي للبرنامج الخطي** بعدما كان في شكله الوصفي.

**تمرين (1-2):**

**خلاصة:**

1. تكتب دالة الهدف من الشكل**(Max : Z)** إذا كان الهدف المنشود هو التعظيم، وتكتب **(Min : Z)** إذا كان الهدف المراد تحقيقه هو التدنئة.
2. إشارة القيود يمكن أن تكون من الشكل أكبر **(≥)**، أصغر **( ≤)**، تساوي **(=)**، كل ماسبق **( ≤ . = . ≥ )**.
3. الشق الأيمن للقيود عبارة عن أعداد ثابتة موجبة، أما الشق الأيسر فهو عبارة عن مجموعة من المعاملات – يمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو معدومة– مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى.
4. يمكن كتابة البرنامج الخطي من خلال ثلاث أجزاء رئيسية: **دالة الهدف، القيود، شرط عدم السلبية.**
5. يمكن كتابة مسائل البرمجة الخطية وفق ثلاث صيغ هي:

**الصيغة المختلطة:** وفيها تكتب القيود في البرنامج الخطي صيغة مختلطة فهي تحوي كل الإشارات ( ≤ ، = ، ≥ ).أما دالة الهدف فتكون في شكل تعظيم **Max** أو في شكل تدنئة **Min**.

**الصيغة القانونية :** وفيها تكتب كل القيود بنفس الإشارة إما ≤ أو ≥ فقط.

– إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإن دالة الهدف تكون في شكل تعظيم **Max**؛

– إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإن دالة الهدف تكون في شكل تدنئة **Min**.

**الصيغة المعيارية (النموذجية):** هي الصيغة التي تكون فيها كل القيود على شكل إشارة تساوي (=) فقط، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو تدنئة.

## 2. حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية

بعد أن تم صياغة البرنامج الخطي نقوم بإيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها في ظل القيود، نسمي عملية إيجاد قيم المتغيرات بعملية حل البرنامج الخطي، ويمكن حل البرنامج الخطي بطريقتين: الطريقة البيانية، طريقة السمبلكس.

تستخدم طريقة الحل البيانية إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على متغيرين فقط، ويتعذر الحل بهذه الطريقة في حالة وجود أكثر من متغيرين. تقوم الطريقة البيانية على فكرة رسم كل قيد من القيود بشكل خط مستقيم في معلم متعامد ومتجانس، ومن ثم نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة. ويمكن استخدامها في حالة التعظيم وفي حالة التدنئة.

### 1.2. حالة التعظيم:

لحل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية في حالة التعظيم نتبع الأتي:

- نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن $\mathbf{X_1}$ والثاني عمودي وليكن $\mathbf{X_2}$ يشكلان معلم متعامد ومتجانس.
- نرسم الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود بعد تحويل المتراجحات إلى معادلات.
- نشطب المناطق التي لا تحقق قيود البرنامج الخطي.
- في الحالة العادية نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة وهي في الغالب عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس.
- نساوي دالة الهدف بالصفر ثم نقوم برسمها في المعلم، نسمي هذا المستقيم بالمستقيم $(\Delta)$، طبعا يمر هذا المستقيم بالمبدأ.
- نقوم بتحريك هذا المستقيم بشكل متوازي باتجاه الرؤوس المُشَكِّلَة لمضلع الحلول الممكنة، وتكون النقطة المثلى هي أخر نقطة يصل إليها المستقيم $(\Delta)$.
- نقوم بتحديد الزوج المرتب $(X_1 ، X_2)$ لهذه النقطة هندسيا أو جبريا.

  **هندسيا:** ويتم ذلك بإسقاط هذه النقطة على المحورين الأفق والعمودي.

  **جبريا:** من خلال حل جملة المعادلتين للمستقيمين المتقاطعين في هذه النقطة.

– في حالة عدم التمكن من تمييز أخر نقطة يصلها المستقيم $(\Delta)$ بسبب وجود عدد من النقاط المتقاربة، فإننا نقوم بتعويض الأزواج المرتبة $(X_1 ، X_2)$ لتلك النقاط في دالة الهدف لتكون النقطة المثلى هي النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف.

**مثال(2-1):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max : } Z = 4X_1 + 4X_2$$

$$S/c \begin{cases} 3X_1 + X_2 \leq 15 \\ X_1 + 2X_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

يتم في الخطوة الأولى تحويل المتراجحات المشكلة لقيود المسألة إلى معادلات كالأتي:

$15X_1 + X_2 \leq 3$ يصبح $3X_1 + X_2 = 15$

$X_1 + 2X_2 \leq 12$ يصبح $X_1 + 2X_2 = 12$

لرسم المستقيمين على المعلم يكفي إيجاد نقطتين لكل مستقيم كالأتي:

**المستقيم** $3X_1 + X_2 = 15$

إذا فرضنا أن $X_1=0$ فإننا نحصل على $X_2=15$

إذا فرضنا أن $X_2=0$ فإننا نحصل على $X_1=5$

**المستقيم** $X_1 + 2X_2 = 12$

إذا فرضنا أن $X_1=0$ فإننا نحصل على $X_2=6$

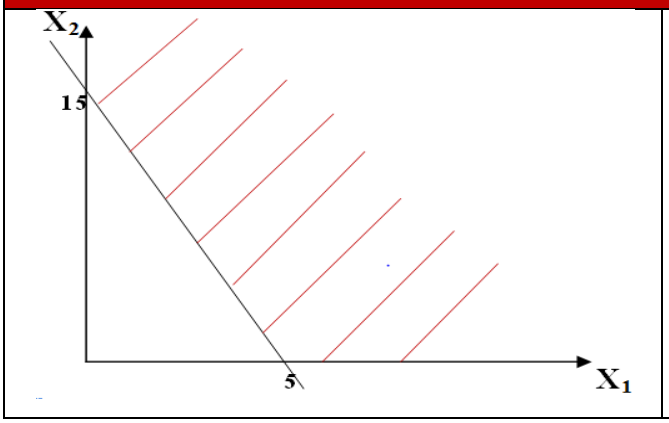
إذا فرضنا أن $X_2=0$ فإننا نحصل على $X_1=12$

**رسم المستقيم** $3X_1 + X_2 = 15$

نستخدم النقطتين:

| $3X_1 + X_2 = 15$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 15 | النقطة الأولى |
| 5 | 0 | النقطة الثانية |

ثم قمنا بشطب المساحة يمين المستقيم باعتبارها نقاط لا تحقق حلول المتراجحة للقيد الأول وأبقينا على المساحة يسار المستقيم كونها نقاط تحقق المتراجحة

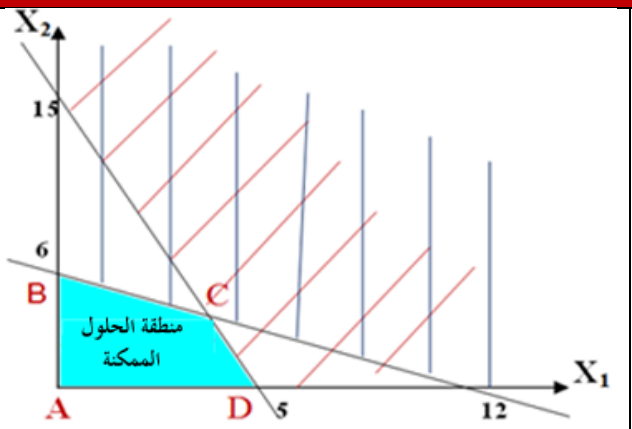


## إضافة رسم المستقيم $X_1 + 2X_2 = 12$

نستخدم النقطتين:

| $X_1 + 2X_2 = 12$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 6 | النقطة الأولى |
| 12 | 0 | النقطة الثانية |

ثم قمنا بشطب المساحة يمين المستقيم باعتبارها نقاط لا تحقق حلول المتراجحة للقيد الثاني وتركنا المساحة يسار المستقيم كونها نقاط تحقق المتراجحة



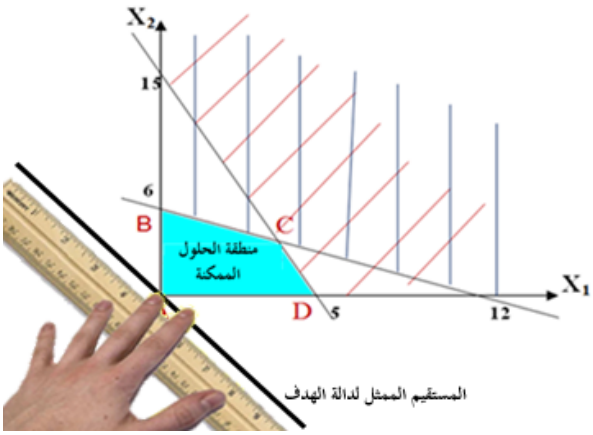

نرسم المستقيم الممثل لمعادلة دالة الهدف بعد مساواتها بالصفر في نفس المعلم

## إضافة رسم المستقيم (Δ) الممثل لدالة الهدف $4X_1 + 4X_2 = 0$

نستخدم النقطتين:

| $4X_1 + 4X_2 = 0$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 0 | النقطة الأولى |
| 1 | - 1 | النقطة الثانية |

نقوم بتحريك هذا المستقيم بشكل متوازي باتجاه الرؤوس المُشَكِّلَة لمضلع الحلول الممكنة كما في الشكل المقابل، حيث يبدو من خلال الرسم أن النقطة C هي النقطة المثلى كونها آخر نقطة يصلها المستقيم (Δ)




نظراً لصعوبة تحديد الزوج المرتب $(X_1 ، X_2)$ لهذه النقطة هندسيا من خلال الإسقاط، نقوم بتحديده جبريا من خلال حل جملة المعادلتين للمستقيمين المتقاطعين.

المستقيم الأول: $3X_1 + X_2 = 15$ .....(1)

المستقيم الثاني: $X_1 + 2X_2 = 12$.....(2)

نضرب المعادلة رقم (1) في العدد 2 نحصل على $6X_1 + 2X_2 = 30$ .....(3)

بطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم (3) نجد $5X_1 = 18$ يعني $X_1 = 18/5 = 3.6$

بالتعويض في المعادلة رقم (2) نجد $X_2 = 4.2$

وعليه النقطة المثلى $(X_1 ، X_2)$ هي $(3.6 ، 4.2)$ والتي تجعل قيمة دالة الهدف $Z = 4(3.6) + 4(4.2) = 31.2$

**ملاحظة:** يمكن أن نقوم مباشرة بتعويض الأزواج المرتبة لنقاط رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة و تكون النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف هي النقطة المثلى.

وفي مثالنا تكون قيم الأزواج المرتبة لنقاط رؤوس المضلع وقيمة دالة الهدف كالأتي:

| النقطة | إحداثيات النقطة | | قيمة Z |
|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | |
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 6 | 24 |
| C | 3.6 | 4.2 | 31.2 |
| D | 5 | 0 | 20 |

وعليه النقطة المثلى $(X_1 ، X_2)$ هي $(3.6 ، 4.2)$ و قيمة دالة الهدف **Z= 4(3.6)+4(4.2)= 31.2** وبالتالي حصلنا على نفس الحل بطريقة الانسحاب.

### 2.2. حالة التدنئة:

لحل البرنامج الخطي في حالة التدنئة باستخدام الطريقة البيانية نتبع نفس الخطوات المستخدمة في حالة التعظيم فقط عند تحريك المستقيم $(\Delta)$ بشكل متوازي باتجاه الرؤوس المُشَكِّلَة لمنطقة الحلول الممكنة تكون النقطة المثلى هي أول نقطة يصل إليها هذا المستقيم.

نقوم أيضاً كما في حالة التعظيم بتحديد الزوج المرتب $(X_1 ، X_2)$ لهذه النقطة هندسيا أو جبريا.

وطبعاً في حالة عدم التمكن من تمييز أول نقطة يصلها المستقيم $(\Delta)$ بسبب وجود عدد من النقاط المتقاربة، فإننا نقوم بتعويض الأزواج المرتبة $(X_1 ، X_2)$ لتلك النقاط في دالة الهدف لتكون النقطة المثلى هي النقطة التي تعطي أقل قيمة لدالة الهدف.

**مثال(2−2):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Min} : Z = 5X_1 + 5X_2$$

$$S/c \begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_1 + 2X_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

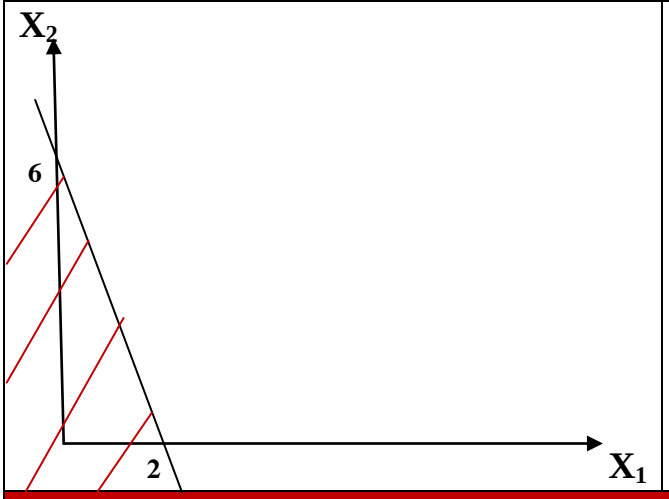
**الحل:**

## رسم المستقيم $3X_1 + X_2 = 6$

نستخدم النقطتين:

| $3X_1 + X_2 = 6$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 6 | النقطة الأولى |
| 2 | 0 | النقطة الثانية |

قمنا بشطب المساحة يسار المستقيم باعتبارها نقاط لا تحقق حلول المتراجحة للقيد الأول وأبقينا على المساحة يمين المستقيم كونها نقاط تحقق حلول المتراجحة

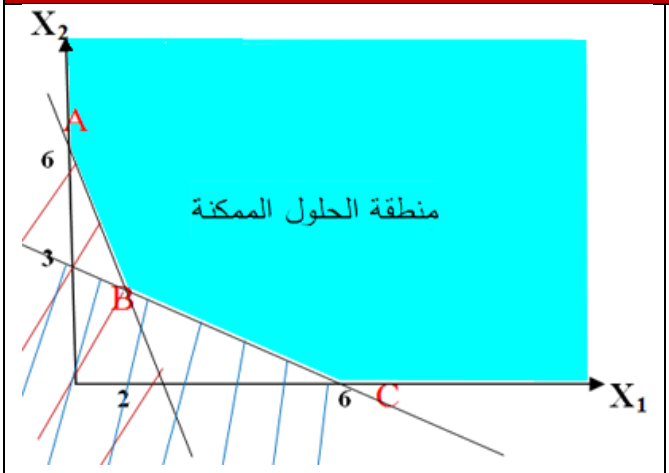



## إضافة رسم المستقيم $X_1 + 2X_2 = 6$

نستخدم النقطتين:

| $X_1 + 2X_2 = 6$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 3 | النقطة الأولى |
| 6 | 0 | النقطة الثانية |

قمنا بشطب المساحة يسار المستقيم باعتبارها نقاط لا تحقق حلول المتراجحة للقيد الثاني وأبقينا على المساحة يمين المستقيم كونها نقاط تحقق حلول المتراجحة

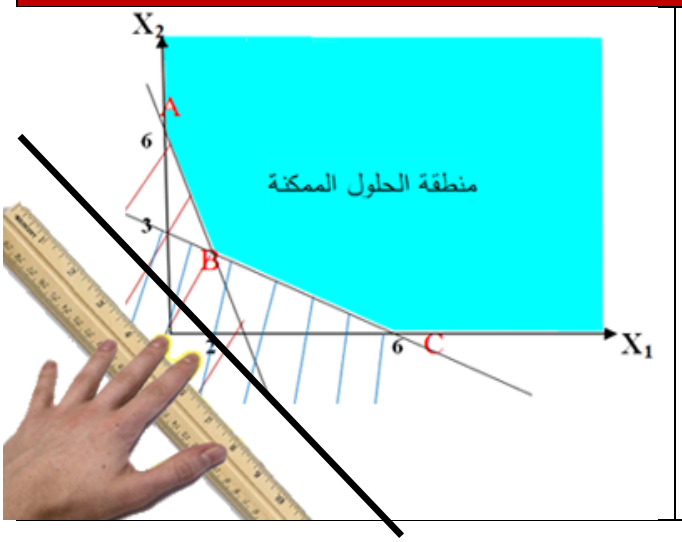



## إضافة رسم المستقيم (Δ) الممثل لدالة الهدف $5X_1 + 5X_2 = 0$

نستخدم النقطتين:

| $5X_1 + 5X_2 = 0$ | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | |
| 0 | 0 | النقطة الأولى |
| 1 | - 1 | النقطة الثانية |

نقوم بتحريك هذا المستقيم بشكل متوازي باتجاه الرؤوس المُشَكِّلَة لمنطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المقابل، حيث يبدو من خلال الرسم أن النقطة لـ**B** هي النقطة المثلى كونها أول نقطة يصلها المستقيم (Δ)



نقوم بتحديد الزوج المرتب $(X_1 ، X_2)$ للنقطة B جبريا من خلال حل جملة المعادلتين للمستقيمين المتقاطعين.

المستقيم الأول: $3X_1 + X_2 = 6$ .....(1)

المستقيم الثاني: $X_1 + 2X_2 = 6$ .....(2)

نضرب المعادلة رقم (1) في العدد 2 نحصل على $6X_1 + 2X_2 = 12$ .....(3)

بطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم (3) نجد $5X_1 = 6$ يعني $X_1 = 6/5 = 1.2$

بالتعويض في المعادلة رقم (2) نجد $X_2 = 2.4$

وعليه النقطة المثلى $(X_1 ، X_2)$ هي $(1.2 ، 2.4)$ والتي تجعل قيمة دالة الهدف $Z = 5(1.2) + 5(2.4) = 18$

### 3.2. استخدام برنامج QM في حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية:

قبل الشروع في حل المسائل باستخدام برنامج QM يجدر بنا أن نقوم بشرح بعض النقاط الهامة حول استخدام هذا البرنامج.

### 4.2. حالات خاصة عند استخدام الحل البياني:

كما تطرقنا سابقا يمكن استخدام الحل بالطريقة البيانية في حالة وجود متغيرين اثنين، إلا أنه توجد حالات خاصة يمكن أن نصادفها وعليه يجب مراعاتها، ومن بين هاته الحالات الخاصة:

### 1.4.2. تعدد الحلول المثلى:

وفي هذه الحالة نجد أنه عند سحب المستقيم $(\Delta)$ نجد أنه يمس رأسين على الأقل من رأسي مضلع الحلول الممكنة كأخر رأسين في حالة التعظيم أو أول رأسين في حالة التدنئة وللتوضيح أكثر يمكن صياغة المثال التالي:

**مثال(2−3):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\textbf{Max : } Z=2X_1+4X_2$$

$$S/c\begin{cases} X_1+2X_2\leq 10 \\ 4X_1\leq 24 \\ X_2\leq 4 \end{cases}$$

$$X_1\geq 0;\quad X_2\geq 0$$

**الحل:**

### .4.2. حالة استحالة الحل:

في هذه الحالة يكون هناك تناقض بين القيود ولا تنتج لنا أية منطقة للحلول الممكنة.

**مثال(2−4):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\textbf{Min : } Z=4X_1+3X_2$$

$$S/c \begin{cases} X_1+2X_2 \leq 5 \\ X_1+2X_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

### 3.4.2. حالة عدم محدودية الحل:

**مثال(2−5):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max : } Z=3X_1+5X_2$$

$$S/c \begin{cases} 2X_1+4X_2 \geq 20 \\ 4X_1+2X_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

### 4.4.2. حالة حيادية أحد القيود:

نكون في حالة حيادية القيود عندما يكون أحد المستقيمات الممثلة للقيود لا يلمس منطقة الحلول الممكنة، وبالتالي فهذا القيد حيادي ويمكن الاستغناء عنه دون أن يأثر ذلك على إيجاد الحلول المثلى.

**مثال(2−6):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max : } Z=7X_1+5X_2$$

$$S/c \begin{cases} X_1+X_2 \leq 4 \\ 3X_1+2X_2 \leq 6 \\ 2X_1+3X_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

## 3. عرض حل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

تناولنا فيما سبق إمكانية إيجاد الحل بيانيا وقد اتصف الحل بالسهولة نظراً لوجود متغيرين اثنين فقط، أما في حالة تعدد المتغيرات فإنه من غير الممكن استخدام الطريقة البيانية، في هذه الحالة يجب استخدام طريقة أخرى ابتكرها العالم الرياضي George Dantzig عام1947، تعرف هذه الطريقة بطريقة السمبلكس Simplexe.[1]

يمكن تلخيص خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس فيما يلي:

1. تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية (القياسية)
2. تشكيل جدول الحل الأساسي الأول.
3. تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة من الحالات خاصة.

### 1.3. حالة التعظيم:

**مثال (3-1):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{Max : } Z = 2X_1 + X_2$$

$$S/c \begin{cases} 3X_1 + X_2 \leq 15 \\ X_1 + 2X_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

**أولا: تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية (القياسية)**

- بما أن القيود في البرنامج الخطي عبارة عن متراجحات في شكل أصغر من أو تساوي فقد قمنا بإدخال متغيرات جديدة غير سلبية تسمى بمتغيرات الفجوة (الفرق) كونها تسد الفرق بين طرفي المتراجحة, يرمز لها بالرمز $S_i$ .

[1] منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات : مدخل علمي لاتخاذ القرارات** ، دار وائل، الطبعة الأولى، عمان، الأردن 2009، ص 103.

فمثلا القيد الأول $3X_1 + X_2 \leq 15$ الطرف الأيسر أصغر من الطرف الأيمن لذلك نقوم بإضافة متغير فجوة $S_1$ إلى الطرف الأيسر كي يصبح مساويا إلى الطرف الأيمن ويكتب $3x_1+x_2 + S_1= 15$.

أما القيد الثاني $X_1 + 2X_2 \leq 12$ الطرف الأيسر أيضاً أصغر من الطرف الأيمن لذلك نقوم بإضافة متغير فجوة $S_2$ إلى الطرف الأيسر كي يصبح مساويا إلى الطرف الأيمن ويكتب $x_1+2x_2 + S_2= 12$.

وقمنا فيما بعد بكتابة متغيرات الفجوة $S_1$ و $S_2$ في كلا القيدين لكن بمعامل صفري في القيد الذي لا يظهر فيه فعليا متغير الفجوة بغية الحصول على مصفوفة الوحدة وتمهيدا لكتابة القيود في جدول السمبلكس الأول.

$$3x_1+x_2 +1 S_1+ 0S_2 = 15$$
$$x_1+2x_2 + 0S_1+ 1S_2 = 12$$

**بما أن عدد القيود هو 2 فيجب الحصول على مصفوفة الوحدة المربعة ذات الرتبة (2×2)**

- عند إضافة متغيرات الفجوة إلى القيود فيجب إضافتها أيضاً إلى دالة الهدف بمعامل صفري على النحو التالي: $\mathbf{Max: Z = 2x_1+ x_2 +0S_1+0S_2}$

- بما أن متغيرات الفجوة هي متغيرات غير سلبية فيجب كتابة ذلك في الصيغة النموذجية.

وعليه يمكن كتابة الصيغة النموذجية النهائية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

$$\mathbf{Max :Z = 2 x_1+ x_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{Max: Z = 2x_1+ x_2 +0S_1+0S_2}$$

$$\mathbf{S/c}\begin{cases} 3x_1+x_2 + S_1= 15 \\ x_1+2x_2 + S_2 = 12 \end{cases} \qquad \mathbf{S/c}\begin{cases} 3x_1+x_2 + S_1+ 0S_2 = 15 \\ x_1+2x_2 + 0S_1+ S_2 = 12 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0 \qquad\qquad X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0$$

**الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي للمثال (3-1)**

## ثانيا: تشكيل جدول الحل الأساسي الأول

يمكن تشكيل جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

متغيرات داخل الأساس

متغيرات خارج الأساس

معاملات دالة الهدف

| $C_j$ | | 2 | 1 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 15 | 15/3 = 5 |
| 0 | $S_2$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 12 | 12/1 = 12 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | Z = 0 | |
| $C_j - Z_j$ | | 2 | 1 | 0 | 0 | | |

صف الارتكاز

القيد الأول

القيد الثاني

عمود الارتكاز

عنصر الإرتكاز

مصفوفة الوحدة

نلاحظ من خلال جدول الحل الأساسي الأول أن المتغيرات داخل الأساس هي المتغيرات التي تشكل مصفوفة الوحدة، أما المتغيرات خارج الأساس فهي المتغيرات الأصلية التي نبحث عن قيمها المثلى التي تحقق أعظمية دالة الهدف.

في جدول الحل الأساسي الأول في حالة التعظيم نجد دائما تكون قيمة دالة الهدف **Z = 0** وقيم المتغيرات $x_1=0$ و $x_2=0$، طبعا نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو الوصول إلى حالة من الحالات الخاصة والتي سيتم التطرق إليها لاحقا.

## ثالثا: تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة من الحالات خاصة

أولا وقبل تشكيل جدول الحل الأساسي الثاني يجب أن نختبر أمثلية الحل، ويتم اختبار أمثلية الحل في حالة التعظيم من خلال قيم السطر الأخير من جدول الحل الأساسي $C_j - Z_j$، فإذا كانت كلها قيم سالبة أو معدومة يكون الحل أمثلا، أما إذا كان أحد أو بعض قيم $C_j - Z$ موجب فإن الحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

في مثالنا نجد أن قيم $C_j - Z$ بعضها موجبة و بعضها الأخر معدوم لذا فالحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

لإجراء التحسين نتبع الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى:** تحديد أكبر قيمة موجبة في الصف السفلي من جدول السمبلكس (قيم $C_j - Z_j$) وأطلق على العمود الذي تظهر فيه هذه القيمة بعمود الارتكاز، وإذا وجد أكثر من رقم متساوي فاختر أحدهما.[1]

في مثالنا أكبر قيمة من قيم الصف $C_j - Z_j$ هي 2 وبالتالي يكون عمود الارتكاز هو العمود الذي يضم الرقم 2 كما هو مبين في آنفا في الجدول الأساسي الأول.

**الخطوة الثانية:** كون نسباً بقسمة كل رقم من العمود $B_i$ على العدد الموجب في عمود الارتكاز والذي يقع في صفه، العنصر في عمود الارتكاز الذي يؤدي إلى أصغر نسبة يطلق عليه عنصر الارتكاز، إذا أدى أكثر من رقم إلى نفس النسبة فاختر أحدهما، وإذا لم يوجد في عمود الارتكاز أي رقم موجب يكون البرنامج ليس له حل.

في مثالنا أصغر نسبة هي 5 = 15/3 وبالتالي يكون عنصر الارتكاز هو 3 كما هو موضح في الجدول الأساسي الأول.

**الخطوة الثالثة:** استخدم العمليات الأولية في تحويل عنصر الارتكاز إلى واحد، واختصار كل العناصر الأخرى في عمود الارتكاز إلى الصفر وقسمة كل عناصر صف الارتكاز على عنصر الارتكاز. وفي مثالنا يتم تحويل عنصر الارتكاز 3 إلى 1 و تحويل كل عناصر عمود صف الارتكاز إلى الصفر، بمعنى تحويل 1 إلى 0. وقسمة كل عناصر صف الارتكاز على عنصر الارتكاز.

بقية العناصر الأخرى تحسب على النحو التالي:

مثلا نريد حساب قيمة c في الجدول الأساسي الموالي:

عنصر الارتكاز

| | |
|---|---|
| a | b |
| d | c |

نقوم بحساب قيمة c على النحو التالي:

$$\text{العنصر الجديد} = \frac{(a \times c) - (b \times d)}{a}$$

[1] ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، سلسلة ملخصات شوم، ترجمة حسن حسني الغباري ومحمد إبراهيم يونس الدار الدولية، القاهرة، مصر، 2003، ص58.

**الخطوة الرابعة:** نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس (التي تقع في صف عنصر الارتكاز) بالمتغيرة التي ستدخل للأساس (التي تقع في عمود الارتكاز).

وفي مثالنا المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المتغيرة $S_1$ وتحل محلها المتغيرة $x_1$.

من خلال كل ما سبق يمكن تشكيل الجدول الأساسي الثاني على النحو التالي:

| $C_j \rightarrow$ | | 2 | 1 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 2 | $x_1$ | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 5 | $5/_{1/3} = 15$ |
| 0 | $S_2$ | 0 | 5/3 | -1/3 | 1 | 7 | $7/_{5/3} = 21/5$ |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 2 | 2/3 | 2/3 | 0 | $Z = 2 \times 5 = 10$ | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 | | |

- نلاحظ من خلال الجدول أن قيمة دالة الهدف تحسنت لتصبح 10 بعدما كانت قيمتها 0. كما أن قيم المتغيرات داخل الأساس هي: $x_1=5$ و $S_2=7$ ، أما المتغيرات خارج الأساس فقيمها معدومة بمعني $x_2=0$ و $S_1=0$.

ويمكن التأكد من قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 2(5) + 1(0) + 0(0) + 0(7) = 10$$

- من خلال الجدول الأساسي الثاني نلاحظ أيضاً أن الصف $C_j - Z$ يضم قيمة موجبة وحيدة وعليه فالحل غير أمثل ويتطلب تحسين. ويتم اختيار العمود الذي يضم تلك القيمة على أساس أنه عمود الارتكاز.
- أصغر نسبة ل$B_i / a_{ij}$ هي 21/5 وبالتالي يكون العنصر5/3 هو عنصر الارتكاز.
- يتم تحويل عنصر الارتكاز ليصبح 1 أما بقية العناصر في صف الارتكاز فيتم قسمتها على عنصر الارتكاز (5/3)،
- تحول القيم في عمود الارتكاز إلى الصفر(نحول القيمة (1/3) إلى الصفر)، بقية العناصر تحسب بالطريقة التي تم شرحها سابقاً.
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المتغيرة $S_2$ وتحل محلها المتغيرة $x_2$.

يكون الجدول الأساسي الثالث على النحو التالي:

| $C_j \rightarrow$ | | 2 | 1 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 2 | $x_1$ | 1 | 0 | 6/15 | -1/5 | 18/5 | |
| 1 | $x_2$ | 0 | 1 | -1/5 | 3/5 | 21/5 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 2 | 1 | 9/15 | 1/5 | $Z = (2\times\frac{18}{5}) + (1\times\frac{21}{5})$ $Z = \frac{47}{5} = 11.4$ | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | -9/15 | -1/5 | | |

من خلال الجدول الأساسي الثالث نلاحظ كل قيم الصف $C_j - Z$ سالبة أو معدومة وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل والجدول الأساسي الثالث هو الجدول الأخير. وتكون النتائج كالأتي:

$x_1$=18/5 ، $x_2$ =21/5 ، $S_2$=0 ، $S_1$=0 أما قيمة دالة الهدف فتكون كما يلي:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 2(18/5) + 1(21/5) + 0(0) + 0(0) = \mathbf{11.4}$$

### 2.3. حالة التدنئة:

**مثال (3-2):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{Min} : Z = 5X_1 + 7X_2$$

$$S/c \begin{cases} X_1 \leq 20 \\ X_2 \geq 20 \\ X_1 + 2X_2 = 50 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

**أولا: تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية (القياسية)**

- بما أن القيد الأول عبارة عن متراجحة في شكل أصغر من أو تساوي نقوم بإضافة متغيرة الفجوة إلى الطرف الأيسر يرمز لها بالرمز $S_1$. ونكتب $x_1 + S_1 = 20$

أما القيد الثاني فهو عبارة عن متراجحة في شكل أكبر من أو تساوي في هذه الحالة نقوم كذلك بإضافة متغيرة الفجوة $S_2$ إلى الطرف الأيمن ونكتب $x_2 = 20 + S_2$، وبعد نقل $S_2$ إلى الطرف الأيسر تصبح المعادلة من الشكل $x_2 - S_2 = 20$. بما أن معامل متغيرة الفجوة $S_2$ سالب وبالتالي لا يتيح لنا الحصول على مصفوفة الوحدة في معاملات القيود، لذلك يتم الاستعانة بمتغيرات اصطناعية يرمز لها ب $A_i$. ليصبح القيد الثاني من الشكل: $x_2 - S_2 + A_1 = 20$.

أما بخصوص القيد الثالث فهو عبارة عن معادلة في شكل تساوي في هذه الحالة يتم إضافة متغيرة اصطناعية $A_2$ فقط ولا حاجة لإضافة متغيرة الفجوة لأن الطرف الأيمن مساوي للطرف الأيسر. وعليه يكتب القيد الثالث من الشكل: $\mathbf{X_1 + 2X_2 + A_2 = 50}$

- متغيرات الفجوة تضاف إلى دالة الهدف بمعامل صفري، أما المتغيرات الاصطناعية فتضاف بمعامل كبيرا جداً M بإشارة موجبة في حالة التدنئة وبإشارة سالبة في حالة التعظيم، وعليه تكتب دالة الهدف من الشكل: $\mathbf{Min: Z = 5x_1 + 7x_2 + 0S_1 + 0S_2} + MA_1 + MA_2$
- إن متغيرات الفجوة والمتغيرات الاصطناعية هي متغيرات غير سلبية لذا يجب كتابة عدم سلبية هاته المتغيرات الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي.

وعليه تكون الصيغة النموذجية النهائية للبرنامج الخطي من الشكل التالي:

$$\mathbf{Min : Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2} + MA_1 + MA_2$$

$$\mathbf{S/c} \begin{cases} x_1 + S_1 + 0A_1 + 0A_2 = 20 \\ x_2 - S_2 + 0S_1 + A_1 + 0A_2 = 20 \\ \mathbf{X_1 + 2X_2} + 0S_1 + 0A_1 + A_2 = \mathbf{50} \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0;\ A_1 \geq 0;\ A_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Min : Z = 5x_1 + 7x_2}$$

$$\mathbf{S/c} \begin{cases} x_1 + S_1 = 20 \\ x_2 - S_2 + A_1 = 20 \\ \mathbf{X_1 + 2X_2} + A_2 = \mathbf{50} \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0$$
$$A_1 \geq 0;\ A_2 \geq 0$$

**ثانيا: تشكيل جدول الحل الأساسي الأول**

يمكن تشكيل جدول الحل الأساسي الأول على النحو التالي:

| $C_j \rightarrow$ | | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 | - |
| M | $A_1$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 20 | 20/1 = 20 |
| M | $A_2$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 50 | 50/2 = 25 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | M | 3M | 0 | -M | M | M | Z =20M+50M | |
| $C_j - Z_j$ | | 5 -M | 7-3M | 0 | M | 0 | 0 | Z=70M | |

عمود الإرتكاز — أصغر قيمة في الصف $C_j - Z_j$ — صفد الإرتكاز

**ثالثا: تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة من الحالات خاصة**

يتم اختبار أمثلية الحل في حالة التدنئة من خلال قيم السطر الأخير من جدول الحل الأساسي( صف$C_j - Z_j$)، فإذا كانت كلها قيم موجبة أو معدومة يكون الحل أمثلا، أما إذا كان أحد أو بعض قيم الصف $C_j - Z$ سالب فإن الحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

بالرجوع إلى مثالنا نجد أن قيم $C_j - Z_j$ بعضها سالبة و بعضها معدوم و بعضها الأخر موجب فالحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

تجدر الإشارة أن اختيار عمود الارتكاز في حالة التدنئة **Min** يستند على أقل قيمة في الصف الأخير من الجدول ( صف $C_j - Z_j$ )، وفي مثالنا أقل قيمة في الصف الأخير هي 7-3M، وعليه يكون عنصر الارتكاز هو 1.

نتبع نفس الخطوات المنتهجة في حالة التعظيم والتي تم التطرق لها في المثال رقم 10، أما فيما يتعلق بالمتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المتغيرة $A_1$ وتحل محلها المتغيرة $x_2$.

ويكون الجدول الأساسي الثاني كمايلي:

| $C_j \rightarrow$ | | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 | – |
| 7 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 20 | – |
| M | $A_2$ | 1 | 0 | 0 | 2 | -2 | 1 | 10 | 10/2 = 5 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | M | 7 | 0 | -7+ 2M | 7 -2M | M | | |
| $C_j - Z_j$ | | 5 -M | 0 | 0 | 7 -2M | -7+ M | 0 | **Z =140+10M** | |

- قيمة دالة الهدف في الجدول الأساسي الثاني انخفضت لتصبح **140+10M** بعدما كانت قيمتها **70M**.
- الصف $C_j - Z_j$ لا زال يضم قيمة سالبة فالحل غير أمثل ويتطلب تحسين. ويتم اختيار العمود الذي يضم تلك القيمة على أساس أنه عمود الارتكاز.
- أصغر نسبة ل$B_i / a_{ij}$ هي 5 وبالتالي يكون العنصر2 هو عنصر الارتكاز.
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المتغيرة $A_2$ وتحل محلها المتغيرة $S_1$.

وعليه يكون الجدول الأساسي الثالث على النحو التالي:

| $C_j \rightarrow$ | | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 | |
| 7 | $X_2$ | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 25 | |
| 0 | $S_2$ | 1/2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1/2 | 5 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 7/2 | 7 | 0 | 0 | 0 | 7/2 | | |
| $C_j - Z_j$ | | 3/2 | 0 | 0 | 0 | M | M -7/2 | **Z =175** | |

الجدول الأساسي الثالث هو الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل لأن كل قيم الصف $C_j - Z$ موجبة أو معدومة. وتكون النتائج كالأتي:

$X_1 = 0$ ، $X_2=25$ ، $S_2=20$ ، $S_1=5$ ، $A_1=0$ $A_2=0$ قيمة دالة الهدف تكون كما يلي:

$$Z = 5(0)+7(25)+0(5)+0(20)+M(0)+M(0) = \mathbf{175}$$

### 3.3. حالات خاصة:

عند استخدام طريقة السمبلكس يمكن أن نصادف بعض الحالات الخاصة منها:

- وجود أكثر من حل
- عدم محدودية الحل
- عدم وجود حل

### 1.3.3. وجود أكثر من حل:

تحدث هذه الحالة عندما تكون قيم الصف $C_j - Z_j$ أقل أو يساوي الصفر في حالة التعظيم، أو أكبر أو يساوي الصفر في حالة التدنئة، لكننا نجد أن قيمة أحد المتغيرات خارج الأساس لها قيمة معدومة في الصف $C_j - Z_j$.

**مثال (3-3):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{Max} : Z=2X_1 + 4X_2$$

$$S/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ 4X_1 \leq 24 \\ X_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:** يكون الجدول الأساسي الأول من الشكل:

| $C_j$ | | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 | 10/2 = 5 |
| 0 | $S_2$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 24 | - |
| 0 | $S_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | 4/1 = 4 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $Z = 0$ | |
| $C_j - Z_j$ | | **2** | **4** | **0** | **0** | **0** | | |

والجدول الذي يليه من الشكل:

| $C_j$ | | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | -2 | 2 | 2/1 = 2 |
| 0 | $S_2$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 24 | 24/4 = 6 |
| 4 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | - |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | $Z = 16$ | |
| $C_j - Z_j$ | | **2** | **0** | **0** | **0** | -4 | | |

ثم الجدول التالي:

| $C_j$ | | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 2 | $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | -2 | 2 | |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | -4 | 1 | 8 | 16 | |
| 4 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 2 | 4 | 2 | 0 | 0 | $Z = 20$ | |
| $C_j - Z_j$ | | **0** | **0** | -2 | **0** | **0** | | |

كل قيم الصف $C_j - Z_j$ أقل أو يساوي الصفر فالحل أمثل، لكن وجود القيمة صفر في عمود المتغيرة $S_3$ وهي متغيرة خارج الأساس يقودنا إلى أن الحل الأمثل المتوصل إليه ليس هو الحل الوحيد الأمثل بل هناك مجموعة متعددة. وهذا ما من شأنه إتاحة خيارات متعددة لمتخذي القرار في المؤسسة.

### 2.3.3. عدم وجود حل أمثل:

في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه قيم الصف الأخير أقل أو يساوي الصفر في حالة التعظيم، أو أكبر أو يساوي الصفر في حالة التدنئة، لكن المتغيرات التي داخل الأساس تتضمن متغير اصطناعي واحد أو أكثر.

**مثال (3-4):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{Min} : Z = 6X_1 + 4X_2$$

$$S/c \begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 6X_1 + 8X_2 \geq 24 \\ X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0 \end{cases}$$

**الحل:**

| $C_j \rightarrow$ | | 6 | 4 | 0 | 0 | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | | |
| 0 | $S_1$ | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 4/2 = 2 |
| M | $A_1$ | 6 | 8 | 0 | -1 | 1 | 24 | 24/8 = 3 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 6M | 8M | 0 | -M | M | $Z = 24M$ | |
| $C_j - Z_j$ | | 6-6M | 4-8M | 0 | M | 0 | | |

| $C_j \rightarrow$ | | 6 | 4 | 0 | 0 | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | | |
| 4 | $X_2$ | 2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 2 | |
| M | $A_1$ | -6 | 0 | -4 | -1 | 1 | 8 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 8-6M | 4 | 2-4M | -M | M | $Z = 8 + 8M$ | |
| $C_j - Z_j$ | | -2+6M | 0 | -2+4M | M | 0 | | |

كل قيم السطر الأخير (السطر $C_j - Z_j$) موجبة أو معدومة من المفترض أن يكون الحل أمثل لكن توجد المتغيرة الاصطناعية داخل الأساس، وهو ما يقودنا إلى الحالة الخاصة المتمثلة في عدم وجود حل أمثل لهذا البرنامج الخطي.

### 3.3.3. عدم محدودية الحل:

تحدث هذه الحالة عندما تكون جميع عناصر عمود الارتكاز سالبة أو معدومة، حيث يستحيل اختيار صف الارتكاز والذي يتحدد أساسا من خلال أصغر نسبة موجبة للعمود $B_i / a_{ij}$.

**مثال (3-5):**

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{Max : } Z=3X_1+5X_2$$

$$S/c \begin{cases} 2X_1+4X_2 \geq 20 \\ 4X_1+2X_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**الحل:**

| $C_j$ ↓ | | 3 | 5 | 0 | 0 | M | M | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | | |
| M | $A_1$ | 2 | 4 | -1 | 0 | 1 | 0 | 20 | - |
| M | $A_2$ | 4 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 20 | - |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 6M | 6M | -M | -M | M | M | $Z = 24M$ | |
| $C_j - Z_j$ | | 3-6M | 5-6M | M | M | 0 | 0 | | |

**يتم اختيار عمود الارتكاز في حالة التعظيم على أساس أكبر قيمة موجبة في السطر $C_j - Z_j$ وبما أنه توجد قيمتين موجبتين ومتساويتين نقوم باختيار أحدهما**

من خلال الجدول نستنتج أننا في حالة عدم محدودية الحل، فإذ قمنا باختيار العمود $S_1$ كعمود الارتكاز فإننا لا نستطيع تحديد صف الارتكاز كون أن نسب العمود $B_i / a_{ij}$ غير موجبة، وكذلك الحال إذا قمنا باختيار العمود $S_2$ فإننا لا نستطيع تحديد صف الارتكاز لأن نسب العمود $B_i / a_{ij}$ تكون أيضاً غير موجبة.

**خلاصة:**

- إذ كان القيد من الشكل أقل من أو يساوي (≤)، فإننا نحتاج إلى إدخال متغيرة فجوة $S_i$ فقط.
- إذا كان القيد من الشكل أكبر من أو يساوي (≥) فإننا نقوم بإضافة متغيرة فجوة $S_i$ و متغيرة اصطناعية $A_i$.
- إذ كان القيد من الشكل يساوي (=)، فإننا نحتاج إلى إدخال متغيرة اصطناعية $A_i$ فقط.
- عندما نضيف مجموعة من متغيرات الفجوة فإننا نقوم بترقيمها ترقيماً تسلسلياً ( $S_1$، $S_2$،...)، وكذلك هو الحال بالنسبة لإضافة المتغيرات الاصطناعية فإننا نقوم بترقيمها ترقيماً تسلسلياً ($A_1$، $A_2$،...).
- المحدد لعدد المتغيرات داخل الأساس هو عدد القيود في المسألة، مثلا إذا كان ثلاث قيود في المسألة فإن عدد المتغيرات داخل الأساس تكون ثلاث متغيرات.
- نصل إلى الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل في حالة التعظيم إذا كان كل قيم الصف $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة، أما في حالة التدنئة فإننا نصل إلى الحل الأمثل إذا كان كل قيم الصف $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة.
- قيمة دالة الهدف في حالة التعظيم تبدأ من الصفر ثم تتزايد إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة خاصة، أما قيمة دالة الهدف في حالة التدنئة فتتناقص حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة خاصة.

### 4.3. تمارين محلولة باستخدام برنامج QM:

## 4. الثنائية (البرنامج المرافق)

في بعض الأحيان يكون حل البرنامج الخطي الأصلي صعب، لذا نلجأ إلى حل البرنامج الثنائي (البرنامج المرافق) والذي يتم اشتقاقه أساسا من البرنامج الأصلي.

### 1.4. تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي:

لغرض تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي نتبع الخطوات التالية:

- إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الأصلي في صيغة تعظيم **Max: Z** فإنها تقلب إلى صيغة التدنئة **Min: W** في النموذج الثنائي، والعكس صحيح.
- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي تمثل قيم الطرف الأيمن للقيود في البرنامج الثنائي، لذا فعدد المتغيرات في البرنامج الأصلي يكون مساويا لعدد القيود في البرنامج الثنائي.
- قيم الطرف الأيمن للقيود في البرنامج الأصلي تمثل معاملات دالة الهدف، وعليه يكون عدد القيود في البرنامج الأصلي مساوياً لعدد المتغيرات في البرنامج الثنائي.
- إذا كانت متغيرات البرنامج الأصلي هي: $X_1$، $X_2$، $X_3$،...، $X_n$ ، فإن متغيرات البرنامج الثنائي هي: $Y_1$، $Y_2$، $Y_3$،...، $Y_m$ .
- إشارة المتغيرات في البرنامج الأصلي تحدد إشارة القيود في البرنامج الثنائي.
- إشارة القيود في البرنامج الأصلي تحدد إشارة القيود في البرنامج الثنائي.

ويمكن توضيح مختلف الخطوات في الجدول التالي:

| البرنامج الأصلي | البرنامج الثنائي |
|---|---|
| قيم الطرف الأيمن للقيود<br>معاملات دالة الهدف<br>مصفوفة المعاملات في القيود | معاملات دالة الهدف<br>قيم الطرف الأيمن للقيود<br>منقول مصفوفة المعاملات في القيود |
| **Max** | **Min** |
| إشارة القيد i أصغر من أو تساوي<br>إشارة القيد i أكبر من أو يساوي<br>إشارة القيد i تساوي<br>إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي<br>المتغيرة i غير معرفة الإشارة | إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i غير معرفة الإشارة<br>إشارة القيد i أكبر من أو تساوي<br>إشارة القيد i أصغر من أو تساوي<br>إشارة القيد i من الشكل تساوي |
| **Min** | **Max** |
| إشارة القيد i أصغر من أو تساوي<br>إشارة القيد i أكبر من أو يساوي<br>إشارة القيد i تساوي<br>إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي<br>المتغيرة i غير معرفة الإشارة | إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي<br>إشارة المتغيرة i غير معرفة الإشارة<br>إشارة القيد i أقل من أو تساوي<br>إشارة القيد i أكبر من أو تساوي<br>إشارة القيد i من الشكل تساوي |

**مثال (4-1):**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max} : Z = 6X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 2 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad X_3 \geq 0$$

**الحل:**

يمكن كتابة البرنامج الثنائي من الشكل التالي:

$$\text{Min : } W = 5Y_1 + 2Y_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \geq 6 \\ 2Y_1 + Y_2 \geq 12 \\ Y_1 + 3Y_2 \geq 4 \end{cases}$$

$Y_1 \geq 0$ ; $Y_2$: غ.م. الإشارة

**مثال (4-2):**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min : } Z = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 7X_3 \leq 15 \\ 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 22 \\ 3X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 25 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3$: غ.م. الإشارة

**الحل:**

البرنامج الثنائي يكتب من الشكل الأتي:

$$\text{Max : } W = 15Y_1 + 22Y_2 + 25Y_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \leq 5 \\ 2Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 \leq 3 \\ 7Y_1 + 3Y_2 + 3Y_3 = 2 \end{cases}$$

$Y_1 \leq 0$ ; $Y_2$: غ.م. الإشارة ;x $Y_3 \leq 0$

**ملاحظات:**

- إذا كان القيد رقم i في النموذج الأصلي بإشارة أكبر أو تساوي ≥ في حالة التعظيم (**Max**) فإنه يؤثر على المتغيرة رقم ***i*** فتكون أقل أو تساوي الصفر في نموذج التدنية الثنائي($y_i \leq 0$ ).في هذه الحالة نقوم بتحويل إشارة المتراجحة من الشكل أقل أو تساوي بضرب طرفيها في القيمة (**−1**).
- ظهور القيد رقم ***i*** بإشارة تساوي (**=**) في نموذج التعظيم الأولي (***Max***) يؤثر على المتغيرة رقم i فتكون غير محددة الإشارة في نموذج التدنية الثنائي ، يمكن في هذه الحالة تحويل القيد إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي و الأخرى أكبر أو تساوي.
- ظهور المتغيرة رقم j غير محددة الإشارة في نموذج التعظيم الأولي (***Max***) يؤثر على القيد رقم j فيظهر بالإشارة (=) في نموذج التدنية الثنائي. يمكن معالجة ذلك المتغيرة j بفرق متغيرتين ($x_j = x'_j - x''_j$)،
- عند ظهور المتغيرة رقم **j** بإشارة أقل أو تساوي الصفر في نموذج التعظيم الأولي (**Max**) فإنه يمكن المحافظة على شرط عدم سلبية المتغيرات بوضع ($x_j = - x'_j$).

### 2.4. استخراج حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الثنائي:

كي يتسنى للطالب فهم كيفية استخراج حلول البرنامج الخطي الأصلي انطلاقاً من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الأصلي نتبع المثال التالي:

**مثال (4−3):**

استخرج حلول البرنامج الخطي التالي انطلاقاً من جدول السمبلكس الأخير لبرنامجه الثنائي:

$$\text{Min : } Z = 10X_1 + 8X_2 + 4X_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} X_1 + X_3 \geq 3 \\ 2X_1 + X_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad X_3 \geq 0$$

**الحل:**

البرنامج الثنائي يكتب من الشكل الأتي:

$$\text{Max : } W = 3Y_1 + 3Y_2$$

$$S/c \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \leq 10 \\ Y_2 \leq 8 \\ Y_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \; ; \quad Y_2 : \geq 0 \; ; \; Y_3 \geq 0$$

يتم حل البرنامج الثنائي باستخدام طريقة السمبلكس على النحو التالي:

| $C_j \rightarrow$ | | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 | 10/1 = 10 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | - |
| 0 | $S_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 4/1 = 4 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $W = 0$ | |
| $C_j - W_j$ | | 3 | 3 | 0 | 0 | | | |

| $C_j \rightarrow$ | | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 0 | 2 | 1 | 0 | -1 | 6 | 6/2 = 3 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8/1 = 8 |
| 3 | $Y_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | - |
| $W_j = \sum C_j x_j$ | | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | $W = 12$ | |
| $C_j - W_j$ | | 0 | 3 | 0 | 0 | -3 | | |

| $C_i$ | | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | $B_i$ | $B_i / a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 3 | $Y_2$ | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 3 | |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | -1/2 | 1 | 1/2 | 5 | |
| 3 | $Y_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | |
| $Z_i = \sum C_i x_i$ | | 3 | 3 | 3/2 | 0 | 3/2 | $W = 21$ | |
| $C_i - W_i$ | | 0 | 0 | -3/2 | 0 | -3/2 | | |
| | | | | $X_1 = 3/2$ | $X_2 = 0$ | $X_3 = 3/2$ | | |

كل قيم الصف $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة. وتكون النتائج كالأتي:

$Y_1 = 4$ ، $Y_2 = 3$ ، $S_2 = 0$ ، $S_2 = 5$ ، $S_1 = 0$ ، قيمة دالة الهدف تكون كما يلي: $W = 21$

متغيرات القرار في النموذج الأصلي تقابل متغيرات الفجوة في النموذج الثنائي، وفي مثالنا نجد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | تقابل | القيمة المطلقة لقيم $S_1$ في السطر الأخير لجدول الحل الأمثل | $X_1 = 3/2$ |
| $X_2$ | تقابل | القيمة المطلقة لقيم $S_2$ في السطر الأخير لجدول الحل الأمثل | $X_2 = 0$ |
| $X_3$ | تقابل | القيمة المطلقة لقيم $S_3$ في السطر الأخير لجدول الحل الأمثل | $X_3 = 3/2$ |

متغيرات الفجوة في النموذج الأصلي تقابل متغيرات القرار في النموذج الثنائي، وعليه

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | تقابل | قيم $Y_1$ في الجدول الحل الأمثل | $S_1 = 4$ |
| $S_2$ | تقابل | قيم $Y_2$ في الجدول الحل الأمثل | $S_2 = 3$ |

وعليه تكون حلول البرنامج الأصلي كالأتي:

$X_1 = 3/2$ ، $X_2 = 0$ ، $X_3 = 3/2$ ، $S_1 = 4$ ، $S_2 = 3$ قيمة دالة الهدف تكون كما يلي: $Z = 21$

## 5. تحليل الحساسية:

إن من افتراضات مشاكل البرمجة الخطية هو التأكد التام من المعلومات المتعلقة بمشكلة الدراسة، لكنه في الواقع قد تطرأ على هذه المعلومات تغيرات مفاجئة كتغير في أسعار المنتجات في السوق أو تغير في سعر المواد الأولية وكذا تغير في أجور العمال وغيرها من المستجدات التي تغير في عناصر البرنامج الخطي وبالتالي تأثر أمثلية الحل، الأمر الذي يتطلب إعادة الحل مرة أخرى، إلا أنه يمكن إجراء تحليل الحساسية عوضاً عن ذلك.

**1.5. مفهوم تحليل الحساسية:** هو دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية.[1]

أما التغيرات التي يمكن أن تطرأ على نموذج البرمجة الخطية هي:

- التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)
- التغيرات في معاملات دالة الهدف
- التغيرات في معاملات المتغيرات في القيود

### 2.5. التغيرات التي تطرأ في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة):

إن التغير في الطرف الأيمن للقيود في جدول الحل الأمثل يؤدي إلى التغير في قيم متغيرات الأساس، والذي يؤدي بدوره إلى التغير في قيمة دالة الهدف، ولمعرفة مقدار التغير الحاصل يمكن الاستعانة بالمثال التالي:

**مثال (5-1):**

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 50X_2$$

$$S/c \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ X_1 + 3X_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

**المطلوب:** إلى أي مدى يمكن أن تأثر التغير في قيم الطرف الأيمن للقيود على الحل الأمثل

[1] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **مرجع سابق**، ص 121.

## الفصل الثاني: مشاكل النقل

أدى ازدياد حجم الشركات وانتشار فروعها محليا ودوليا في مناطق عديدة إلى تحمل تكاليف باهظة لنقل المنتجات من مواقع إنتاجها إلى مواقع تخزينها أو استهلاكها، لكن المبادئ الاقتصادية تقتضي ضرورة ترشيد نفقات النقل وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن خصوصا في ظل المنافسة الشرسة بين الشركات، الأمر الذي عجل بظهور مشاكل النقل، وقد ظهر نموذج النقل كأداة كمية تهتم بتحديد الحجم الأمثل من الوحدات التي يتم نقلها من المصانع إلى المستودعات أو المخازن وبالشكل الذي يجعل تكلفة النقل في حدودها الدنيا.[1]

تعود الجذور التاريخية لمشاكل النقل إلى عام 1941 حيث قدم F.L.Hitchcock دراسة بعنوان توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية، وقام كذلك T.C.Kopmans في عام 1947 بنشر دراسة تحت عنوان الاستثمار الأمثل لنظام النقل.[2]

سنعرض في هذا الفصل صياغة مشكلة النقل والتي تعد حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، سنعرض أيضا طرق إيجاد الحل الأساسي الأول وطرق تحسينه، ثم تمثيل مشكلة النقل بشبكة.

### 1. صياغة مشاكل النقل:

تُعرض مشاكل النقل في حالة التعظيم وحالة التدنئة، لكن هذه الأخيرة أكثر شيوعاً لذا سنبدأ بعرضها أولا، على أن يتم عرض الحالة الثانية لاحقاً.

تتضمن مشكلة النقل عدد من المصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات لمنتج متجانس $a_i$ حيث $i = (1,2,.....,m)$، وكذلك أماكن وصول n كل منها تتطلب عدد من الوحدات من هذا المنتج $b_j$ حيث $j = (1,2,.....,n)$، والأعداد $a_i$ و $b_j$ أعداد صحيحة موجبة، وتعطى التكلفة $c_{ij}$ اللازمة لنقل وحدة واحدة من المصدر i إلى مكان الوصول j على أن يكون الهدف هو إنشاء جدول انتقال أعداد صحيحة موجبة $x_{ij}$ ليواجه كل المتطلبات من المخزون الحالي بتكلفة انتقال كلية أقل ما يمكن، مع افتراض أن العرض الكلي و الطلب الكلي متساويان[3]. ويمكن تلخيص مشاكل النقل في جدول على النحو التالي:

---

[1] جلال إبراهيم العبد، **إستخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2004، ص 181.

[2] أحمد محمد الهزاع الصمادي، **أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل، عمان، الأردن، 2008، ص 131.

[3] ريتشارد برونسون، **مرجع سابق**، ص 104.

| | المصب1 | المصب 2 | ..... | المصب n | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| المصدر1 | $C_{11}$ / $X_{11}$ | $C_{12}$ / $X_{12}$ | ..... | $C_{1n}$ / $X_{1n}$ | $a_1$ |
| المصدر2 | $C_{21}$ / $X_{21}$ | $C_{22}$ / $X_{22}$ | ..... | $C_{2n}$ / $X_{2n}$ | $a_2$ |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| المصدرm | $C_{m1}$ / $X_{m1}$ | $C_{m2}$ / $X_{m2}$ | ..... | $C_{mn}$ / $X_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب | $b_1$ | $b_2$ | ..... | $b_n$ | |

ويمكن كتابة مشاكل النقل في صيغة برمجة خطية كمايلي:

### 1.1. دالة الهدف:

دالة الهدف هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. والتي يمكن كتابتها من الشكل التالي:

$$\min : Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots\ldots + C_{1n}X_{1n} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + \ldots\ldots + C_{2n}X_{2n} + \ldots\ldots + C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + \ldots\ldots + C_{mn}X_{mn}$$

ويمكن كتابتها اختصارا من الشكل التالي:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

### 2.1. القيود:

يوجد في مشاكل النقل قيود العرض وقيود الطلب.

- **قيود العرض:**

$$X_{11} + X_{12} + \ldots\ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + \ldots\ldots + X_{2n} = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + \ldots\ldots + X_{mn} = a_n$$

ويمكن كتابتها مختصرة على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad ,(i=1,2,.....m)$$

- **قيود الطلب:**

$$X_{11} + X_{21} + ..... + X_{m1} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + ..... + X_{m2} = b_2$$
$$.....$$
$$X_{1n} + X_{2n} + .... + X_{mn} = b_n$$

ويمكن كتابتها مختصرة من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad ,(j=1,2,.....n)$$

**3.1. شرط عدم السلبية:** $X_{ij} \geq 0$

من خلال كتابة مشاكل النقل في صيغة برمجة خطية فإنه من الممكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس، لكن يصعب الحل بهذه الطريقة في حالة وجود عدد معتبر من القيود والمتغيرات، لذا نلجأ إلى طرق حل أبسط.

## 2. طرق حل مشاكل النقل:

لغرض حل مشاكل النقل نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن
- اختبار أمثلية الحل ( نتوقف في حالة الحل الأمثل وإلا فإننا نواصل الخطوتين ج، د )
- تحسين الحل إذ لم يكن أمثل
- تكرار الخطوتين ب، ج حتى نحصل على الحل الأمثل.

### 1.2. إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن:

توجد عدة طرق لإيجاد الحل الأساسي الأولي لمشاكل النقل منها:

- طريقة الركن الشمالي الغربي
- طريقة أقل تكلفة
- طريقة فوجل

### 1.1.2. طريقة الركن الشمالي الغربي:

تعتبر طريقة الركن الشمالي الغربي أبسط وأسهل طريقة يمكن من خلالها إيجاد الحل الأساسي الأولي، تبدأ هذه الطريقة بالخلية العليا في أقصى اليسار (الخلية (1،1))، حيث نخصص لها $X_{11}$ والذي يمثل كل الوحدات الممكنة دون الخروج عن القيود، وهذا سيكون طبعا الأصغر من بين $a_1, b_1$ ، بعد ذلك نستمر في التحرك خلية واحدة جهة اليمين إذا تبقى بعض الإمداد (العرض) ، فإن لم يتبقى أي إمداد نتحرك خلية للأسفل ونخصص كل الوحدات الممكنة لهذه الخلية دون الإخلال بقيود العرض والطلب بحث لا يمكن أن تزيد مجموع تخصيصات الصف رقم i عن $a_i$ ، ولا يمكن أن تزيد تخصيصات العمود رقم j عن $b_j$، يمكن للتخصيص أن يكون مساوياً للصفر لكن لا يمكنه أن يكون سالب.

**مثال (1-1):**

شركة جزائرية لها ثلاث وحدات إنتاجية متجانسة الإنتاج، تقوم بتموين ثلاث مناطق في جهات مختلفة، إذ علمت أن كميات عرض كل وحدة إنتاجية وطاقات استقبال كل منطقة، وتكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار مدونة في الجدول أدناه:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 | 3 | 10 | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 | 6 | 0 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 | 8 | 9 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

**المطلوب:** استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي الأول.

**الحل:**

قبل أن نبدأ الحل يتم التأكد من أن كميات العرض مساوية لكميات الطلب، وفي مثالنا نلاحظ تساوي بين كمية العرض وكمية الطلب. وعليه يتم توزيع كميات السلع من الوحدات الإنتاجية إلى المناطق المختلفة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي على النحو التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>18 | 3<br>4 | 10<br>/ | ~~22~~ ~~4~~ 0 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>18 | 0<br>6 | ~~24~~ ~~6~~ 0 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>14 | ~~14~~ 0 |
| الطلب | ~~18~~ 0 | ~~22~~ ~~18~~ 0 | ~~20~~ ~~14~~ 0 | 60/60 |

تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي كمايلي:

$X_{11}=18$ : نقل 18 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة1.

$X_{12}=4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{22}=18$ : نقل 18 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة2.

$X_{23}=6$ : نقل 6 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة3.

$X_{33}=14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة3.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC=(7)(18)+(3)(4)+(6)(18)+(0)(6)+(9)(14)=372DZ$$

### 2.1.2. طريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي لأننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أقل تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية لها وهكذا حتى يتم استفاء كل العرض والطلب. ولمزيد من التوضيح يمكن حل المثال السابق باستخدام طريقة أقل التكاليف على النحو التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 / | 3 22 | 10 / | ~~22~~ 0 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 4 | 6 / | 0 20 | ~~24~~ ~~4~~ 0 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 14 | 8 / | 9 / | ~~14~~ 0 |
| الطلب | ~~18~~ ~~14~~ 0 | ~~22~~ 0 | ~~20~~ 0 | 60/60 |

وعليه تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة أقل التكاليف كمايلي:

$X_{12} = 22$ : نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21} = 4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23} = 20$ : نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC = (3)(22) + (4)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 152DZ$$

**ملاحظة:**

في حالة تساوي تكلفتين تعطى الأولوية إلى الخلية المرفقة بأكبر كمية لكونها تؤدي إلى تكلفة إجمالية أقل.

### 3.1.2. طريقة أقل فوجل:

تعتبر طريقة أهم الطرق الثلاثة حيث تتميز بقدرة الوصول إلى الحل الأمثل بأسرع وقت ممكن، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطرق الأخرى، وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأول بهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل متوازن كالأتي:[1]

- نحسب حاصل الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وعمود من جدول النقل، نسمي حاصل الفرق بأرقام فوجل.
- نحدد الصف أو العمود الذي له أعلى رقم من أرقام فوجل ونخصص أكبر عدد من الوحدات إلى الخلية التي تحتوي على أقل كلفة الصف أو العمود الذي تم اختياره.
- ننقص العرض في الصف والطلب في العمود بنفس عدد الوحدات المخصصة للخلية.
- إذا أصبح العرض في الصف مساويا للصفر نلغي الصف، وإذا أصبح الطلب مساويا للصفر نلغي العمود، أما إذا أصبح الصف والعمود مساويان للصفر فنقوم بإلغاء الصف والعمود معا.
- تستمر الخطوات الأربعة أعلاه ونستمر إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

ولنفهم أكثر هذه الطريقة نأخذ نفس المثال السابق ونقوم باستخدام طريقة فوجل لإيجاد الحل الأساسي الأول، ويتم تطبيق خطوات طريقة فوجل كمايلي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض | فرق1 | فرق2 | فرق3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 / | 3 22 | 10 / | ~~22~~ 0 | 4 | 4 | |
| وحدة إنتاجية2 | 4 4 | 6 / | 0 20 | ~~24~~ ~~4~~ 0 | 4 | 2 | |
| وحدة إنتاجية3 | 5 14 | 8 / | 9 / | ~~14~~ 0 | 3 | 3 | |
| الطلب | ~~18~~ ~~14~~ 0 | ~~22~~ 0 | ~~20~~ 0 | 60/60 | | | |
| فرق1 | 1 | 3 | 9 | | | | |
| فرق2 | 1 | 3 | | | | | |
| فرق3 | 1 | | | | | | |

[1] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **مرجع سابق**، ص148.

- **الفروقات الأولى:**

أعطت الفروقات الأول بين أقل تكلفتين على مستوى الصفوف الأرقام التالية: 3،4،4، أما الفروقات على مستوى الأعمدة فأعطت الأرقام التالية: 1،3،9، وعليه تكون أكبر فرق هو الرقم 9 المقابل للعمود الثالث، لذا نبدأ بتخصيص الوحدات (20 وحدة) في هذا العمود وبالضبط في الخلية ذات تكلفة 0 باعتبارها أقل تكلفة في العمود ذو الفرق الأكبر، ونلاحظ أن هذا العمود قد تشبع لذا فإننا نضع رمز (/) في الخليتين المتبقيتين في هذا العمود كدليل على أنهما لا يقبلان أي تخصيص.

- **الفروقات الثانية:**

نعود من جديد إلى إجراء الفروقات مع تفادي إعادة إيجادها للعمود المشبع، فنجد أن أكبر فرق هو 4 والذي يمثل الصف الأول، فنقوم بتخصيص مقدار 22 وحدة للخلية ذات التكلفة 3 باعتبارها أقل تكلفة في الصف الأول ، فنلاحظ أن الصف الأول والعمود الثاني قد تشبعا في آن واحد.

- **الفروقات الثالثة:**

نلاحظ أنه لم يتبقى في الجدول عدا الخليتين الواقعتين في العمود الأول، لذا نقوم بتخصيص 4 وحدات إلى الخلية ذات أقل تكلفة، ليتبقى في الأخير تخصيص 14 وحدة للخلية المتبقية ذات التكلفة5.

وعليه تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة فوجل كمايلي:

$X_{12} = 22$ : نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21} = 4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23} = 20$ : نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC = (3)(22) + (4)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 152DZ$$

**ملاحظة:**

- في حالة وجود تساوي قيمتين كبيرتين لأرقام فوجل بدل قيمة واحدة كبيرة فإننا نقوم بإشباع الخلية ذات أقل تكلفة و المقابلة لأرقام فوجل الكبيرتين، وفي حالة وجود تكلفتين أقل متساويتين فإننا نختار أحدهما لا على التعيين.
- يكون رقم فوجل مساويا للصفر في حالة وجود تكلفتين أقل متساويتين في نفس الصف أو العمود.

### 2.2. اختبار أمثلية الحل وتحسينه:

لمعرفة أمثلية الحل الأساسي الأول من عدمها، فإنه يمكننا استخدام طريقتين مختلفتين، يتعلق الأمر بطريقة التخطي وطريقة التوزيع المعدل.

#### 1.2.2. طريقة التخطي:

تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأساسي الأول لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة فإذا وجدنا أن ملء خلية معينة غير مشغولة ستؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية التقييم كل الخلايا غير المشغولة إلى أن نتوصل إلى أن ملء أي خلية غير م شغولة لا يؤدي إلى تقليل التكاليف الكلية للنقل.

كما يجب ملاحظة أن مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الأتي:

**عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 أو عدد الخلايا المشغولة = (m+n-1)**

ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

1. يتم رسم مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة يتكون هذا المسار من مجموعة من القطع المستقيمة المتعاقبة الأفقية والعمودية، بحيث يبدأ من الخلية غير المشغولة المراد اختبارها إلى خلية مملوءة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية غير المشغولة نفسها، ويسمح بتجاوز خلايا غير مشغولة أو مملوءة قصد الوصول إلى خلية مملوءة.

2. يبدأ المسار بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة (–) للخلية التي تليها في المسار ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يتكون منها المسار.

3. نحسب الكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة فمعنى ذلك أن ملء الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف.

4. نكرر الخطوات السابقة وفي حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإن كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو معدومة فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون كلفتها غير المباشرة سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية تحسين الحل وتخفيض التكاليف الكلية للنقل، بحيث تعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة غير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

5. يتم إشغال الخلية غير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

6, نكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا غير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

**مثال(1-2):** الجدول التالي يمثل الحل الأساسي الأول للمثال السابق والذي قمنا بإيجاده باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي :

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>18 | 3<br>4 | 10<br>/ | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>18 | 0<br>6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

**المطلوب :** أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التخطي

**الحل:**

**أولا:** يتم التأكد من أن تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

من خلال الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق.

**ثانيا:** يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام مسارات مغلقة. والجداول التالية توضح كيفية رسم المسارات المغلقة للخلايا غير مشغولة:

المسار المغلق للخلية ( 1 , 3 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>18 | 3<br>4 (−) | 10<br>(+) | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>18 (+) | 0<br>(−) 6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 2 , 1 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>18 (−) | 3<br>(+) 4 | 10<br>/ | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>(+) | 6<br>(−) 18 | 0<br>6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 3 , 1 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| [illegible] | 7<br>18 (−) | 3<br>4 (+) | 10<br>/ | [illegible] |
| [illegible] | 4<br>/ | 6<br>18 (−) | 0<br>(+) 6 | [illegible] |
| [illegible] | 5<br>(+) | 8<br>/ | 9<br>((−)) 14 | [illegible] |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 3 , 2 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| [illegible] | 7<br>18 | 3<br>4 | 10<br>/ | [illegible] |
| [illegible] | 4 | 6<br>18 (−) | 0<br>(+) 6 | [illegible] |
| [illegible] | 5<br>/ | 8<br>/ (+) | 9<br>(−) 14 | [illegible] |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

وعليه تكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق | الخلية غير المشغولة ( i , j ) |
|---|---|
| لا تتطلب تحسين $\delta_{13}=10-0+6-3=13$ | ( 1 , 3 ) |
| يمكن تحسينها $\delta_{21}=4-7+3-6=-6$ | ( 2 , 1 ) |
| يمكن تحسينها $\delta_{31}=5-7+3-6+0-9=-14$ | ( 3 , 1 ) |
| يمكن تحسينها $\delta_{32}=8-6+0-9=-7$ | ( 3 , 2 ) |

من خلال التكاليف غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسارات المغلقة يتبين:

- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 3 , 1 ) عبر المسار المغلق سيرفع التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 13 وحدة نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 1 , 2 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 6 وحدات نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 1 , 3 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 14 وحدة نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 2 , 3 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 7 وحدات نقدية.

وعليه سيتم اختيار الخلية ( 1 , 3 ) ليتم تحسين الحل من خلالها كونها تعطينا أكبر تخفيض للتكاليف الكلية لعملية النقل ( باعتبار أنها تحمل أكبر قيمة سالبة للتكلفة غير مباشرة).

**ثالثا:** تتم عملية التحسين بنقل كميات إلى الخلية المراد تحسينها، حيث يكون مقدار الكميات المنقولة مساوياً لأقل كمية في الخلايا السالبة التي يمر بها المسار المغلق.

وفي مثالنا أقل كمية في الخلايا السالبة التي يمر بها المسار المغلق هي 14وحدة، وبالتالي يتم طرح 14 وحدة من الخلايا ذات الإشارة السالبة وإضافتها إلى الخلايا ذات الإشارة الموجبة للمسار المغلق لينتج الجدول التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>4 | 3<br>18 | 10<br>/ | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>4 | 0<br>20 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>14 | 8<br>/ | 9<br>/ | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

لتصبح تكاليف النقل الكلية كالأتي:

$$TC = (7)(4) + (3)(18) + (6)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 176DZ$$

يظهر جليا أن التكاليف الكلية لعملية النقل انخفضت إلى 176 دج بعدما كانت 372 دج

**رابعا:** يتم التأكد مرة أخرى من تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق.

**خامسا:** يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام مسارات مغلقة كما تطرقنا إليه سابقاً وعليه تكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق | الخلية غير المشغولة ( i , j ) |
|---|---|
| $\delta_{13}=10-0+6-3=13$ لا تتطلب تحسين | ( 1 , 3 ) |
| $\delta_{21}=4-7+3-6=-6$ يمكن تحسينها | ( 2 , 1 ) |
| $\delta_{32}=8-3+7-5=7$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 2 ) |
| $\delta_{33}=9-0+6-3+7-5=14$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 3 ) |

وعليه سيتم اختيار الخلية ( 1 , 2 ) ليتم تحسين الحل من خلالها كونها الخلية الوحيدة التي تحمل كلفة غير مباشرة سالبة. أما مقدار الكميات التي يمكن نقلها إلى الخلية ( 1 , 2 ) فهو 4 وحدات لينتج الجدول التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 / | 3 18 | 10 / | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 4 | 6 $\varepsilon$ | 0 20 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 14 | 8 / | 9 / | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

**6.** يتم التأكد مرة أخرى من تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = 4، أما عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه **الشرط غير محقق وتعتبر حالة خاصة في مسائل النقل تدعى حالة التفكك.**

يتم معالجتها بوضع خلية تصورية أو أكثر –حسب الحالة– من الخلايا غير مشغولة على أنها خلايا مشغولة قيمتها $\varepsilon$ بجوار الصفر، لنقوم بإيجاد الحل الأمثل مع عدم الأخذ بعين الاعتبار $\varepsilon$ كونها قيمة مساعدة فقط.

وفي مثالنا سنقوم بوضع $\varepsilon$ في الخلية ( 2 , 2 ).

7. يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام المسارات المغلقة لتكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق | الخلية غير المشغولة ( i , j ) |
|---|---|
| لا تتطلب تحسين $\delta_{11} = 7-3+6-4=6$ | ( 1 , 1 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{13} = 10-0+6-3=13$ | ( 1 , 3 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{32} = 8-6+4-5=1$ | ( 3 , 2 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{33} = 9-0+6-8=7$ | ( 3 , 3 ) |

الملاحظ أن كل قيم الكلف غير المباشرة للخلايا غير المشغولة هي قيم موجبة، لذلك فإن إشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف الكلية لعملية النقل ، وبذلك يكون الحل أمثل والذي يمكن تفصيله على النحو التالي:

$X_{12} = 22$ : يتم نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21} = 4$ : يتم نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23} = 20$ : يتم نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 14$ : يتم نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل تكون:

$$TC = (3)(22) + (4)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 152DZ$$

### 2.2.2. طريقة التوزيع المعدل:

تفترض هذه الطريقة وجود مجهولين $V_j$ ويعبر عن الأعمدة و $U_i$ يعبر عن الصفوف، ثم نتبع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j + U_i = C_{ij}$

حيث: $C_{ij}$ تمثل تكلفة الخلية في الصف i والعمود j. مع افتراض أن $U_1 = 0$

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

- **الخطوة الثالثة:**

إذا كانت كل التكاليف الحدية موجبة أو معدومة فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون تكلفتها الحدية سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية تحسين الحل وتخفيض التكاليف الكلية للنقل، و تعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر تكلفة حدية بقيمة سالبة.

**مثال (1-3)** : ليكن لدينا جدول النقل التالي:

| | مصب1 | مصب2 | مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| منبع1 | 5<br>5 | 1<br>7 | 8<br>/ | 12 |
| منبع2 | 2<br>/ | 4<br>3 | 0<br>11 | 14 |
| منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

**المطلوب** : أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل

**الحل:**

يتم التأكد أولا أن: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

من خلال الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق. يمكن اختبار أمثلية الحل وتحسينه بإتباع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j+U_i=C_{ij}$ مع أخذ $U_1=0$

| | | $V_1=5$ مصب1 | $V_2=1$ مصب2 | $V_3=-3$ مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1=0$ | منبع1 | 5 / 5 | 1 / 7 | 8 / / | 12 |
| $U_2=3$ | منبع2 | 2 / / | 4 / 3 | 0 / 11 | 14 |
| $U_3=-2$ | منبع3 | 3 / 4 | 6 / / | 7 / / | 4 |
| الطلب | | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij}=C_{ij}-V_j-U_i$

| الخلية غير المشغولة ( i , j ) | التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة | |
|---|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=8-(-3)-0=11$ | لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 1 ) | $\delta_{21}=2-5-3=-6$ | يمكن تحسينها |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32}=6-1-(-2)=7$ | لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 3 ) | $\delta_{33}=7-(-3)-(-2)=12$ | لا تتطلب تحسين |

- **الخطوة الثالثة:**

الخلية التي لها تكلفة حدية بقيمة سالبة هي الخلية ( 2 , 1 ) وبالتالي نقوم بتحسينها.

بعد تحسين الخلية ( 1 , 2 ) من خلال نقل كميات إليها عبر المسار المغلق كما في طريقة التخطي حصلنا على الجدول التالي:

| | مصب1 | مصب2 | مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| منبع1 | 5<br>2 | 1<br>10 | 8<br>/ | 12 |
| منبع2 | 2<br>3 | 4<br>/ | 0<br>11 | 14 |
| منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

يتم اختبار فيما كان الحل المتوصل إليه أمثل أم لا. وفي البداية نلاحظ أن:

**عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق.**

- **المرحلة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$

| | | $V_1=5$<br>مصب1 | $V_2=1$<br>مصب2 | $V_3=3$<br>مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1=0$ | منبع1 | 5<br>2 | 1<br>10 | 8<br>/ | 12 |
| $U_2=-3$ | منبع2 | 2<br>3 | 4<br>/ | 0<br>11 | 14 |
| $U_3=-2$ | منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

- **المرحلة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

| الخلية غير المشغولة ( i , j ) | التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة | |
|---|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13} = 8 - 3 - (-3) = 8$ | لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 2 ) | $\delta_{22} = 4 - 1 - (-3) = 6$ | لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32} = 6 - 1 - (-2) = 7$ | لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 3 ) | $\delta_{33} = 7 - 3 - (-2) = 6$ | لا تتطلب تحسين |

- **المرحلة الثالثة:**

نلاحظ من خلال جدول التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة أن كل التكاليف الحدية موجبة، وعليه يكون الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل. وبالتالي تتم عملية النقل على النحو التالي:

$X_{11} = 2$ : يتم نقل 2 وحدات من المنتج في المنبع1 إلى المصب1.

$X_{12} = 10$ : يتم نقل 10 وحدات من المنتج في المتبع1 إلى المصب2.

$X_{21} = 3$ : يتم نقل 3 وحدات من المنتج في المنبع2 إلى المصب1.

$X_{23} = 11$ : يتم نقل 11 وحدات من المنتج في المنبع2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 4$ : يتم نقل 4 وحدات من المنبع3 إلى المصب1.

أما تكلفة النقل الكلية تكون:

$$TC = (5)(2) + (1)(10) + (2)(3) + (0)(11) + (2)(4) = 38DZ$$

**ملاحظة:**

إن استخدامات مسائل النقل لا تقتصر فقط على حالة التدنئة، وإنما تستخدم أيضاً في حالة التعظيم ، ففي بعض الأحيان تكون الشركة متخصصة في النقل لصالح الغير وهنا يكون هدفها تحقيق أكبر ربح ممكن جراء عملية النقل ، لذا فهي تركز على المسارات ذات أكبر كلفة، و في جدول النقل يكون البحث على الخلايا ذات أكبر كلفة لإرسال الكميات لها، وتكون في هذه الحالة دالة الهدف تعظيم وتستبدل تكاليف نقل الوحدة بالربح المحصل عليه جراء نقل الوحدة الواحدة.

أما حل مسائل النقل في حالة التعظيم فهي لا تختلف كثيراً عن حالة التدنئة، إذ يتم إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي أو طريقة أعلى عائد وطريقة فوجل، غير أنه في الطريقة الأخيرة بدلا عن البحث عن أقل كلفة لإيجاد الفرق بينهما فإننا نبحث عن أعلى عائد والذي يليه وإيجاد الفرق بينهما,

وفي حالة اختبار الحل وتحسينه نتبع أيضاً طريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل، غير أنه تعطى الأولوية للخلية الحاصلة على أعلى رقم موجب عوضاً عن السالب، ويكون الحل أمثل عندما تكون جميع القيم الحدية سالبة أو معدومة.

**حالات خاصة في مسائل النقل:**

1. **عدم تساوي العرض مع الطلب:** في الحياة العملية كثيراً ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة واحتياجات السوق لذا لابد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، في هذه الحالة نلجأ إلى إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب، أي إيجاد مصب وهمي تكون تكلفة النقل إليه معدومة، أما في حالة الطلب أكثر من العرض فإننا نقوم بإضافة صف وهمي، وتكون قيمة الوحدات المنقولة في الصف أو العمود الوهمي هي الفرق بين العرض والطلب.
2. **وجود أكثر من حل أمثل:** قد نصادف في حلنا لمسائل النقل وجود حلول مثلى متعددة، ويمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير مشغولة معدومة لخلية واحدة أو أكثر، ويمكن تفسير ذلك إلى أنه يمكننا تغيير اتجاه بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى وتبقى نفس التكلفة الكلية للنقل، وتجدر الإشارة إلى أن وجود حلول مثلى متعددة يعطي للإدارة مرونة أكبر في توزيع المنتجات.

**3. حالة التفسخ (عدم الانتظام):** تظهر هذه الحالة عندما يكون الشرط الأتي غير محقق:

(عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1)، لمعالجة هذه الحالة نقوم بوضع خلية تصورية أو أكثر –حسب الحالة– من الخلايا غير مشغولة على أنها خلايا مشغولة قيمتها $\varepsilon$ بجوار الصفر، ثم نقوم بعدها بإيجاد الحل الأمثل.

**مثال (1–4):**

كلفت شركة نقل للقيام بنقل منتجات ثلاث مصانع إلى أربع مراكز تسويقية، فإذ علمت أن سعر نقل القنطار الواحد من كل مصنع إلى المراكز التسويقية وكذا الطاقة الإنتاجية لكل مصنع وطلب كل مركز تسويقي موضحة في الجدول التالي:

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6 | 8 | 3 | 10 | 500 |
| مصنع2 | 9 | 2 | 7 | 11 | 700 |
| مصنع3 | 12 | 5 | 4 | 10 | 200 |
| الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | |

**المطلوب:** أوجد أفضل عملية نقل تحقق من خلالها شركة النقل أفضل ربح ممكن مستخدما طريقة فوجل لإيجاد الحل الأساسي الأول وطريقة التوزيع المعدل لبلوغ الحل الأمثل.

**الحل:**

من الملاحظ أن جدول النقل غير متوازن لأن كمية العرض لا تساوي كمية الطلب.

كمية العرض = 500+700+200 = 1400

كمية الطلب = 200+400+100+800 =1500

وعليه يتم إضافة صف وهمي على أساس أنه مصنع وهمي بأرباح صفرية، بحيث تكون الكميات المنقولة عبر الصف مساوية للفرق بين العرض والطلب وهو 100 قنطار، ليصبح جدول النقل متوازن من الشكل التالي:

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6 | 8 | 3 | 10 | 500 |
| مصنع2 | 9 | 2 | 7 | 11 | 700 |
| مصنع3 | 12 | 5 | 4 | 10 | 200 |
| مصنع4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/1500 |

**استخدام طريقة فوجل في إيجاد الحل الأساسي الأول**

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض | الفرق1 | الفرق2 | الفرق3 | الفرق4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6<br>/ | 8<br>400 | 3<br>/ | 10<br>100 | ~~500~~<br>~~100~~<br>0 | 2 | 2 | 7 | |
| مصنع2 | 9<br>/ | 2<br>/ | 7<br>/ | 11<br>700 | ~~700~~<br>0 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| مصنع3 | 12<br>200 | 5<br>/ | 4<br>/ | 10<br>/ | ~~200~~<br>0 | 2 | | | |
| مصنع4 | 0<br>/ | 0<br>/ | 0<br>100 | 0<br>/ | ~~100~~<br>0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| الطلب | ~~200~~<br>0 | ~~400~~<br>0 | ~~100~~<br>0 | ~~800~~<br>~~700~~ 0 | | | | | |
| الفرق1 | 3 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| الفرق2 | | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| الفرق3 | | | 4 | 1 | | | | | |
| الفرق4 | | | 7 | 11 | | | | | |

يتم اختبار فيما كان الحل المتوصل إليه أمثل أم لا.

نبدأ بالتحقق من الشرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = 5 أما عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 7 الشرط غير محقق، في هذه الحالة يتم إضافة $\varepsilon_1$ ، $\varepsilon_2$ إلى جدول النقل كما تم التطرق إليه أنفا. ويصبح جدول النقل من الشكل التالي:

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6 | 8<br>400 | 3 | 10<br>100 | 500 |
| مصنع2 | 9 | 2 | 7<br>$\varepsilon_1$ | 11<br>700 | 700 |
| مصنع3 | 12<br>200 | 5 | 4 | 10<br>$\varepsilon_2$ | 200 |
| مصنع4 | 0 | 0 | 0<br>100 | 0 | 100 |
| الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/1500 |

بما أن الشرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1** أصبح محققاً يمكن اختبار أمثلية الحل بطريقة التوزيع المعدل على النحو التالي:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j + U_i = C_{ij}$ مع أخذ $U_1 = 0$

| | | $V_1=12$ | $V_2=8$ | $V_3=6$ | $V_4=10$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
| $U_1=0$ | مصنع1 | 6 | 8<br>400 | 3 | 10<br>100 | 500 |
| $U_2=1$ | مصنع2 | 9 | 2 | 7<br>$\varepsilon_1$ | 11<br>700 | 700 |
| $U_3=0$ | مصنع3 | 12<br>200 | 5 | 4 | 10<br>$\varepsilon_2$ | 200 |
| $U_4=-6$ | مصنع4 | 0 | 0 | 0<br>100 | 0 | 100 |
| | الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/1500 |

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد الأرباح الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij}=C_{ij}-V_j-U_i$

| الخلية غير المشغولة ( i , j ) | الأرباح الحدية للخلايا غير مشغولة |
|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=6-12-0=-6$ لا تتطلب تحسين |
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=3-6-0=-3$ لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 1 ) | $\delta_{21}=9-12-1=-4$ لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 2 ) | $\delta_{22}=2-8-1=-7$ لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32}=5-8-0=-3$ لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 3 ) | $\delta_{33}=4-6-0=-2$ لا تتطلب تحسين |
| ( 4 , 1 ) | $\delta_{41}=0-12-(-6)=-6$ لا تتطلب تحسين |
| ( 4 , 2 ) | $\delta_{42}=0-8-(-6)=-2$ لا تتطلب تحسين |
| ( 4 , 4 ) | $\delta_{44}=0-10-(-6)=-4$ لا تتطلب تحسين |

- **الخطوة الثالثة:**

يبين الجدول أن كل الأرباح الحدية سالبة، وعليه يكون الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل. وبالتالي تتم عملية النقل التي تعظم أرباح الشركة على النحو التالي:

$X_{12} = 400$ : يتم نقل 400 قنطار منتج من المصنع1 إلى المركز التسويقي2.

$X_{14} = 100$ : يتم نقل 100 قنطار منتج من المصنع1 إلى المركز التسويقي4.

$X_{24} = 700$ : يتم نقل 700 قنطار منتج من المصنع2 إلى المركز التسويقي4.

$X_{31} = 200$ : يتم نقل 200 قنطار منتج من المصنع3 إلى المركز التسويقي1.

أما أرباح النقل الكلية تكون:

$$TR = (8)(400) + (10)(100) + (11)(700) + (12)(200) = 14300DZ$$

**3. تمرينات محلولة باستخدام برنامج QM:**

## 4. تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة:

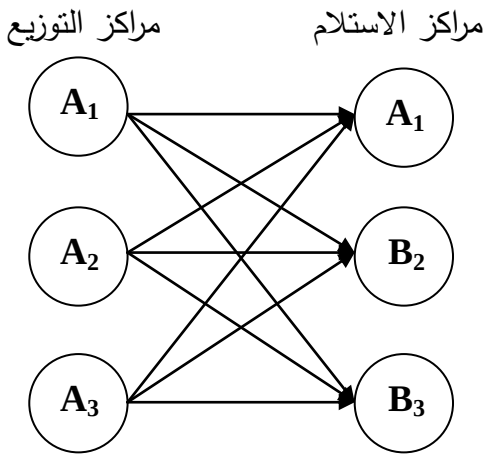
تهتم مسائل النقل بحل الكثير من المسائل العملية على غرار نقل المسافرين و البضائع، لكن أحياناً قد يصعب حل المشكلة بهذه الطريقة نظراً لعدة اعتبارات كامتزاج المصادر وأماكن الوصول (قد تلعب أماكن الوصول دور مصادر والعكس)، في هذه الحالة و لأجل معالجة هذا النوع من المسائل نلجأ إلى استخدام تقنية الشبكات.

من بين تطبيقات نظرية الشبكات يمكن ذكر مسائل البحث عن المسارات المثلى و مسألة التدفق الأعظم عبر الشبكة و مسألة المسافر التجاري.[1]

ويمكن تعريف الشبكة على أنها مجموعة من الخطوط المتصلة عن طريق نقط أو دوائر تسمى بالقمم، يعبر كل خط عن اختيار معين، إذا كانت مجموعة الخطوط أو الأسطر موجهة أي على شكل أسهم فإنها تسمى بالأقواس وتسمى الشبكة في هذه الحالة **بالشبكة الموجهة**، أما إذا كانت مجموعة الخطوط غير موجهة فإن تلك الخطوط تسمى بالأحرف، وتسمى الشبكة في هذه الحالة **بالشبكة غير الموجهة**.

في مسائل النقل يمكن التمييز بين أنواع مختلفة من مسارات النقل التي تربط بين مراكز التوزيع و مراكز الاستلام و ذلك على أساس الاعتبارين التاليين:[2]

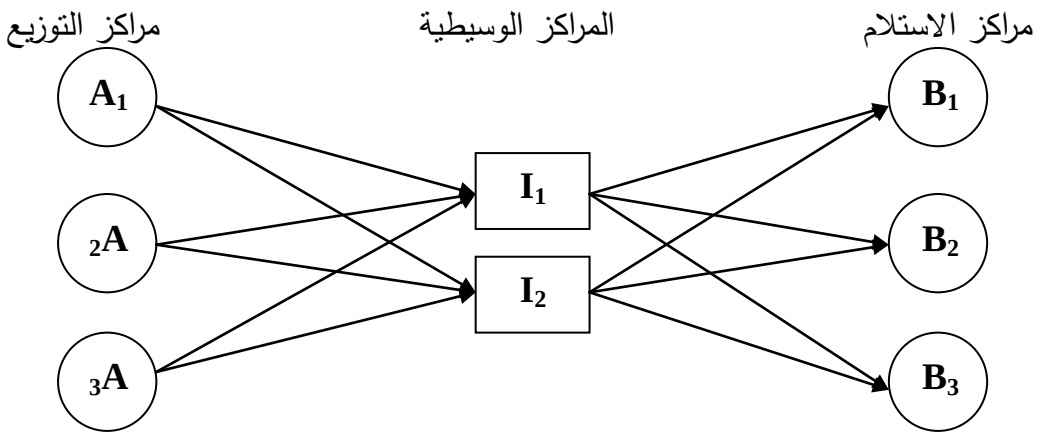
- **الاعتبار الأول: عدد مراحل النقل** فإنه توجد مسارات النقل ذات المرحلة الواحدة، مسارات النقل متعددة المراحل، والشكل التالي يوضح مسارات النقل ذات مرحلة واحدة:




والشكل التالي يوضح مسارات النقل ذات مراحل متعددة:

[1] مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية –نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص–** ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016، ص 143– 145.

[2] فتيحة بلجيلالي، **مطبوعة في مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، ملحقة قصر الشلالة، جامعة ابن خلدون – تيارت–، 2018/2017، ص124.




- **الاعتبار الثاني: توازن كمية العرض مع كمية الطلب،** ما يسمى بالنقل المغلق و النقل المفتوح، ففي حالة النقل المغلق يكون التوازن موجوداً، أما في حالة النقل المفتوح فلا يتحقق التوازن، مما يجعلنا نفكر في إدخال مركز استلام أو مركز توزيع وهمي

تجدر الإشارة أنه توجد عدة طرق تستعمل من أجل استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر، من بينها: طريقة Ford، طريقة G.DANTZIG، طريقة المصفوفات (FLOYD).

## الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود

تناولنا في الفصل الأول البرمجة الخطية ولاحظنا مدى مساهمتها في حل العديد من مسائل بحوث العمليات، لكن موضوع البرمجة الرياضية لا يقتصر فقط على المجال الخطي، والذي يتناول فقط الصياغة الخطية ل لبرنامج إذا أراد التعبير عن المسائل الاقتصادية، لكن في الواقع العملي يمكن مواجهة بعض المشاكل التي تحتم علينا صياغة البرنامج في شكل غير خطي سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو دوال القيود، فالكثير من الاقتصاديين يجدون في اللاخطية قاعدة وليست استثناءا، لذا وجب التعامل مباشرة مع البرمجة اللاخطية كموضوع مستقل بذاته وعدم اعتبارها حالة خاصة من موضوعات البرمجة الخطية.[1]

إن أحد الأشكال العامة لمسائل البرمجة اللاخطية يكون بإيجاد قيم $x = x_1, x_2, ....., x_n$ حيث:

$$Max: f(x)$$

$$s/c \quad \begin{cases} g_i(x) \le b_i & i = 1,2,.....m \\ x \ge 0 \end{cases}$$

حيث $f(x)$ و $g_i(x)$ دوال ب n متغيرات قرار.

ويمكن التمييز بين عدة حالات للبرمجة غير الخطية: أمثلية المتغير المفرد بقيود، أمثلية المتغير المفرد بدون قيود، أمثلية متعددة المتغيرات بدون قيود، أمثلية متعددة المتغيرات ذو قيود.

### 1. أمثلية المتغير المفرد:

البرنامج غير الخطي بدون قيود للمتغير المفرد يأخذ الصيغة التالية:

أمثلية: $Z = f(x)$

حيث $f(x)$ تكون دالة غير خطية في المتغير المفرد x، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تدنئة) في الفترة غير المحدودة $(-\infty, \infty)$.

[1] Frederick S.Hillier and Gerald J.Lieberman, **Introduction to Operations Research**, seventh Edition, Stanford University,2001,p654.

أما إذا كان البحث مقيداً في فترة محددة أقل $[a,b]$ فإن المسألة تصبح:

أمثلية: $Z = f(x)$

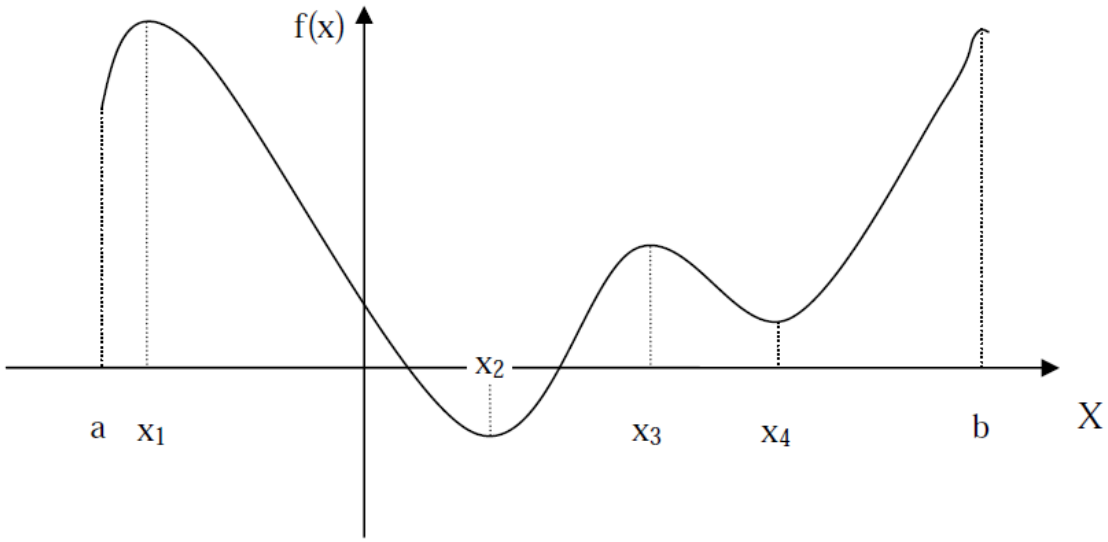
علما أن: $a \le x \le b$

### 1.1. الأمثلية المحلية والشاملة:

بفرض انه لدينا دالة الهدف في شكل كثير حدود بمتغير واحد $f(x)$ المعرفة والمستمرة في المجال $]-\infty,+\infty[$.

نقول أن للدالة f حد أدنى محلي عند $x_0$ إذا وجد مجال محدود ذو المركز $x_0$ بحيث يحقق $f(x) \ge f(x_0)$ لكل قيم $x$ في هذا المجال الذي تحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط $f(x) \ge f(x_0)$ مهما كانت قيم $x$ في المجال الذي تحدد فيه الدالة فإن الحد الأدنى عند $x_0$ يكون جداً أدنى شاملاً.[1]

نفرض أن الدالة f المعرفة والمستمرة على المجال $]-\infty,+\infty[$ تأخذ في المجال المحدود $[a,b]$ الشكل البياني التالي:




[1] بوعراب رابح، **مطبوعة بعنوان: دروس وتمارينات تطبيقية في مقياس البرمجة المعمقة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة الجزائر3، 2017/2016، ص62.

يُظهر الشكل الدالة $f(x)$ في المجال المحدود $[a,b]$، حيث يظهر أن للدالة $f(x)$ حدود دنيا وحدود عليا، ومن المفترض أن أحد أو بعض هذه الحدود مرشحة لتكون حدود شاملة للدالة كونها تمثل القيم المثلى للدالة في هذا المجال.

ونلاحظ أن الدالة f حدود محلية دنيا عند $a, x_2, x_4$ وحدود محلية عليا عند $x_1, x_3, b$، بينما يعتبر الحد الأدنى عند $x_2$ حداً أدنى شاملاً كونه يمثل أدنى قيمة للدالة في المجال المدروس، وتعتبر الحدود العليا عند كل من $x_1, b$ حدود عليا شاملة في نفس المجال كونها تمثل أعلى قيمة يمكن أن تأخذها الدالة في نفس المجال وتعطينا نفس القيمة من أجل $x = b, x = x_1$ .

### 2.1. نظريات مهمة في أمثلية المتغير المفرد:

إن تحديد قيم هذه الحدود يعتمد على تقنيات التفاضل الجزئي للدوال غير الخطية، وتكون عملية تحديد الأمثلية لهذه الدوال يقتصر على الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق في مجال تعريفها بمساعدة مجموعة من نظريات التفاضل، ويمكن ذكر بعضها على النحو التالي:[1]

**نظرية1:** إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في المجال المحدود $[a,b]$، فإن الدالة $f(x)$ يكون لها أمثلية شاملة على هذا المجال.

**نظرية2:** إذا كانت للدالة $f(x)$ أمثلية محلية عند $x_0$، وكانت الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل في المجال ذو المركز $x_0$ فإن $f'(x_0) = 0$ .

**نظرية3:** إذا أمكن تفاضل الدالة $f(x)$ مرتين في المجال ذو المركز $x_0$، وكانت $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$ فإنه يكون ل $f(x)$ حداً أدنى محلي عند $x_0$. أما إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$ فإنه يكون ل $f(x)$ حداً أعلى محلي عند $x_0$ .

[1] ريتشارد برونسون، **مرجع سابق**، ص138.

مثال (1-1):

ليكن لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$\textbf{Max :}\ \ f(x)=\left|x^2-8\right|$$

$$\textbf{S / c}\ \left\{-4\le x\le 4\right.$$

**المطلوب:** تحديد الأمثلية المحلية والشاملة للدالة $f(x)$

**الحل:**

$$f(x)=\left|x^2-8\right|\begin{cases} x^2-8 & x\le-\sqrt{8} \\ 8-x^2 & -\sqrt{8}\le x\le\sqrt{8} \\ x^2-8 & \sqrt{8}\le x \end{cases}$$

$$f'(x)=\left|x^2-8\right|\begin{cases} 2x & x\le-\sqrt{8} \\ -2x & -\sqrt{8}\le x\le\sqrt{8} \\ 2x & \sqrt{8}\le x \end{cases}$$

الدالة $f(x)$ تنعدم عند النقطتين $+\sqrt{8},-\sqrt{8}$ وعليه لا توجد دالة مشتقة من أجل هاتين النقطتين، أما الدالة $f'(x)$ فتنعدم عند النقطة (x=0)، وعليه تكون هناك ثلاث نقط ساكنة للدالة $f(x)$ ، وإذا أضفنا النقطتين المحددتين للمجال $+4,-4$ تكون لدينا خمس نقط ساكنة للدالة $f(x)$ .

ومن أجل تحديد الحدود الدنيا والعليا المحلية نحسب قيم الدالة $f(x)$ عند هذه القيم كمايلي:

| $x$ | $-4$ | $-\sqrt{8}$ | $0$ | $+\sqrt{8}$ | $+4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8 | 0 | 8 | 0 | 8 |

وعليه يكون هناك حد أدنى محلي عند النقطتين $+\sqrt{8},-\sqrt{8}$ ، وحد أعلى محلي عند النقط $+4,0,-4$ ، و بالتالي الحد الأعلى الشامل يقع عند النقط الثلاثة نقط.

## 2. أمثلية المتغيرات المتعددة :

البرنامج غير الخطي بدون قيود للمتغيرات المتعددة يأخذ الصيغة التالية:

أمثلية: $Z = f(x)$ حيث أن: $x = [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]^T$

حيث سنقوم بالبحث عن الأمثلية في حالة التعظيم، أما حالة التدنئة فيمكن استبدال الدالة $f(x)$ لتحل محلها الدالة $-f(x)$

### 1.2. الحدود العظمى المحلية والشاملة:

نقصد بالجوار $(\varepsilon > 0)$ حول $\hat{X}$ هو مجموعة المتجهات $X$ بحيث:

$$\left(X-\hat{X}\right)^T (X-\hat{X}) = \left(X_1-\hat{X}_1\right)^2 + \left(X_2-\hat{X}_2\right)^2 + \ldots.. + \left(X_n-\hat{X}_n\right)^2 \le \varepsilon^2$$

تعبيرا بالهندسة التحليلية يكون الجوار $\varepsilon$ حول $\hat{X}$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها $\varepsilon$ ومركزها $\hat{X}$ .

ويكون لدالة الهدف $f(x)$ حد أعلى محلي عند $\hat{X}$ إذ وجد جوار $\varepsilon$ حول $\hat{X}$ بحيث أن $f(x) \le f(\hat{x})$ لكل قيم $X$ في هذا الجوار $\varepsilon$ الذي تحدد فيه الدالة، وإذ تحقق الشرط لكل قيمة موجبة $\varepsilon$ فإن $f(x)$ لها حد أعلى محلي عند $\hat{X}$ .

### 2.2. المتجه المتدرج ومصفوفة هيسي:

المتجه المتدرج $\nabla f$ المرتبط بالدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ الذي تعرف له المشتقة الجزئية الأولى كمايلي:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

والتعبير $\nabla f|_{\hat{x}}$ يحقق قيمة التدرج عند $\hat{X}$ لأي إزاحة صغيرة من $\hat{X}$ في الاتجاهات المختلفة، والاتجاه الأعلى زيادة في $f(x)$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|_{\hat{x}}$ .

إن البحث عن الأمثلية لدالة الهدف متعددة المتغيرات بدون قيود يتم وفق النظريات التالية:

**نظرية1:** إذا كانت $f(x)$ مستمرة في مجال محدود فأنه يكون لها حد أعلى شامل أو حد أدنى شامل في هذا المجال.

**نظرية2:** إذا كانت للدالة $f(x)$ حد أعلى محلي أو حد أدنى محلي عند $X^*$ وإذا كانت $\nabla f$ موجودا في جوار $\varepsilon$ حول $X^*$ فإن: $\nabla f \big|_{X^*} = 0$

**نظرية3:** إذا كانت للدالة $f(x)$ لها مشتقة جزئية ثابتة في جوار $\varepsilon$ حول $X^*$ وكانت $\nabla f \big|_{X^*} = 0$ و $Hf \big|_{X^*}$ سالبة محددة فأن الدالة $f(x)$ يكون لها حد أعلى محلي عند $X^*$ .

وعليه إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق لعدة مرات في مجال محدد فأن لهذه الدالة حد أعلى محلي في هذا المجال عند $X^*$ بحيث يتحقق $\nabla f \big|_{X^*} = 0$ ويكون هذا الحد أعلى إذا كانت المصفوفة الهيسية للدالة $f(x)$ من أجل $X = X^*$ محددة موجبة أو شبه محددة موجبة.

**قائمة المراجع:**


01- أحمد محمد الهزاع الصمادي، **أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل، عمان ، الأردن، 2008.

02- السعدي رجال، **بحوث العمليات في الإدارة-المالية-التجارة**، منشورات جامعة منتوري، قسنطينة، 2004-2005.

03- جلال إبراهيم العبد، **إستخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2004.

04- حسين محمود الجنابي، **الأحدث في بحوث العمليات**، دار الحامد، عمان، الأردن، 2010.

05- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، دار اليازوري، الطبعة العربية، عمان، الأردن، 2008.

06- بوعراب رابح، **مطبوعة بعنوان: دروس وتمارينات تطبيقية في مقياس البرمجة المعمقة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة الجزائر3، 2017/2016.

07- ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، سلسلة ملخصات شوم، ترجمة حسن حسني الغبارى ومحمد إبراهيم يونس الدار الدولية، القاهرة، مصر، 2003.

08- مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية -نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص-**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.

09- فتيحة بلجيلالي، **مطبوعة في مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، ملحقة قصر الشلالة، جامعة ابن خلدون -تيارت-، 2018/2017.

10- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2011.

11- منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات : مدخل علمي لاتخاذ القرارات**، دار وائل، الطبعة الأولى، عمان، الأردن 2009.

12- Frederick S.Hillier and Gerald J.Lieberman, **Introduction to Operations Research**, seventh Edition, Stanford University,2001.