

## Aperçu du sujet " Introduction et Historique"

### 1.1 Historique de la programmation linéaire

Les premiers mathématiciens qui se sont occupés de problèmes, que l'on ne nommait pas encore à l'époque « programmes linéaires » (P.L.), sont : LAPLACE (1749-1827) et le baron FOURIER qui, vers 1825, a proposé une méthode d'élimination pour traiter des systèmes d'inéquations linéaires et qui a défini une méthode géométrique pour atteindre le point le plus bas d'un solide délimité par des facettes planes (c'est-à-dire d'un « polyèdre »), idée très voisine de celle qui préside à l'algorithme dit « du simplexe » (le plus courant actuellement pour résoudre la P.L.) ; FOURIER est certes plus connu pour ses séries trigonométriques ou encore en physique pour sa résolution de l'équation de la chaleur. Mais l'importance économique de la P.L. n'apparaissait pas à l'époque et ses travaux sont tombés dans l'oubli.

De même vers 1911, Charles DE LA VALLEE-POUSSIN, un mathématicien belge, s'est vu confier par des astronomes un problème d'approximation minimale qui revenait en fait à résoudre un P.L. ; il l'a résolu par une méthode de changement de base (tout comme dans le simplexe) ; mais il était trop tôt pour qu'elle soit utilisée en économie et sa méthode n'avait été diffusée que dans le cercle des astronomes. Elle est restée inconnue des chercheurs opérationnelle jusqu'à une date bien postérieure de l'invention de l'algorithme du simplexe.

Il a fallu attendre l'époque de la seconde guerre mondiale pour que l'on modélise et résolve des problèmes de logistique qui se formulaient en tant que P.L. : ainsi le russe KANTOROVITCH en 1939 a imaginé une méthode inspirée des multiplicateurs de LAGRANGE, classiques en mécanique, pour résoudre des « programmes de transport ». Il faut être patient dans la vie : ce n'est qu'en 1975 qu'il fut récompensé pour l'ensemble de ses travaux par le prix Nobel d'économie, conjointement avec l'américain KOOPMANS...

La contribution décisive a été l'invention de l'algorithme du SIMPLEXE, développé à partir de 1947 notamment par G.B. DANTZIG et le mathématicien VON NEUMANN. Cet algorithme a ensuite été implémenté sur les premiers ordinateurs et perfectionné (« méthode révisée du simplexe ») pour accroître

la précision des résultats et diminuer le volume de mémoire nécessaire à la résolution.

Vers 1975-1979, les mathématiciens soviétiques SHORR puis KHACHIYAN ont apporté une avancée théorique concernant la complexité de la programmation linéaire, (en créant un algorithme polynômial) mais sans qu'elle débouche sur un algorithme plus efficace en pratique que le SIMPLEXE.

Au milieu des années 80, l'indien KARMARKAR a proposé une nouvelle méthode créée aux Bell Laboratoires qui permettait de résoudre de très gros problèmes linéaires, par une démarche « intérieure » au polyèdre des solutions admissibles. Vues les immenses répercussions économiques et les implications financières de cette découverte, la méthode n'avait été publiée que partiellement : toutefois la communauté scientifique internationale a confirmé désormais la validité de l'approche de KARMARKAR ; notons toutefois que sur les PL de taille petite et moyenne le SIMPLEXE garde souvent l'avantage. Depuis de nombreuses « méthodes intérieures » ont vu le jour.

## **DIMENSIONS DES PROBLEMES RESOLUS**

On considère que des PL comportant  $m = 1\ 000$  contraintes et  $n = 3\ 000$  variables sont de dimension courante (pour l'algorithme du simplexe). On parle de gros problèmes à partir de  $m = 5\ 000$  contraintes et  $n = 10\ 000$  variables. De très gros PL ont été résolus opérationnellement : un PL avec  $m = 30\ 000$  et  $n = 300\ 000$  pour la gestion intégrée de la firme américaine NABISCO, et à la NASA  $n = 35\ 000$  et  $m = 512\ 000$ . Pour une compagnie aérienne, un problème avec  $n = 5\ 500\ 000$  variables (mais seulement  $m=850$  contraintes) a aussi été résolu. Avec des PL dont les données ont des structures particulières, on a pu même dépasser les 10 000 000 de variables !

La première révolution industrielle avait remplacé la force musculaire de l'homme par celle des machines. La seconde voyait la machine se commander elle-même.

Les ordinateurs se sont introduits dans les entreprises et les pouvoirs publics firent surgir des problèmes de grande envergure auxquels les directions n'étaient pas préparées.

La caractéristique essentielle de la Recherche Opérationnelle est le recours à la méthode scientifique. Le chercheur de la R.O. construit une représentation qu'il appelle un "modèle mathématique". Il peut manipuler les

modèles et les étudier plus facilement que le système réel. Les modèles sont parfois très difficiles à construire et peuvent prendre la forme d'expressions mathématiques fortes compliquées.

Lorsqu'ils mettent leur modèle en formule, les chercheurs doivent énoncer formellement quelles sont les variables, l'objectif, les paramètres.

### Définition de la programmation linéaire

La programmation linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont à une série d'équations et d'inéquations linéaires.

Un programme linéaire est la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

La programmation linéaire a été formulée par Dantzig en 1947 et connaît un développement rapide par suite de son application directe à la gestion scientifique des entreprises. Le facteur expliquant l'essor de la P.L est la construction d'ordinateurs puissants qui ont permis de traiter les problèmes concrets de taille très grande.

On l'applique surtout en gestion et en économie appliquée. On peut citer les domaines d'application de la programmation linéaire qui sont : les transports, les banques, les industries lourdes et légères, l'agriculture, les chaînes commerciales, la sidérurgie, et même le domaine des applications militaires.

### **Rentabilité:**

Comme souvent en Recherche Opérationnelle, l'emploi de la P.L. permet d'optimiser des systèmes et de réaliser des économies de l'ordre de 5 à 10% (parfois plus !) sur le coût de fonctionnement du système.

Parfois ce pourcentage est bien moindre : ainsi l'optimisation de l'achat de pneumatiques pour équiper des véhicules neufs chez un grand constructeur automobile avait permis une économie de 0,5% sur un coût mensuel de 12 millions d'euros soit 600 000 €/mois ... Ce qui couvrirait largement le salaire de l'ingénieur auteur de l'étude pendant toute sa vie professionnelle !

Il n'est pas rare qu'une optimisation à l'aide de la P.L. permette des gains annuels représentant 200 à 300 fois le coût de l'étude. Les « retours sur investissement » se comptent plus souvent en semaines ou en mois, qu'en années...

Les méthodes de résolution sont la méthode du simplexe, méthode duale du simplexe, méthodes des potentiels, méthode lexicographique et des méthodes récentes appelées méthodes des points intérieurs. Le but de cette partie du recueil n'est pas de donner les méthodes de résolution de la programmation linéaire mais de présenter à l'aide des exemples concrets et faciles.

### **Application Principales:**

Une liste incomplète !

- dans l'industrie du pétrole : commande de la marche des raffineries (distillation, reformage, craquage), compositions ou de mélanges de produits.
- industries métallurgiques (alliages)
- dans l'industrie alimentaire (mélanges)
- plannings (rotation d'équipages, etc.) dans les compagnies de transport aérien, ferroviaire, urbain.
- planification (par ex. en agriculture) ; matrices intersectorielles de LEONTIEFF (matrices input-output).
- Composition des portefeuilles.
- etc.