

CALCUL DES POUTRES (CONTINUES) POUR PLANCHERS :

Pour le calcul des poutres et poutrelles des planchers plusieurs méthodes de calcul peuvent être utilisées en tenant compte des conditions d'application des charges et des contraintes de réalisation. Nous préconisons pour ce genre de calcul en plus de la méthode des trois moments (R.D.M), deux méthodes spécifiques aux structures B-A à savoir la méthode forfaitaire (voir ses conditions d'application) et la méthode Caquot. Sachez que plusieurs logiciels de calcul aux éléments finis peuvent être utilisés.

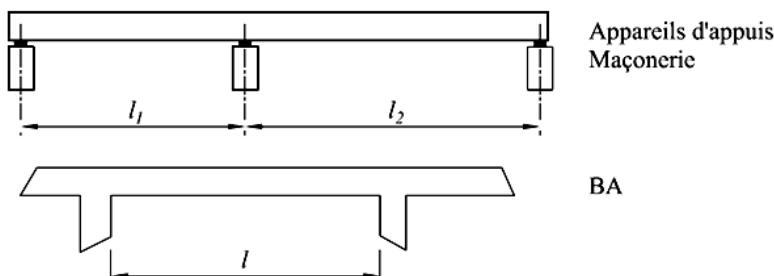
1. PORTÉES À PRENDRE EN COMPTE DANS LES CALCULS :

- ✓ La portée à prendre en compte dans les calculs est mesurée :
 - Entre points d'application des résultantes des réactions d'appui dans le cas de poutres munies d'appareils d'appui ou reposant sur des massifs ou des murs en maçonnerie ;
 - Entre les nus des appuis dans les autres cas et en particulier celui, très fréquent, où les éléments de plancher reposent sur des appuis en béton (poutres, poteaux ou voiles).
- ✓ Pour ces derniers cas, les sections d'appui dont on doit justifier la résistance aux moments d'encastrement sont celles des nus intérieurs des appuis. Les effets des réactions sur les appuis ou sur les nœuds qui doivent équilibrer les moments correspondants sont à considérer.
- ✓ Pour les poutres reposant sur un massif ou un mur en maçonnerie on peut prendre :

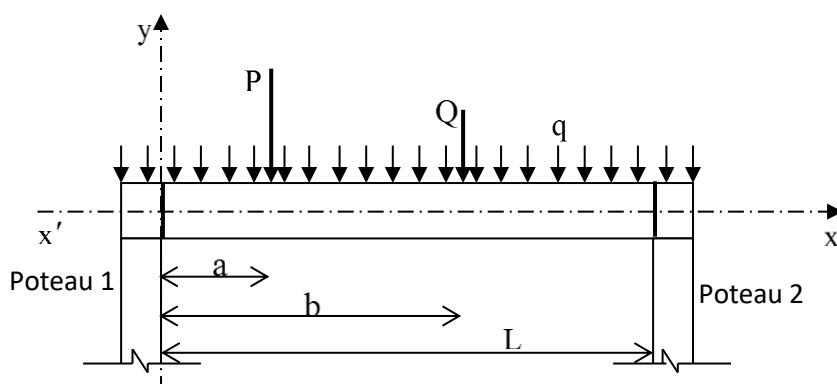
$$l = L + 2 \frac{b}{3} \quad L = \text{distance entre nus d'appuis} ; b = 2R/b_0. \sigma_b$$

R étant la résultante des réactions d'appui ; σ_b = contrainte admissible sur la maçonnerie ;

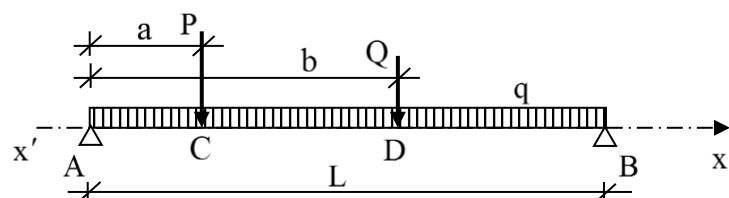
$b_0 = \text{Min} (b_0', b_0'')$ les largeurs de la poutre et de l'appui



Considérons la poutre chargée sur appuis simples suivante.



Ce cas de charge sera schématisé de manière conventionnelle sous la forme de la figure suivante.

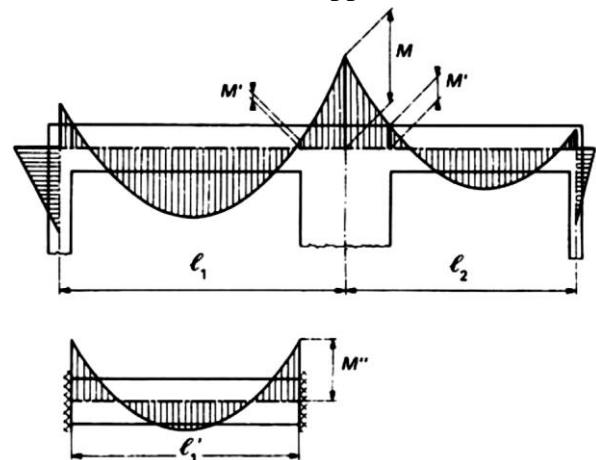


2. SECTIONS D'ENCASTREMENT DES POUTRES À VÉRIFIER :

Dans le cas où le schéma de calcul des sollicitations fait nécessairement intervenir les portées entre axes des appuis (calcul en portique par exemple) et où les appuis ont une grande rigidité, le moment M' au nu intérieur d'un appui peut être notablement inférieur au moment M obtenu dans l'axe de l'appui. Donc pour la travée concernée, la justification d'état-limite ultime de la section d'appui est alors à effectuer sous le moment M_u défini par :

$$M_u = \text{Max} [M'; \text{Min}(M'', M)]$$

Avec M'' moment d'enca斯特 de la travée supposée parfaitement encastrée dans les sections des nus des appuis.



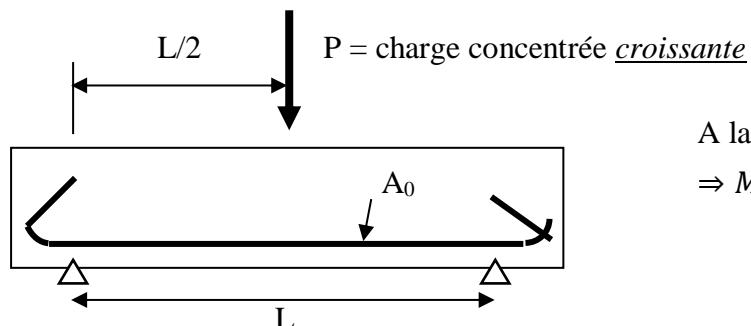
Avant la présentation des méthodes de calcul adoptées pour le calcul des poutres de plancher, étudions le phénomène d'adaptation des poutres en béton armé. Ce phénomène bien compris facilitera la compréhension des différentes méthodes de calcul adaptées pour les poutres de B-A.

3. PHÉNOMÈNES PROPRES AUX POUTRES EN BÉTON ARMÉ :

3.1 PHÉNOMÈNE D'ADAPTATION

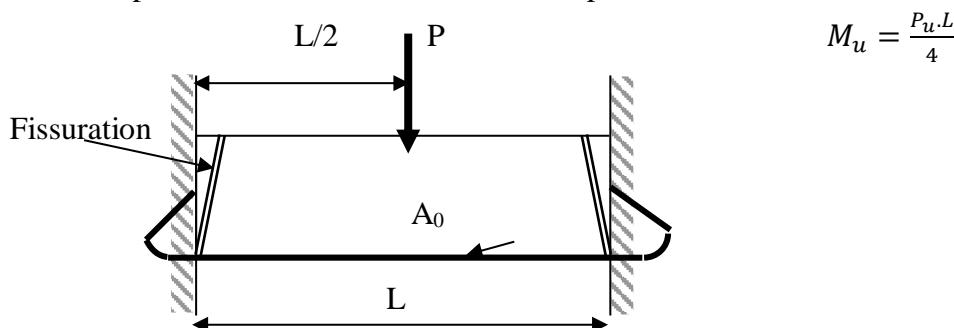
Essais de poutres en béton armé :

- Soit la poutre de la figure suivante :

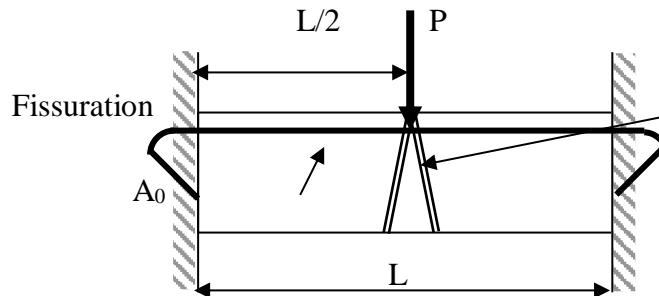


$$\begin{aligned} &\text{A la rupture } P = P_u \\ &\Rightarrow M_u = \frac{P_u \cdot L}{4} \end{aligned}$$

- Pour la même poutre mais cette fois encastrée : Après fissuration (béton tendu), on retrouve une poutre sur deux appuis simples (formation de rotules aux encastrements). La charge de rupture P_u conduit à un moment de rupture :

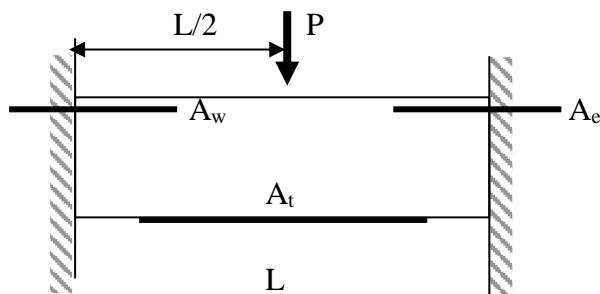


- Pour la même poutre encastrée, munie cette fois-ci de la même section d'armatures supérieures A_0 , après fissuration, on obtient deux consoles et la charge de rupture P_u conduit à un moment de rupture : $M_u = \frac{P_u}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{P_u \cdot L}{4}$



Par conséquent, la charge de rupture qui est identique pour les trois poutres ci-dessus, ne dépend que de la section d'acières A_0 correspondant au fonctionnement isostatique et ce indépendamment de la position des aciers.

D'une manière plus générale, on est assuré d'avoir une marge permettant un transfert partiel de moment des appuis vers la travée, ou réciproquement, sans que ce transfert compromette la sécurité vis-à-vis de la rupture en adoptant :



Avec : $A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0$ si on multiplie cette inégalité par $z_b \cdot \sigma_s$, on obtient :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq M_0$$

CONCLUSION :

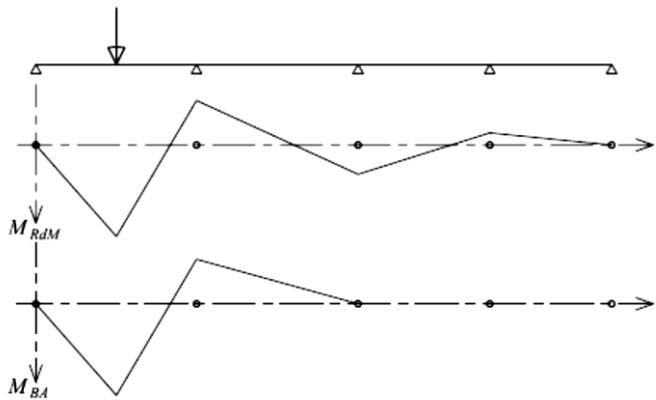
Une poutre en béton armé se comporte comme elle a été calculée. La fissuration des sections les moins armées permet une distribution des moments qui diffère de la distribution théorique. C'est le phénomène d'adaptation entre sections.

3.2 PHÉNOMÈNE D'AMORTISSEMENT

Sous charge de longue durée, ce qui est généralement le cas pour des ouvrages de Génie Civil au moins pour les charges permanentes, le béton armé est un matériau qui flue. C'est à dire qu'il continue à se déformer au cours du temps même si la charge reste constante. Cette déformation de fluage est loin d'être négligeable pour le béton armé puisqu'elle peut représenter jusqu'à trois fois la déformation instantanée, pour une charge constante et un temps infini.

Pour les poutres continues, le fluage entraîne que l'amortissement est beaucoup plus rapide que pour une poutre élastique. Par conséquent, on supposera que le moment sur un appui ne dépend

que des charges supportées par les deux travées adjacentes de l'appui considéré, comme il est indiqué sur la figure.



Comparaison du moment fléchissant obtenu dans une poutre continue par application d'une force ponctuelle sur la travée de rive, dans le cas de la théorie de la RDM et dans le cas du béton armé.

Il est possible d'appliquer aux poutres de planchers en béton armé des méthodes de calcul différentes des méthodes de continuité théoriques (par exemple la méthode des trois moments pour les poutres continues) et de limiter l'influence des charges aux travées voisines de celle que l'on étudie.

En ce qui concerne la fissuration, sous l'action des charges variables, les éléments calculés par les méthodes classiques (RDM) se comportent mieux et ont une meilleure tenue dans le temps que les éléments calculés par les méthodes empiriques. Ceci est d'autant plus vrai que si les surcharges sont supérieures aux charges permanentes.

Pour les éléments de planchers dont la fissuration n'est pas préjudiciable, on peut utiliser les deux méthodes simplifiées de calcul des poutres continues de planchers :

- ✓ La méthode forfaitaire pour les éléments supportant des charges d'exploitation modérées,
- ✓ La méthode de Caquot pour les éléments supportant des charges d'exploitation élevées.

4. MÉTHODE DES TROIS MOMENTS (rappel) :

C'est une méthode classique qui applique les principes de la R-D-M.

Cette méthode est critiquée pour plusieurs raisons : (nous citerons les deux plus importantes)

- 1) Contrairement à ses suppositions, la section résistante B-A n'est pas homogène ni constante ;
- 2) L'expérience montre qu'on obtient des moments trop forts sur appuis et trop faibles en travée.

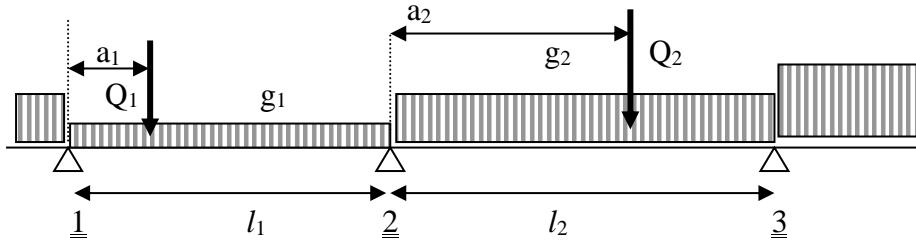
Soit la poutre continue (voir figure suivante) ; appliquons la méthode des trois moments pour enlever l'hyperstaticité en considérant les appuis successifs 1, 2 et 3, et ce en déterminant les moments de continuité M_1 ; M_2 et M_3 .

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{6EI_1} \cdot M_1 + \left[\frac{l_1}{3EI_1} + \frac{l_2}{3EI_2} \right] \cdot M_2 + \frac{l_2}{6EI_2} \cdot M_3 \\ = -\frac{g_1 \cdot l_1^3}{24EI_1} - \frac{g_2 \cdot l_2^3}{24EI_2} - \frac{\sum Q_{1i} a_{1i} (l_1^2 - a_{1i}^2)}{6EI_1 l_1} - \frac{\sum Q_{2i} a_{2i} (l_2^2 - a_{2i}^2)}{6EI_2 l_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l'_w}{6EI_w} \cdot M_{i-1} + \left[\frac{l'_w}{3EI_w} + \frac{l'_e}{3EI_e} \right] \cdot M_i + \frac{l'_e}{6EI_e} \cdot M_{i+1} \\ = -\frac{p_w \cdot l'_w^3}{24EI_w} - \frac{p_e \cdot l'_e^3}{24EI_e} - \frac{\Sigma Q_{1i} a_{1i} (l_1^2 - a_{1i}^2)}{6EI_1 l_1} - \frac{\Sigma Q_{2i} a_{2i} (l_2^2 - a_{2i}^2)}{6EI_2 l_2} \end{aligned}$$

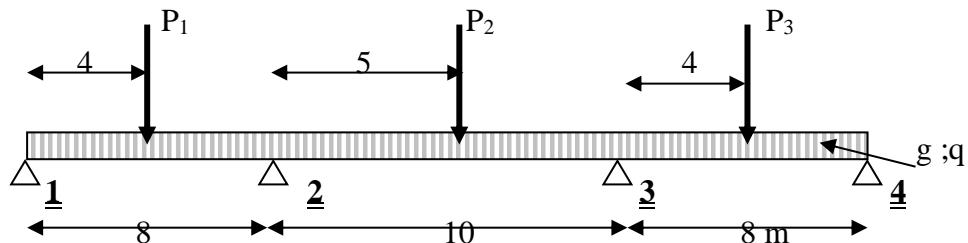
On a pour une poutre dont $EI = \text{constante}$:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{-g_1 l_1^3}{4} - \frac{-g_2 l_2^3}{4} - \frac{\Sigma Q_{1i} a_{1i} (l_1^2 - a_{1i}^2)}{l_1} - \frac{\Sigma Q_{2i} a_{2i} (l_2^2 - a_{2i}^2)}{l_2}$$



Exemple : Charge permanente : $g = 20 \text{ KN/m}$;

Surcharge : $q = 40 \text{ KN/m}$; $P_1 = P_2 = P_3 = 50 \text{ KN}$



À l'ELU:

Charge répartie : $1.35 \times 20 + 1.50 \times 40 = 87 \text{ KN/m}$

Charge concentrée : $1.50 \times 50 = 75 \text{ KN}$

On a : $M_1 = M_4 = 0$ et $M_2 = M_3$ (par symétrie).

Et l'équation des trois moments pour les appuis 2 et 3 :

$$\begin{aligned} 2M_2(8 + 10) + 10M_3 &= -\frac{87 \times 8^3}{4} - \frac{87 \times 10^3}{4} - 75 \times 4 \left(\frac{8^2 - 4^2}{8} \right) - 75 \times 5 \left(\frac{10^2 - 5^2}{10} \right) \\ \Rightarrow 46M_{2(3)} &= -36149 \Rightarrow M_2 = M_3 = -786 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

Il devient alors, facile de déterminer les moments en travées de la poutre.

5. MÉTHODES PROPRES AU BÉTON ARMÉ

5.1 DOMAINES D'APPLICATION

Pour les éléments de planchers dont la fissuration n'est pas préjudiciable, on peut utiliser les deux méthodes simplifiées de calcul des poutres continues de planchers :

- 1) La méthode *orfaitaire* pour les éléments supportant des charges d'exploitation modérées ;
- 2) La méthode *Caquot* pour les éléments supportant des charges d'exploitation élevées.

Remarque : Ces méthodes s'appliquent uniquement aux poutres supportant une dalle faisant office de table de compression. Pour le calcul d'une poutre de chemin de roulement par exemple, on utilisera la théorie classique de la résistance des matériaux pour calculer les moments sur appuis.

5.2 MÉTHODE FORFAITAIRE :

O ***DOMAINE ET CONDITIONS D'APPLICATIONS :***

La méthode forfaitaire est applicable pour le calcul des poutres de planchers à surcharges modérées (constructions courantes) aussi bien pour les vérifications aux états-limites ultimes qu'aux états-limites de service. Elle peut être utilisée sous réserve de remplir toutes les conditions suivantes :

- ✓ Admission des petites fissures au niveau des appuis (la fissuration est non préjudiciable) ;
- ✓ L'absence de charges rapidement variables dans le temps et de position ;
- ✓ La surcharge d'exploitation est modérée c'est-à-dire inférieure à deux fois la charge permanente et $5 \text{ kN/m}^2 q \leq M_{ax}\{2g; 5\text{kN/m}^2\}$;
- ✓ Les éléments de poutres ont une section constante (même inertie) ;
- ✓ Les rapports d'une sur les portées voisines est compris entre 0.8 et 1.25 :

$$0.80 \leq \left(\frac{l_i}{l_{i-1}} ; \frac{l_i}{l_{i+1}} \right) \leq 1.25$$

O ***PRINCIPE DE LA MÉTHODE :***

La méthode consiste à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et des moments sur appuis en des fractions fixées forfaitairement de la valeur maximale du moment fléchissant M_0 dans la travée dite de comparaison ; c'est-à-dire dans la travée isostatique indépendante de même portée et soumise aux mêmes charges que la travée considérée.

Application de la méthode :

Soit :

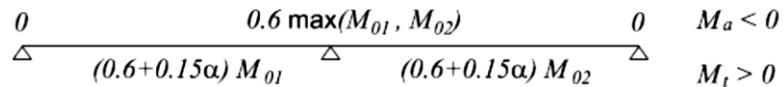
- α le rapport : $\frac{q}{q+g} = \text{rapport des charges d'exploitation à la somme des charges non pondérées} ;$
- M_0 la valeur maximale du moment fléchissant dans la travée de comparaison (travée isostatique indépendante, soumise aux mêmes charges et de même portée que la travée étudiée) ;
- M_w et M_e les valeurs absolues des moments sur appuis de gauche et de droite dans la travée considérée ;
- M_t le moment maximal en travée dans la travée considérée.

Les valeurs des moments M_t , M_e et M_w doivent vérifier les conditions suivantes :

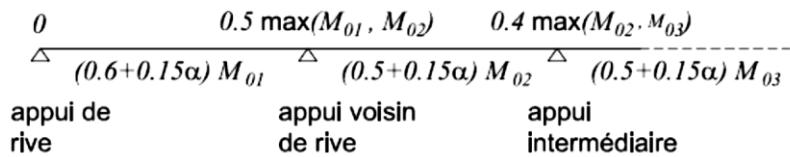
- ✓ $M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq M_{ax}\{1.05M_0; (1 + 0.3\alpha)M_0\}$
- ✓ $M_t \geq (1 + 0.3\alpha) \frac{M_0}{2}$ Dans une travée intermédiaire ;
- $M_t \geq (1.2 + 0.3\alpha) \frac{M_0}{2}$ Dans une travée de rive.
- ✓ La valeur absolue de M_w et M_e sur appui intermédiaire n'est pas inférieure à :
 - **0.60 M₀** dans le cas d'une poutre à deux travées ;
 - **0.50 M₀** dans le cas des appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées ;
 - **0.40 M₀** dans le cas des autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées.

Donc on a :

Deux travées



Plus de deux travées



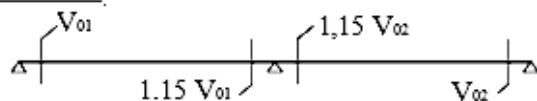
Remarque : lorsque, sur l'appui de rive, la poutre est solidaire d'un poteau ou d'une poutre, il convient de disposer sur cet appui des aciers supérieurs pour équilibrer $M_a = 0,15M_0$.

Dans la pratique

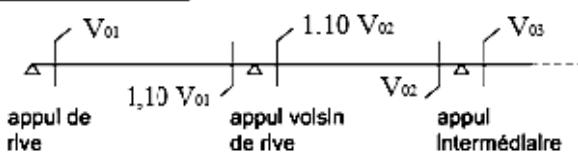
- Pour chaque appui on retient la plus grande des valeurs des moments évaluées à gauche et à droite.
- Pour le calcul de M_t on prend la valeur minimale des moments sur appui M_w et M_e (en valeur absolue), puis on calcule par la formule des moments.

EFFORT TRANCHANT : Pour déterminer la valeur de l'effort tranchant aux appuis, ce dernier est calculé en faisant abstraction de la continuité, sauf pour les appuis voisins des appuis de rive. En notant V_{0i} la valeur absolue de l'effort tranchant sur les appuis de la travée isostatique de référence i, les valeurs de l'effort tranchant aux appuis sont déterminées de façon forfaitaire.

Deux travées



Plus de deux travées



Valeur forfaitaire de l'effort tranchant dans des poutres continues à deux travées et plus.

5.3 MÉTHODE DE CAQUOT :

PRINCIPE ET DOMAINE D'APPLICATION :

Si la précédente méthode (forfaitaire) n'est pas applicable, cas des poutres de planchers des constructions industrielles pour lesquelles la charge d'exploitation serait supérieure à deux fois la charge permanente ou à 5kN/m^2 et si ces charges sont susceptibles de variations rapides dans le temps et en position et que les poutres à étudier sont associées à une dalle générale (sections en T), on aura recours à la méthode de continuité simplifiée due à Albert Caquot, qui apporte à la méthode de continuité théorique (méthode des trois moments) des corrections sanctionnées par des expériences.

Ces corrections tiennent compte :

- De la variation du moment d'inertie des sections transversales le long de la ligne moyenne de la poutre par suite de la variation de la largeur efficace de la dalle supérieure, qui a pour effet de réduire les moments sur appuis et d'accroître les moments en travée (par rapport aux moments évalués par la R-D-M).
- Du fait qu'après avoir reconnu expérimentalement que pour les constructions monolithiques en B-A sur un appui déterminé, l'action des charges éloignées est pratiquement nulle. Caquot a estimé qu'il était suffisant et correct de considérer pour calculer le moment sur appui, l'effet des charges appliquées à droite et à gauche de l'appui considéré en fixant la position des foyers à gauche et à droite de l'appui considéré à l' .

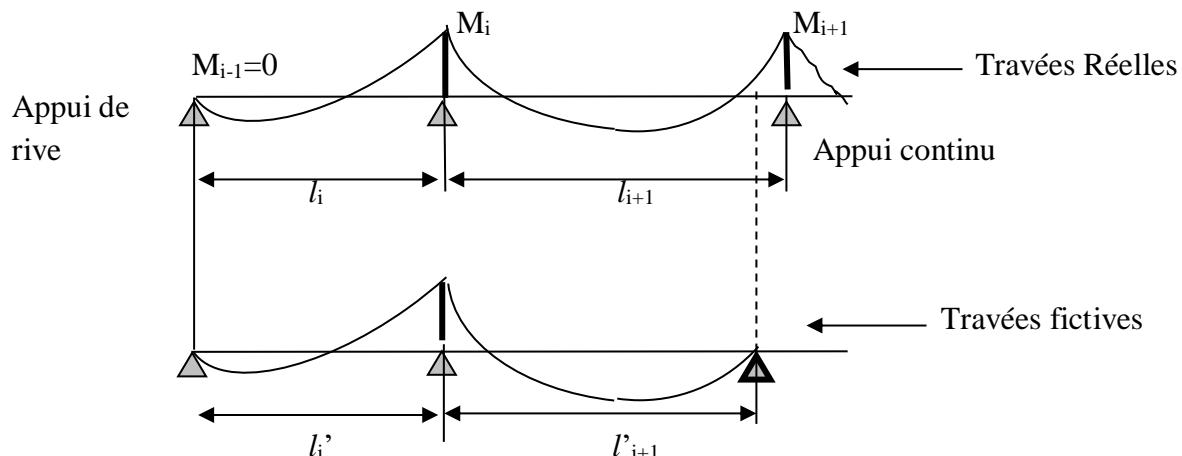
ÉVALUATION DES MOMENTS :

Principe de la méthode :

On adopte les longueurs de portées fictives l' , telles que :

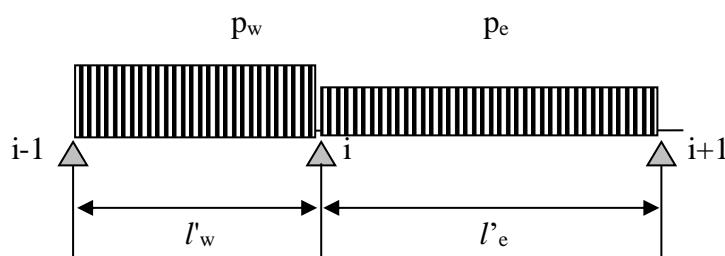
$$l'_i = l_i \text{ pour les deux travées de rive,}$$

$$l'_{i+1} = 0.8 l_{i+1} \text{ pour les travées intermédiaires.}$$



➤ Cas des charges réparties :

Considérons les deux travées fictives de portées l'_w (pour celle de gauche) et l'_e (pour celle de droite) détachées de part et d'autre de l'appui considéré (i) qui appartient à une poutre continue. Les moments aux nus des appuis considérés comme sections à vérifier sont calculés en ne tenant compte que des charges des travées voisines.



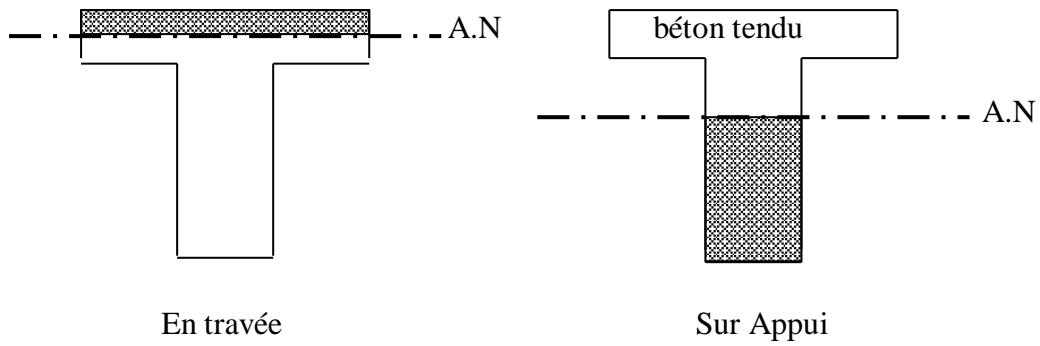
Le théorème des trois moments appliqué à l'appui intermédiaire donne :

$$\frac{l'_w}{6EI_w} \cdot M_{i-1} + \left[\frac{l'_w}{3EI_w} + \frac{l'_e}{3EI_e} \right] \cdot M_i + \frac{l'_e}{6EI_e} \cdot M_{i+1} = -\frac{p_w \cdot l'_w^3}{24EI_w} - \frac{p_e \cdot l'_e^3}{24EI_e}$$

E est considéré constant et $M_{i-1} = M_{i+1} = 0$.

$$\text{D'où : } M_i = -\frac{p_w \cdot l_w'^2}{8} \cdot \frac{l_w'/I_w}{l_w'/I_w + l_e'/I_e} - \frac{p_e \cdot l_e'^2}{8} \cdot \frac{l_e'/I_e}{l_w'/I_w + l_e'/I_e}$$

Et puisque l'inertie de la poutre varie le long des travées, Caquot propose de prendre le coefficient 8.5 au lieu de 8 dans l'expression des moments de référence M' .



Et en posant :

$$M'_w = \frac{p_w \cdot l_w'^2}{8.5} \quad K_w = \frac{l_w'}{l_w'} \\ M'_e = \frac{p_e \cdot l_e'^2}{8.5} \quad K_e = \frac{l_e'}{l_e'} \\ D = K_w + K_e$$

$I_{e,w}$ = moments d'inertie de la section de béton seul.

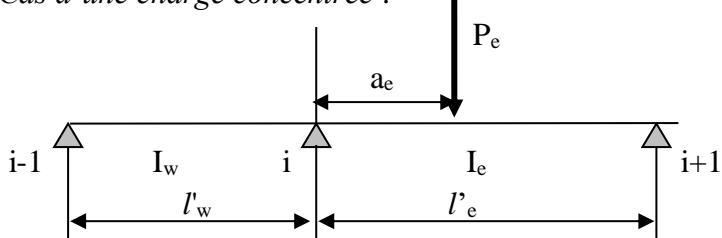
On peut écrire :

$$M_i = - \left[M'_w \frac{K_e}{D} + M'_e \left(1 - \frac{K_e}{D} \right) \right]$$

Si $I = \text{constante}$, on aura à l'appui :

$$M_i = - \frac{p_w l_w'^3 + p_e l_e'^3}{8.5(l_w' + l_e')}$$

➤ Cas d'une charge concentrée :



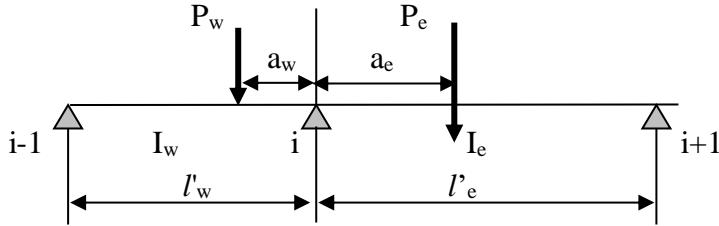
Le théorème des trois moments appliqué à l'appui (i) donne:

$$M_i = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_e}{l_e'} \cdot \left(1 - \frac{a_e}{l_e'} \right) \left(2 - \frac{a_e}{l_e'} \right) \cdot \frac{P_e \cdot l_e' \cdot l_e'/I_e}{l_w'/I_w + l_e'/I_e}$$

Si $I = \text{constante}$:

$$M_i = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_e}{l'_e} \cdot \left(1 - \frac{a_e}{l'_w}\right) \left(2 - \frac{a_e}{l'_e}\right) \cdot \frac{P_e \cdot l'^2_e}{l'_w + l'_e}$$

Dans le cas général de charges concentrées dans les deux travées encadrant l'appui considéré :



$$\text{En posant : } k_w = \frac{1}{2.125} \frac{a_w}{l'_w} \left(1 - \frac{a_w}{l'_w}\right) \left(2 - \frac{a_w}{l'_w}\right) \dots ; \dots k_e = \frac{1}{2.125} \frac{a_e}{l'_e} \left(1 - \frac{a_e}{l'_e}\right) \left(2 - \frac{a_e}{l'_e}\right)$$

$$M'_w = \sum k_w P_w l'_w \dots \text{et...} M'_e = \sum k_e P_e l'_e$$

$$K_w = \frac{l_w}{l'_w} \dots ; \dots K_e = \frac{l_e}{l'_e} \dots \text{et...} D = K_w + K_e \quad \mathbf{M}_i = - \left[\mathbf{M}'_w \frac{K_e}{D} + \mathbf{M}'_e \left(1 - \frac{K_e}{D}\right) \right]$$

Le coefficient 2.125 au lieu de 2 dans l'expression des coefficients k_w et k_e traduit l'effet de variation des inerties des sections de béton fissuré le long des travées.

Cas particulier où $I = \text{constante}$ (section non fissurée).

$$\mathbf{M}_i = \frac{\sum k_w P_w l'^2_w + \sum k_e P_e l'^2_e}{l'_w + l'_e}$$

Lorsque des charges réparties agissent simultanément avec des charges concentrées, on superpose les résultats précédents.

Pour les calculs des moments en travée M_t on fait les hypothèses suivantes :

- On utilise la longueur des portées réelles (et non plus l') ;
- On ne considère que les deux travées adjacentes et les cas de charges.

L'évolution du moment en travée $M(x)$ pour un cas de charge, est donné par :

$$M(x) = \mu(x) + M_w \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_e \frac{x}{l}$$

Où $\mu(x)$ est le moment dans la travée isostatique de référence correspondant au cas de charge considéré, avec :

La position du moment maximum en travée est obtenue en recherchant l'abscisse où la dérivée de $M(x)$ s'annule, soit dans le cas d'un chargement **symétrique** sur la travée :

$$x_{Mtmax} = \frac{l}{2} - \frac{M_w - M_e}{pl}$$

L'effort tranchant, pour un cas de charge donné est calculé classiquement soit :

Sur l'appui i , les valeurs à gauche et à droite de l'effort tranchant :

$$V_{wi} = V_{ow} - \frac{M_{ai} - M_{ai-1}}{l_{i-1}} \quad V_{ei} = V_{oe} - \frac{M_{ai+1} - M_{ai}}{l_i}$$

Où

- V_{ow} et V_{oe} sont les efforts tranchants à gauche et à droite de l'appui i des travées isostatiques de référence $i-1$ et i , respectivement ;
- M_{ai-1} , M_{ai} , M_{ai+1} sont les moments sur les appuis $i-1$, i et $i+1$ respectivement ;
- l_{i-1} et l_i sont les portées des travées $i-1$ et i , à droite des appuis $i-1$ et i respectivement.

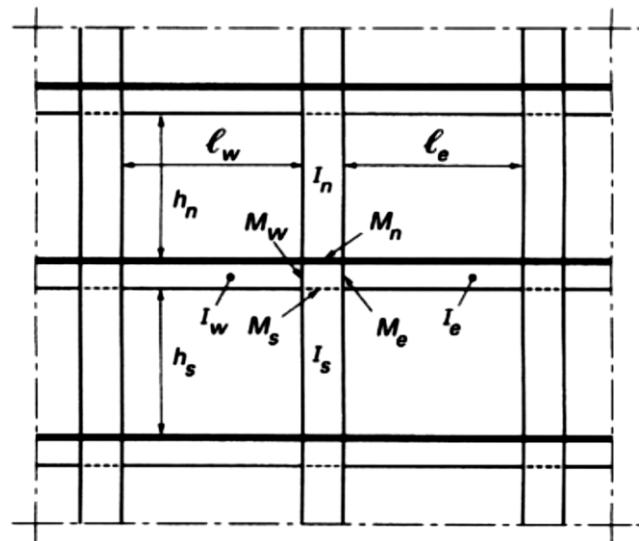
La méthode Caquot, initialement établie pour les poutres non solidaires des poteaux a été étendue au calcul des poutres solidaires des poteaux. Et ce, pour les structures contreventées par des voiles en béton armé par exemple.

6. MÉTHODE CAQUOT POUR POUTRES CONTINUES SOLIDAIRES DES POTEAUX :

Les moments de continuité agissant dans les sections des nus d'un appui (sections à vérifier) peuvent être évalués en ne tenant compte que des charges des travées encadrant l'appui considéré (travée de gauche, indice w , et travée de droite, indice e) et de la résistance offerte par les tronçons inférieur et supérieur des poteaux aboutissant au nœud considéré [tronçon inférieur, indice s (sud) et tronçon supérieur, indice n (nord)] (voir figure suivante).

De chaque côté des appuis, on détache des travées fictives dont les longueurs, désignées par (avec indice w ou e), sont précisées en fonction de la portée réelle entre nus, tant pour les travées intermédiaires que pour les travées de rive.

On détache de même au-dessus (nord) et au-dessous (sud) de chaque appui des tronçons fictifs de poteaux de hauteurs, lesquelles sont définies en fonction de h_n et h_s , tant pour les étages intermédiaires que pour les étages extrêmes (supérieur ou inférieur).



Notations utilisées dans la méthode de calcul des poutres continues solidaires des poteaux qui les supportent

Les Règles BAEL donnent les valeurs des moments de flexion M_w, M_e, M_n, M_s dans les sections à vérifier, en fonction :

- des portées et hauteurs fictives l'_w, l'_e, h'_n, h'_s ;
 - $h'_n = 0.8 h_n$ sauf si le nœud considéré appartient à l'avant dernier plancher, on prend alors : $h'_n = 0.9 h_n$.
 - $h'_s = 0.8 h_s$ sauf si le poteau est articulé à sa base, on prend alors : $h'_s = h_s$.
 - $l'_w = 0.8 l_w$ et $l'_e = 0.8 l_w$ pour une travée intermédiaire.
- des raideurs :
 - pour les poutres : $K_w = I_w/l'_w$; $K_e = I_e/l'_e$
 - pour les poteaux : $K_n = I_n/h'_n$; $K_s = I_s/h'_s$

Où les I désignent respectivement les moments d'inertie des sections transversales de la travée de gauche (I_w), de la travée de droite (I_e), du poteau supérieur (I_n) et du poteau inférieur (I_s) ;
— des charges uniformément réparties p_w et p_e respectivement appliquées dans les travées de gauche et de droite ;

— de toute charge concentrée P_{wi} ou P_{ei} appliquée dans les mêmes travées et de la distance de cette charge à l'appui considéré a_{wi} ou a_{ei} .

Par simplification, il n'est pas fait état, dans les calculs, des efforts tranchants dans les poteaux ni des efforts normaux dans les poutres.

Cas d'une travée intermédiaire :

On a les moments d'appuis fictifs :

$$M'_e = \frac{p_e \cdot l_e'^2}{8.5} + l_e' \sum K'_{ei} \cdot P_{ei}$$

$$M'_w = \frac{p_w \cdot l_w'^2}{8.5} + l_w' \sum K'_{wi} \cdot P_{wi}$$

$$K'_{ei} = \frac{1}{2.125} \cdot \frac{a_{ei}}{l_{ei}'} \left(1 - \frac{a_{ei}}{l_{ei}'} \right) \left(2 - \frac{a_{ei}}{l_{ei}'} \right)$$

$$K'_{wi} = \frac{1}{2.125} \cdot \frac{a_{wi}}{l_{wi}'} \left(1 - \frac{a_{wi}}{l_{wi}'} \right) \left(2 - \frac{a_{wi}}{l_{wi}'} \right)$$

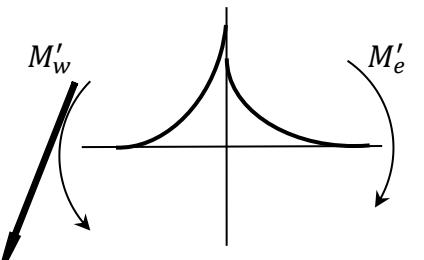
Distribution des moments fictifs aux barres formant le noeud :

Posons : $K = K_e + K_w + K_n + K_s$

Distribution de M'_e :

$$m_1 = \frac{M'_e \cdot K_e}{K} \quad m_2 = \frac{M'_e \cdot K_n}{K}$$

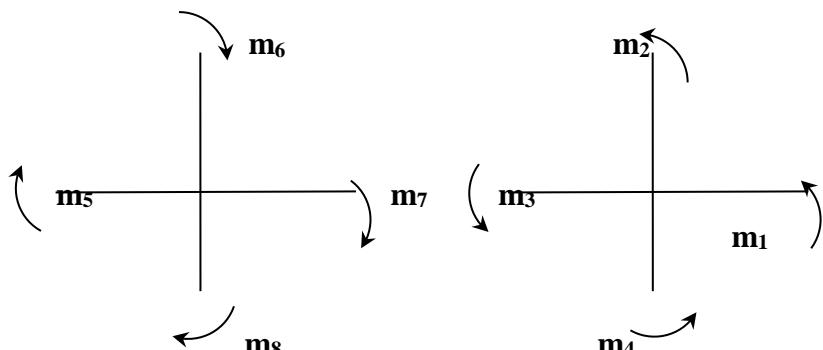
$$m_3 = \frac{M'_e \cdot K_w}{K} \quad m_4 = \frac{M'_e \cdot K_s}{K}$$



De même pour M'_w :

$$m_5 = \frac{M'_w \cdot K_w}{K} \quad m_6 = \frac{M'_w \cdot K_n}{K}$$

$$m_7 = \frac{M'_w \cdot K_e}{K} \quad m_8 = \frac{M'_w \cdot K_s}{K}$$



La superposition des deux distributions donne :

✓ Pour la barre à droite de l'appui considéré (travée est) :

$$M_e = M'_e - m_1 + m_7 = M'_e \left(1 - \frac{K_e}{K} \right) + M'_w \cdot \frac{K_e}{K}$$

✓ Pour la barre à gauche de l'appui considéré (travée ouest) :

$$M_w = M'_w - m_5 + m_3 = M'_w \left(1 - \frac{K_w}{K} \right) + M'_e \cdot \frac{K_w}{K}$$

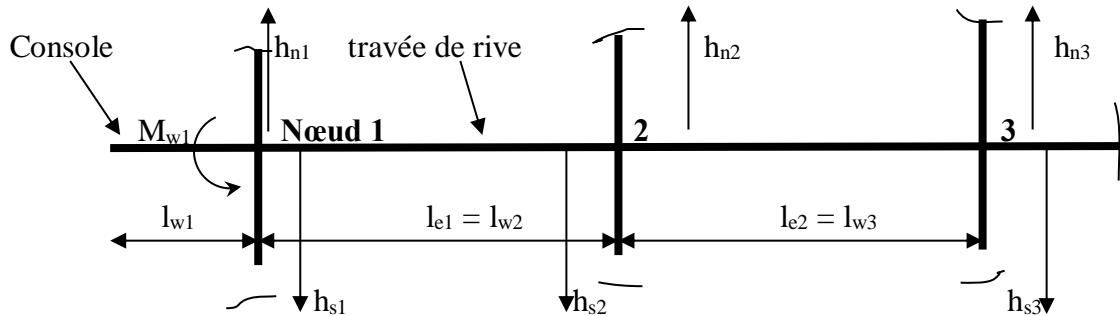
✓ Pour la barre au nord de l'appui considéré (poteau nord) :

$$M_n = m_2 - m_6 = \frac{K_n}{K} (M'_e - M'_w)$$

✓ Pour la barre au sud de l'appui considéré (poteau sud) :

$$M_s = m_4 - m_8 = \frac{K_s}{K} (M'_e - M'_w)$$

Cas d'une travée de rive :



▪ Poutre avec console : M_{w1} étant le moment de console.

Nœud 1 (de rive) : $K_w = 0$ donc $K_1 = K_{e1} + K_{s1} + K_{n1}$ et $M'_w = M_{w1}$

On aura :

$$M_{e1} = M'_{e1} \left(1 - \frac{K_{e1}}{K_1} \right) + M_{w1} \cdot \frac{K_{e1}}{K_1}$$

$$M_{s1} = (M'_{e1} - M_{w1}) \frac{K_{s1}}{K_1}$$

$$M_{n1} = (M'_{e1} - M_{w1}) \frac{K_{n1}}{K_1}$$

Nœud 2 (voisin du nœud de rive) :

$$l'_{w2} = \chi_1 \cdot l_{w2}$$

Avec : $\chi_1 = 0.8$ si $K_{s1} + K_{n1} \geq 1.5 K_{e1}$ Et $\chi_1 = 1 - \frac{K_{s1} + K_{n1}}{7.5 K_{e1}}$ si $K_{s1} + K_{n1} < 1.5 K_{e1}$

$l'_{e2} = 0.8 l_{e2}$ si la travée (2 – 3) n'est pas une travée de rive.

$l'_{e2} = \chi_3 \cdot l_{e2}$ dans le cas contraire

Avec : $\chi_3 = 0.8$ si $K_{s3} + K_{n3} \geq 1.5 K_{w3}$ Et $\chi_3 = 1 - \frac{K_{s3} + K_{n3}}{7.5 K_{w3}}$ si $K_{s3} + K_{n3} < 1.5 K_{w3}$

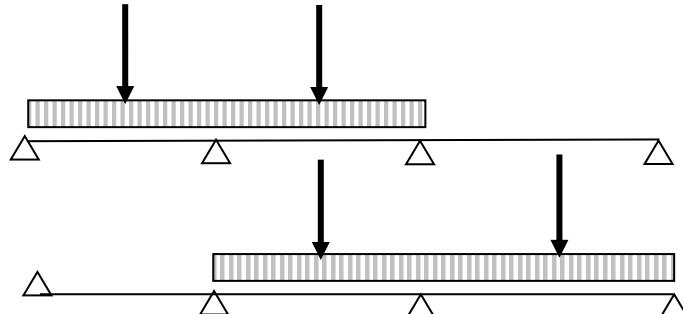
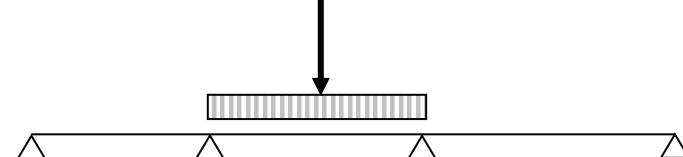
Et on remplacera pour ce nœud M'_{w2} par $M'_{w2} - \frac{1}{2.125} \cdot \frac{K_{e1}}{K_1} M_{w1}$.

Sans console on aura $M_{w1} = 0$.

Une fois les moments sur appuis intermédiaires connus, on en déduit les éléments M_x et T_x dans toutes les travées et ce avec les combinaisons de charges et surcharges les plus défavorables pour chaque travée (section critique).

7. ÉTUDE DES CAS DE CHARGES D'EXPLOITATION :

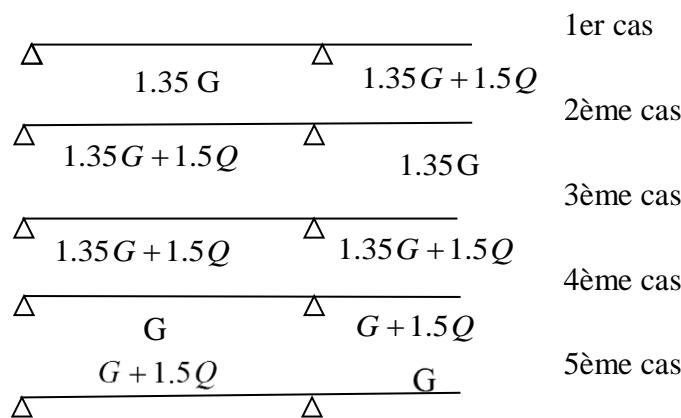
Le cas de charges de l'exemple précédent est celui qui engendre les moments négatifs maximaux sur les deux appuis intermédiaires. Pour que les calculs soient corrects et plus réalistes, d'autres cas devraient être étudiés de manière similaire à même de donner les valeurs des moments max en travées.

Cas N°	Schéma des charges d'exploitation	Résultats attendus
1		Moments négatifs Max sur les appuis intermédiaires 2 et 3
2		Moment positif Max en travée centrale
3		Moments positifs Max en travées latérales

Poutre sans porte-à-faux

	travées chargées	travées déchargées
1er cas	$1.35G + 1.5Q$	$1.35 G$
2ème cas	$G + 1.5Q$	G

Poutre prolongée par un porte-à-faux



8. Condition de non fragilité

La condition de non fragilité conduit à placer une section minimum d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donné. Une section de béton armé est considérée comme non fragile si le moment fléchissant entraînant la fissuration de la section de béton conduit à une contrainte dans les aciers au plus égale à leur limite d'élasticité garantie. On évalue la sollicitation de fissuration en considérant la section de béton seul soumise à une contrainte normal variant de façon linéaire sur toute la section et en limitant les contraintes de traction à f_{tj} .

En flexion simple, pour une poutre rectangulaire de dimension $b.h$, la contrainte maximale de traction vaut :

$$\frac{A_{min}}{bd} = 0.23 \frac{f_{tj}}{f_e}.$$

9. Justification des sections d'appuis

Appui de rive

- Effort de traction dans l'armature inférieure :

On doit prolonger les armatures inférieures au delà du bord de l'appui et y ancrer une section d'armatures longitudinales suffisantes pour équilibrer l'effort tranchant sur l'appui V_{u0} , soit :

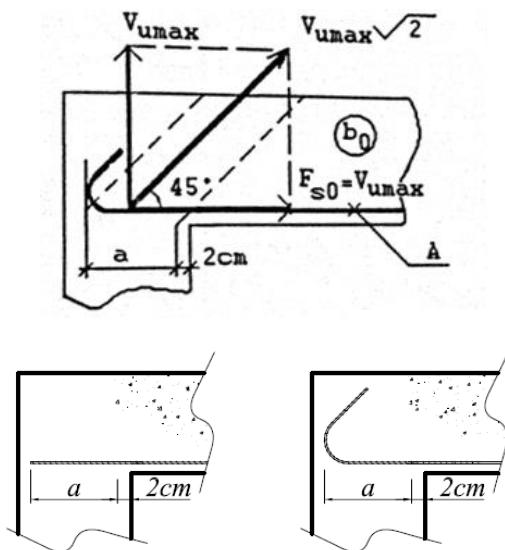
$$A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} V_{u0}$$

- Dimension de l'appui :

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$\sigma_{bc} = \frac{2V_{u0}}{ab_0} \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b},$$

Où la grandeur a est définie sur la figure suivante



Définition de la largeur a de la bielle de compression au niveau d'un appui

Appui intermédiaire

- Ancrage et bielle d'appui :

Il convient d'ancrer une section $A_{st} \geq (V_u + \frac{M_u}{0.9d})/f_{su}$

(À vérifier de chaque côté de l'appui ; M_u en valeur algébrique)

Pour la contrainte de compression, il faut effectuer la même vérification que pour un appui simple mais de chaque côté de l'appui (V_u à gauche et à droite de l'appui).

- Surface de l'appui :

Si R_u est la réaction totale d'appui, il faut vérifier :

$$\frac{R_u}{\text{section d'appui}} \leq \frac{1.3f_{cj}}{\gamma_b}.$$

10. ENTRAINEMENT DES ARMATURES :

La brusque variation de la contrainte de cisaillement longitudinal au niveau de l'armature tendue peut conduire à un glissement de la barre par rapport au béton. Il convient donc de s'assurer que l'effort tranchant résultant V_u est équilibré par l'adhérence se développant au contact acier-béton pour les différentes armatures isolées ou paquets d'armatures.

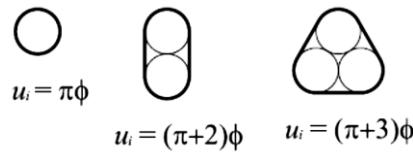
Chaque armature isolée (ou paquet d'armatures) d'aire A_{si} et de périmètre utile u_i reprend une fraction A_{si}/A_s de l'effort tranchant, avec A_s la section totale des aciers longitudinaux tendus. L'effort normal dans l'armature i vaut donc :

$$N_{sti} = \frac{A_{si}}{A_s} V_u.$$

Cet effort de traction N_{sti} doit être équilibré par la contrainte d'adhérence d'entraînement τ_{se} entre l'armature et le béton sur une longueur z_b (hypothèse du fonctionnement selon un treillis de Ritter-Mörsh), soit :

$$\tau_{se} z_b u_i = \frac{A_{si}}{A_s} V_u,$$

Où le périmètre utile u_i est défini sur la Figure suivante



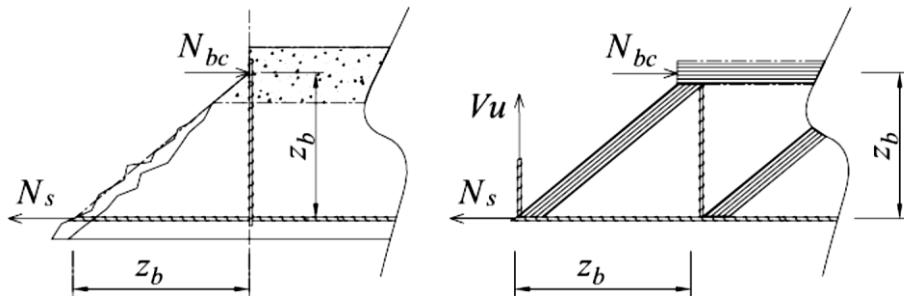
Il faut vérifier pour chaque paquet de barres que la contrainte d'adhérence τ_{se} reste inférieure à la valeur limite ultime $\tau_{se,u}$

$$\tau_{se} = \frac{V_u}{0.9du_i} \frac{A_{si}}{A_s} \leq \tau_{se,u} = \Psi_s f_{tj}, \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} - \Psi_s = 1 \text{ pour les ronds lisses,} \\ - \Psi_s = 1.5 \text{ pour les aciers HA.} \end{array} \right.$$

11. DÉCALAGE DE LA COURBE DU MOMENT FLÉCHISSANT

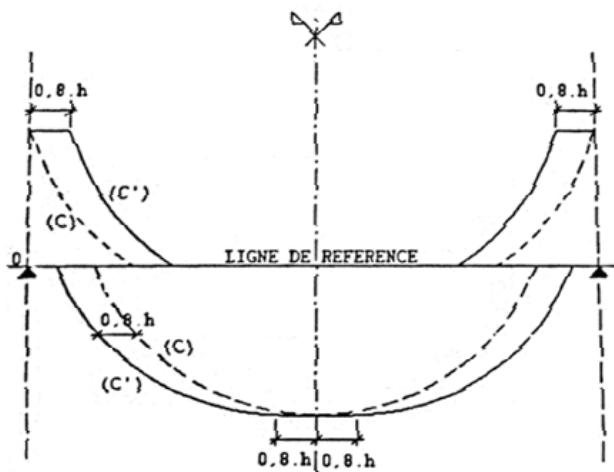
La règle du décalage tient compte de l'inclinaison à $\approx 45^\circ$ des bielles de béton comprimé : l'effort de traction N_s dans les aciers est constant sur une longueur z_b (fonctionnement simplifié selon un treillis de Ritter-Mörsh comme décrit sur la Figure). Par conséquent, l'effort agissant dans

l'armature (N_s) doit être évalué en prenant en compte le moment fléchissant agissant à une distance z_b de la section considérée.



Fonctionnement de la section de béton armé selon un treillis de Ritter- Mörsh.

Pour tenir compte de ce décalage, on propose de décaler horizontalement de $0.8h$ ($z_b = 0.9d$ et $d = 0.9h$) dans le sens défavorable de la courbe des moments fléchissants, ce qui revient à rallonger de $0.8h$ les deux cotés des aciers longitudinaux.

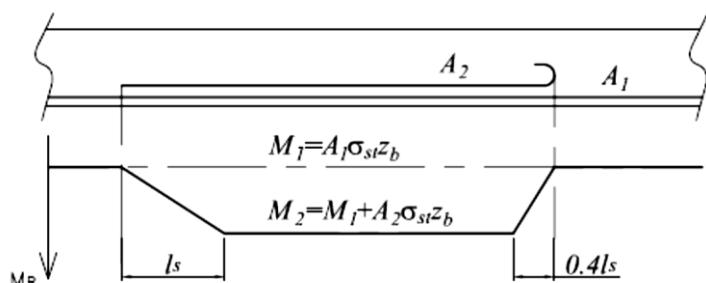


Arrêt des barres

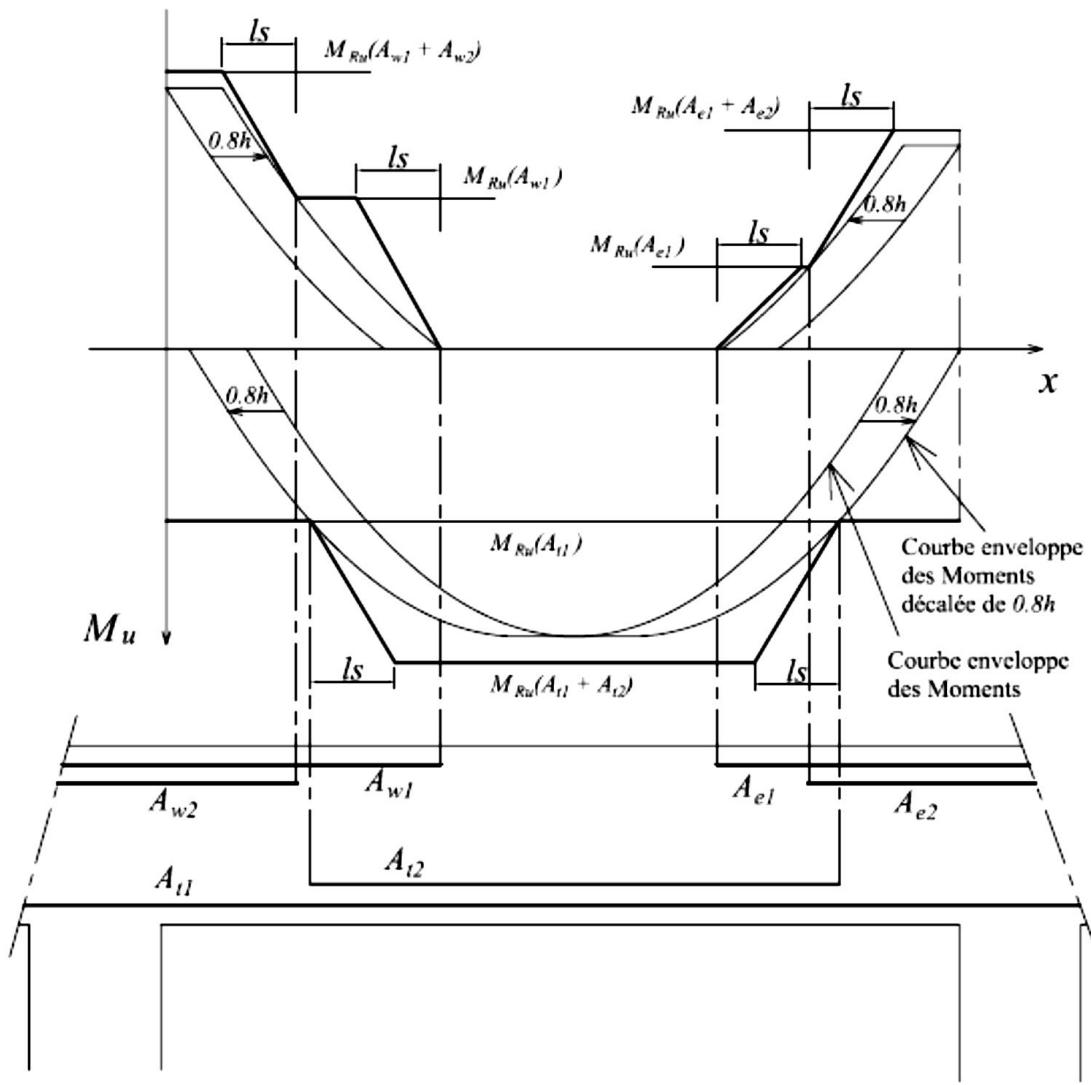
Dans une section donnée, la section des aciers est directement liée à la valeur du moment de flexion. On calcule les aciers longitudinaux dans les sections les plus sollicitées.

Or le moment varie tout au long de la poutre (ex : pour une poutre isostatique sur appuis simples, le moment est nul sur les appuis). De ce fait, il est inutile de garder la section maximale d'acier tout au long de la poutre.

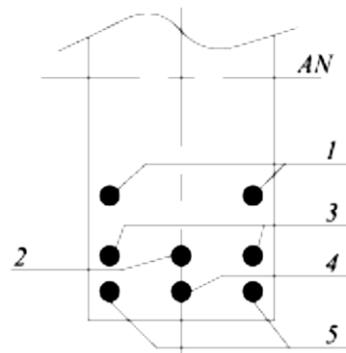
Les armatures longitudinales dans une section doivent pouvoir reprendre le moment correspondant au cas de charge le plus défavorable appliqué. On raisonne sur la courbe enveloppe du moment fléchissant.



Définition de la valeur du moment résistant en fonction de l'arrêt des barres du ferraillage longitudinal.



En tenant compte des longueurs d'ancrage et de la règle du décalage, l'épure d'arrêt de barres se construit en utilisant la courbe enveloppe des moments fléchissants. La section d'acier des moments maximums est calculée, puis un choix sur le nombre de barres est effectué. Si le ferrailage est composé de plusieurs lits, le *moment résistant* repris par chacun des lits est tracé sur le diagramme des moments fléchissants. L'intersection de ces droites de moment résistant avec la courbe enveloppe détermine les arrêts de barres (il faut ensuite rajouter $0,8h$).



Exemple d'ordre d'arrêt des barres en fonction de leur position dans la section.

Pour déterminer la longueur des barres appartenant à deux travées contiguës, il ne faut pas oublier de rajouter la largeur des **poteaux**, puisque les dimensions sont indiquées à partir des nus d'appuis.

Répartition des armatures transversales

Pour déterminer la section d'acier transversale et l'espacement des cadres, il faut procéder de la manière suivante :

- ✓ Pour des raisons de mise en œuvre, les espacements s_t sont choisis dans la suite de Caquot (non obligatoire) : **7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40**, avec chaque valeur d'espacement doit être répétée autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi portée de la poutre (prendre la partie entière du rapport).

Conditions d'application : charges uniformément réparties ; section constante de la poutre ; cas de flexion simple.

- ✓ On se fixe la valeur de la section d'armature transversale A_t , ce qui revient dans les faits à choisir le diamètre des armatures transversales. Pour des facilités de mise en œuvre, on placera des cadres identiques sur toute la travée.
- ✓ On détermine l'espacement s_{t0} sur l'appui, et le premier cadre est placé à $s_{t0}/2$ du nu de l'appui.
- ✓ On détermine la répartition des armatures transversales suivantes de façon à avoir un effort tranchant résistant qui enveloppe la courbe de l'effort tranchant à reprendre. Pour cela, on peut procéder graphiquement sur le diagramme de l'effort tranchant en reportant les valeurs des efforts tranchants résistants $V_{uR_i} = z_b f_{su} A_t / s_{ti}$ pour les différents espacements s_{ti} de la suite de Caquot supérieurs à s_{t0} . On répète autant de fois que nécessaire l'espacement s_{ti} , jusqu'à pouvoir adopter l'espacement suivant s_{ti+1} dans la suite de Caquot.
- ✓ On doit par ailleurs vérifier que l'espacement maximal reste inférieur à

$$s_t \leq \inf\{0.9d; 40\text{cm}\}$$

$$s_t \leq \frac{A_t f_{et}}{0.4 b_0} \quad (\text{Condition de non fragilité})$$

Dans cette formule les dimensions sont exprimées en cm et la contrainte en MPa.

Limitation de la flèche :

Pour les éléments reposant sur deux appuis ou plus (poutre et dalle), les flèches sont limitées à :

$$\frac{l}{500} \text{ si la portée } l \leq 5.0 \text{ m}$$

$$0.005 + \frac{l}{1000} \text{ sinon,}$$

Où la flèche et la portée sont exprimées en mètre.

Pour les éléments en console les flèches sont limitées à :

$$\frac{l}{250} \text{ si la portée de la console } l \leq 2.0 \text{ m}$$

$$f = \frac{M_t l^2}{10 E_b I} \text{ pour les poutres et dalles}$$

$$f = \frac{M_t l^2}{4 E_b I} \text{ pour les consoles}$$

Avec :

- $E_b = E_{bi}$ et $I = I_{fi}$ si la charge est de courte durée,
- $E_b = E_{bv}$ et $I = I_{fv}$ si la charge est de longue durée,

$$I_f = 1.1 \frac{I_0}{1 + \lambda\mu'}$$

Où I_0 est le moment d'inertie de la section non fissurée homogénéisée par rapport au béton,

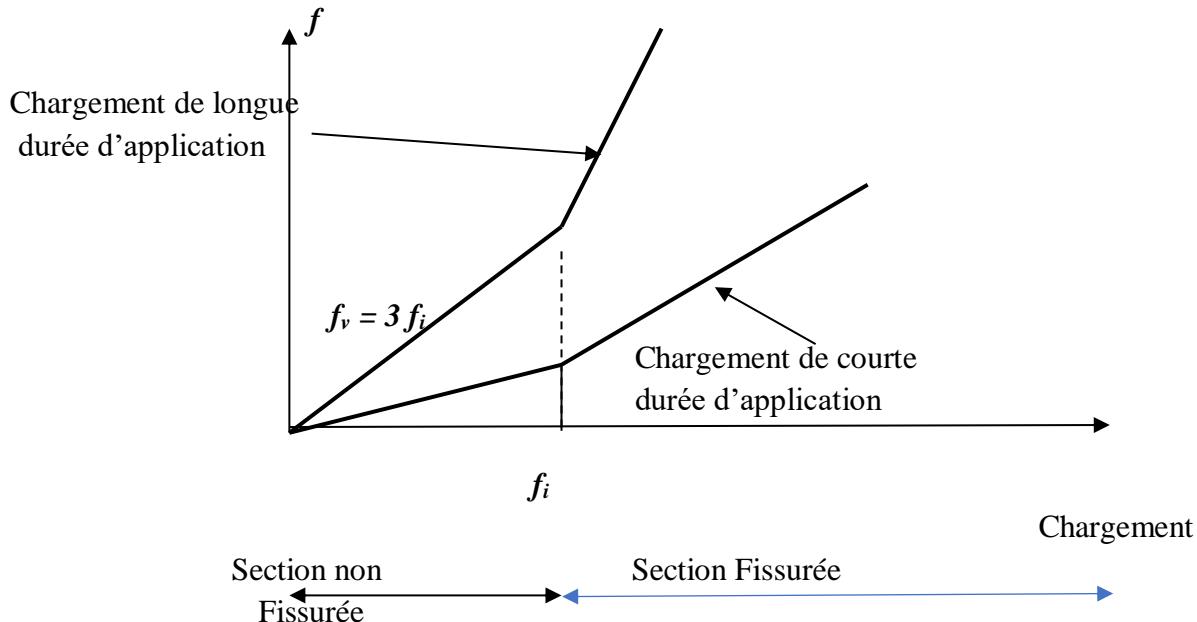
$$\lambda = \lambda_i = \frac{0.05bf_{t28}}{[(2b + 3b_0)\rho]} \text{ pour les déformations instantanées,}$$

$$\lambda = \lambda_v = \frac{2}{5\lambda_i} \text{ pour les déformations de longue durée}$$

$$\mu = \text{Max} [0; 1 - \frac{1.75f_{t28}}{4\rho\sigma_{st} + f_{t28}}]$$

Dans ces expressions :

- I_0 est le moment quadratique de la section totale homogénéisée par rapport au béton calculé avec un coefficient d'équivalence $n = 15$,
- Les résistances caractéristiques f_{t28} et σ_{st} sont exprimées en Mpa,
- $\rho = \frac{A_s}{b_0 d}$ le pourcentage d'armatures tendues.
-



Les flèches se cumulent et pour évaluer la valeur de la flèche à chaque étape de la construction, il faut tenir compte des différentes phases (par exemple pour une dalle) :

1. Coulage de la dalle,
2. Pose des cloisons,
3. Pose du revêtement de sol,
4. Exploitation du bâtiment.

On définit la flèche nuisible comme la flèche due aux charges appliquées à partir de la pose des cloisons.

On calcule :

- les flèches instantanée et différée f_{gi} et f_{gv} dues à l'ensemble des charges permanentes,
- la flèche instantanée f_{ji} due aux charges permanentes appliquées au moment de la mise en œuvre des cloisons,
- la flèche instantanée f_{pi} due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitations supportées par l'élément considéré.

La flèche nuisible aux cloisons à comparer aux valeurs admissible vaut :

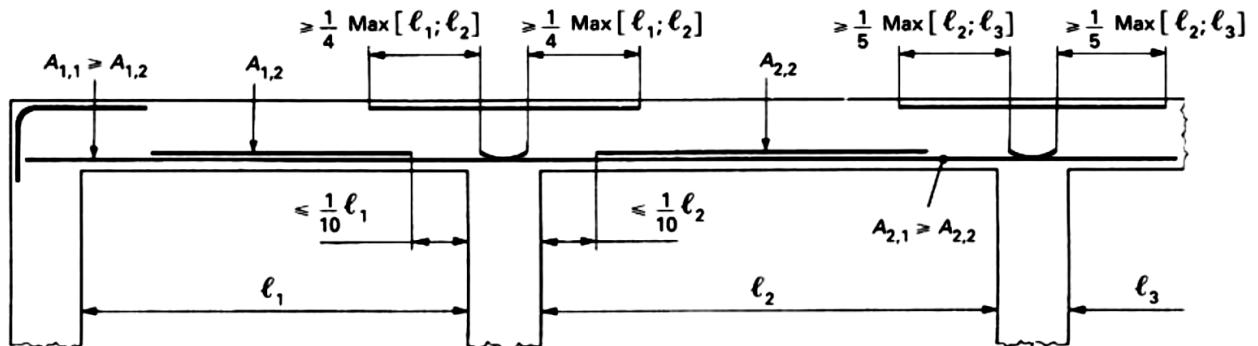
$$\Delta f_t = f_{gv} - f_{ji} + f_{pi} - f_{gi}.$$

Schéma de ferraillage forfaitaire d'une poutre continue :

Lorsque nous avons :

- $q \leq g$,
- les charges sont réparties,
- les moments sur appuis sont pris à leur valeur minimale (valeurs adoptées par la méthode forfaitaire).

Il est possible d'adopter le principe de ferraillage de la figure suivante.



(il faut en outre $\frac{1}{4} \text{Max}[\ell_1; \ell_2] \geq \ell_s$ et $\frac{1}{5} \text{Max}[\ell_i; \ell_{i+1}] \geq \ell_s$ avec ℓ_s longueur d'ancre)

ARRÊT FORFAITAIRE DES BARRES