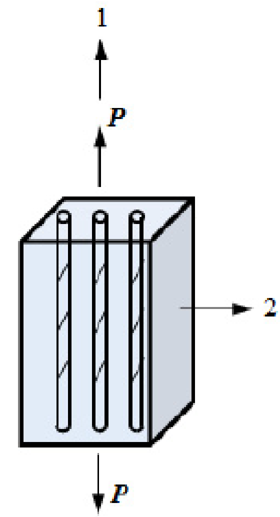
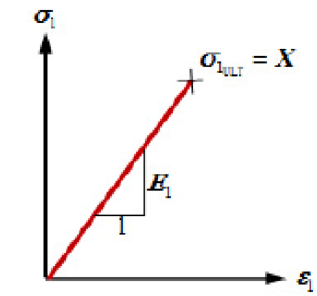
Critère de rupture.

$$X = \frac{P_{ult}}{A} = \sigma_{1ult}$$

P_{ult} : charge ultime, de rupture





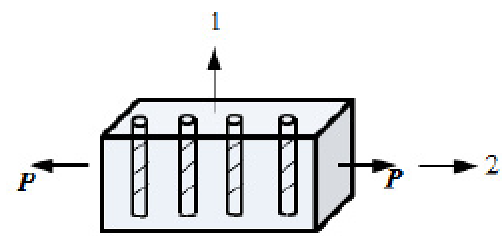
X : contrainte ultime longitudinale (direction 1)

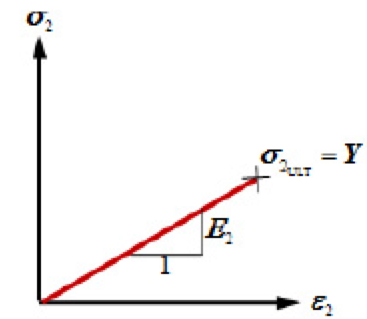
Soient :

Y : contrainte ultime transversale (direction 2)

S : contrainte ultime de cisaillement (plan 1-2)

$$Y = \frac{P_{ult}}{A} = \sigma_{2ult} \quad \text{et} \quad S = \tau_{12ult}$$





Trois critères sont utilisés :

- Critère de la contrainte maximale; Critère de la déformation maximale;

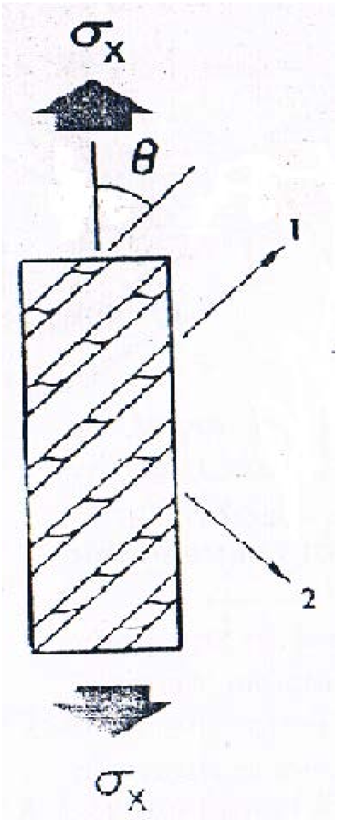
- Critères énergétiques : Hill; Tsai-Hill; Tsai-Wu;

- Critères basés sur la théorie d'élasticité.

Dans tous les cas on doit avoir :

$$\sigma_1 < X \quad ; \quad \sigma_2 < Y \quad ; \quad \tau_{12} < S$$

Considérons l'essai de traction de la figure ci - contre:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x cos^2\theta \ ;$$
$$\sigma_2 = \sigma_x sin^2\theta \ ;$$
$$\tau_{12} = -\sigma_x sin\theta cos\theta$$

Le critère de la contrainte maximale est défini par les 3 relations :

$$\sigma_x < \frac{X}{cos^2\theta}; \quad \sigma_x < \frac{Y}{sin^2\theta}; \quad \sigma_x < \frac{S}{sin\theta cos\theta}$$

En se servant des relations contraintes déformations suivantes :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2\right)$$
$$\epsilon_2 = \frac{1}{E_2}\left(\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1\right)$$
$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

on démontre que le critère de la déformation maximale est défini par les 3 relations :

$$\sigma_x < \frac{X}{\cos^2\theta - \nu_{12}\sin^2\theta} \qquad \sigma_x < \frac{Y}{\sin^2\theta - \nu_{21}\cos^2\theta} \qquad \sigma_x < \frac{S}{\sin\theta\cos\theta}$$

Critère de Tsai-Hill

Principe : (Hill) $$f\left(\sigma_{ij}\right) \le 1$$

$$(G+H)\sigma_1^2 + (F+H)\sigma_2^2 + (F+G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1$$

F, *G*, *H*, *L*, *M* et *N* contraintes de rupture du matériau anisotrope.

Ces termes sont déterminés en fonction des contraintes ultime ***X***, ***Y*** et ***S*** (***Tsai***) en considérant des états de contraintes simples.

Seulement : $\tau_{12} \neq 0 \Longrightarrow 2N = \dfrac{1}{S^2}$ $\qquad$ $\sigma_3 \neq 0 \Longrightarrow F + G = \dfrac{1}{Z^2}$

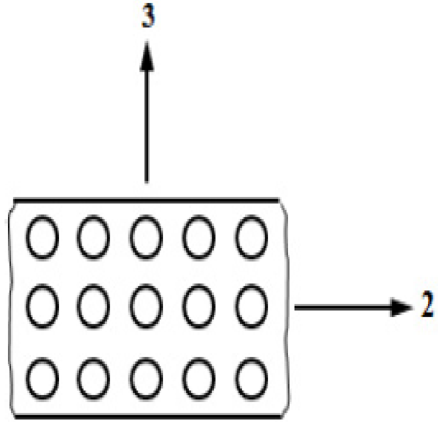
$$\sigma_1 \neq 0 \Longrightarrow G + H = \frac{1}{X^2}$$

$$\sigma_2 \neq 0 \Longrightarrow F + H = \frac{1}{Y^2}$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \qquad 2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \qquad 2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

Dans le cas d'un pli unidirectionnel en état de contraintes planes (1 direction des fibres) on doit avoir

$$\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$



La symétrie géométrique (plan 2-3) impose :

$$Y = Z$$

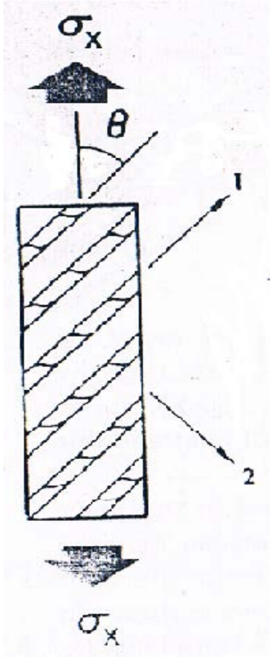
Le critère de Hill s'écrit :

$$(G+H)\sigma_1^2 + (F+H)\sigma_2^2 + -2H\sigma_1\sigma_2 + 2N\tau_{12}^2 = 1$$

Par substitution des équations précédentes on obtient :

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

Critère de Tsai-Hill



Application :

Le pli unidirectionnel de la figure ci-contre est chargé en traction. Quelle doit être dans ces conditions la valeur maximal de σ_x ?

La contrainte de traction maximale supportée par le plis est :

$$\sigma_x = \frac{1}{\left(\frac{\cos^4\theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{Y^2}\right)^{1/2}}$$