

Chapitre 3 : Théorèmes Fondamentaux de la théorie de plasticité

Rappel du théorème des travaux virtuels :

" Si une structure en équilibre statique sous l'effet d'un système de charges extérieures est soumise à une variation virtuelle de déformation compatible avec ses liaisons, le travail des charges extérieures pendant cette variation de déformation est égale au travail des effets internes ".

Ce théorème reste valable quel que soit le comportement de la structure (élastique, élastique-parfaitement plastique, fragile, ...). Il faut noter que la déformation virtuelle peut être choisie arbitrairement. Il suffit qu'elle satisfasse aux conditions imposées par les appuis et liaisons.

Théorème statique :

Pour les structures constituées d'éléments à comportement parfaitement plastique et satisfaisant au principe de Hill :

Considérons une structure et un chargement donné P . La ruine se produit sous les charges $\lambda_u P$:

Le coefficient de sécurité λ_u ainsi défini est égal à la valeur maximale du facteur λ tel que sous les charges λP il puisse trouver une distribution d'efforts internes.

En équilibre avec les charges λP .

Respectant le critère de plasticité des éléments de la structure.

Théorème cinématique :

Pour les structures constituées d'éléments à comportement parfaitement plastique et satisfaisant au principe de Hill :

Considérons une structure et un chargement donné P. La ruine se produit sous les charges λuP .

Le coefficient de sécurité λu ainsi défini est égal à la valeur minimale des facteurs λ_i calculés par :

$\lambda_i \cdot W_{ext}^i = W_{defmax}^i$ Lorsqu'on envisage tous les champs de déformations compatibles i, où :

W_{defmax}^i : est l'énergie maximale de déformation pour le champ de déformation-compatible i.

W_{ext}^i : est le travail des charges P pour les déplacements associés au champ de déformations-compatible i.

Théorème Combiné :

Pour les structures constituées d'éléments à comportement plastique et satisfaisant au principe de HILL, on déduit immédiatement des théorèmes statiques et cinématiques l'énoncé suivant :

" Si dans une structure sous le système de charge P on peut trouver une distribution des efforts internes :

Qui soit en équilibre avec les charges P.

Qui ne dépassent pas la capacité de résistance des éléments.

Qui soient telles qu'il y ait suffisamment de plastifications pour former un mécanisme.

Les charges P sont des charges de ruine.

Notions sur l'énergie maximale de déformation :

Déformation virtuelle définie par un seul paramètre :

*Déformation virtuelle : Variation de longueur ΔL d'une barre.

* Efforts normaux supportés dans la barre :

$$-N_0 < N < N_0$$

* Énergie maximale de déformation :

$$W_{défmax} = \max(N.\Delta L) \text{ avec } -N_0 < N < N_0$$

$$W_{défmax} = N.\Delta L \text{ si } \Delta L > 0$$

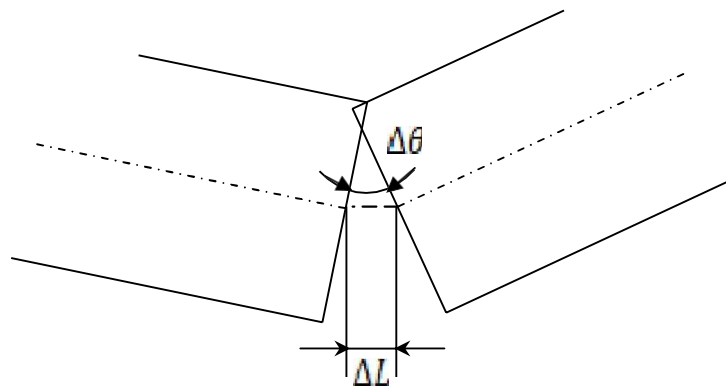
$$W_{défmax} = -N.\Delta L \text{ si } \Delta L < 0$$

Déformation virtuelle définie par deux paramètres :

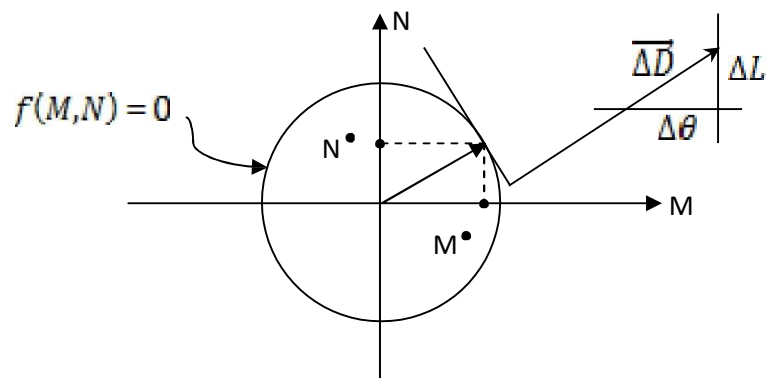
Déformation virtuelle dans une barre.

$\Delta\theta$: Rotation relative entre deux sections infiniment voisines.

ΔL : Variation de distance entre les centres de gravité des sections.



Critère de résistance de la barre : $f(M,N) = 0$



Energie maximale de déformation :

$$W_{\text{défmax}} = \vec{E^*} \cdot \vec{\Delta D}$$

$\vec{E^*}$: Vecteur ayant pour composantes les efforts M^* et N^* qui tout en ne dépassant pas la capacité de la section sont tels que $\vec{E^*} \cdot \vec{\Delta D} = M^* \cdot \Delta \theta + N^* \cdot \Delta L$ soit minimum.

L'extrémité du vecteur $\vec{E^*}$ est située sur le point de la courbe d'équation $f(M, N) = 0$ telle que la tangente en ce point soit perpendiculaire au vecteur $\vec{\Delta D}$

