Chapitre 2

Fiabilité des systèmes Cohérents binaires

Le but de ce chapitre est de donner les notions de bases et les propriétés des systèmes complexes, cohérents et binaires. On suppose que chaque composant et le système lui même possède que deux états 0 et 1 ou 0 veut dire que le système est en panne et 1 fonctionne c.à.d. l'ensemble des états est $E = \{0, 1\}$ avec l'ensemble des états de marche est $M = \{1\}$ et l'ensemble des états de panne est $P = \{0\}$

Dans la théorie de la fiabilité un problème clé est de trouver la fiabilité d'un système complexe à partir des fiabilités de ses composants. Pour cette raison nous présentons un utile descriptif qui nous permette de savoir les relations entre un système et ses composants ensuite nous passerons au calcul proprement dit de la fiabilité d'un système en fonction des fiabilités de ses composants.

Définition 2.0.2. *Un système binaire est tous système possède deux états marche et en panne, dans ce cas les composants aussi possèdent deux états marche et en panne.*

Alors nous avons besoins des notations.

Notations :

1. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. tel que $x_i = 0$ ou 1 $\forall i = 1, 2, ..., n$.
2. $\prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$

3. $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$
4. $(\bullet_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, ..., x_n)$
5. $(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$
6. $(0_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$
7. Si $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ on a :
   $*$ $x \amalg y = (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, ..., x_n \amalg y_n)$
   $*$ $x \leq y \Longrightarrow x_i \leq y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$
   $*$ $x < y \Longrightarrow x_i \leq y_i$ avec $x_j < y_j$ pour un certain j.
   $*$ $x << y \Longleftrightarrow x_i < y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$
8. x^A est le vecteur composé des coordonnées x_i pour $i \in A$.
9. $\overline{A}$ est le sous-ensemble complémentaire de A.

2.1 Propriétés déterministes des systèmes complexes

Dans ce paragraphe, on considère les relations (déterministes) de structure entre un système et ses composants, en supposant que l'état du système ne dépend que des états de ses composants.

2.1.1 Système des composants

Soit un système des composants $C = \{1, 2, ..., n\}$ et x_i la variable qui représente l'état du composant i pour $i = 1, 2, ..., n$ (c.à.d. $x_i = 0$ si le composant i est en panne et $x_i = 1$ si le composant i fonctionne) et soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Définition 2.1.1. *(**Fonction de structure**) : On appelle fonction de structure et on la note Φ la fonction qui représente l'état du système c'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x) & : & \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longrightarrow & \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

ou

$$\forall x \in \{0,1\}^n : \Phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si le système est en panne.} \\ 1 \quad \text{si le système fonctionne.} \end{cases}$$

* Le nombre n des composants est appelé l'ordre du système.

* On dit aussi le système (c, Φ) quand on veut préciser l'ensemble des composants. Dans toute la suite on ne fera pas la distinction entre "système" et "structure".

* On a l'ensemble $\{0,1\}^n$ contient 2^n vecteurs différents. Alors tout vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tq $\Phi(x) = 1$ s'appel vecteur de marche pour le système et tout vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tq $\Phi(x) = 0$ s'appel vecteur de panne pour le système.

2.1.2 Quelques systèmes usuels

1) Système en série :

Définition 2.1.2. *On appelle un système en série tout système qui fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent, alors :*

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1; ssi \quad x_i = 1; \forall i = 1, 2, ..., n \\ \quad 0 \quad sinon \end{cases}$$

Donc il est clair que :

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min_{1 \le i \le n} x_i.$$

** Pour un système en série il existe un seul vecteur de marche $x = (1, 1, ..., 1)$ et $2^n - 1$ vecteurs de panne.*

** Comme exemple si $n = 3$ on a le vecteur de marche est $x = (1, 1, 1)$ et les 7 vecteurs de marches sont $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$*

2) Système en parallèle :

Définition 2.1.3. *On appelle un système en parallèle tout système qui tombe en panne si et seulement si tous ses composants tombent en panne, alors :*

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0; ssi & x_i = 0; \forall i = 1, 2, ..., n \\ 1 & sinon \end{cases}$$

Donc il est clair que :

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

** Pour un système en parallèle il existe un seul vecteur de panne $x = (0, 0, ..., 0)$ et $2^n - 1$ vecteurs de marches.*

** Comme exemple si $n = 3$ on a le vecteur de panne est $x = (0, 0, 0)$ et les 7 vecteurs de marches sont $(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$*

3) Système "k-sur-n : G" $(k \leq n)$

On appelle un système **"k-sur-n : G"** tout système qui fonctionne si et seulement si au moins k de ses composants fonctionnent, alors :

$$\forall x \in \{0, 1\}^n : \Phi(x) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\right\}}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Remarque 2.1.1. • *Si $k = n$ on a le système "**n-sur-n : G**" est un système en série.*

- *Si $k = 1$ on a le système "**1-sur-n : G**" est un système en parallèle.*

4) Système "k-sur-n : F" $(k \leq n)$

On appelle un système "**k-sur-n : F**" : tout système qui tombe en panne si et seulement si au moins k de ses composants tombent en panne, alors :

$$\forall x \in \{0,1\}^n : \Phi(x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k \end{cases} = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1\right\}}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Remarque 2.1.2. • *Si $k = n$ on a le système "**n-sur-n : F**" est un système en parallèle.*

- *Si $k = 1$ on a le système "**1-sur-n : F**" est un système en série.*

5) système "k-consécutifs-sur n : F" $(k \leq n)$

Définition 2.1.4. *Un système "**k-consécutifs-sur n : F**" est un système composé de n composants et il ftombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs tombent en panne c.à.d.*

$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Longleftrightarrow$ *au moins k coordonnées successives du vecteur x valent* 0

Donc on peut écire :

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= (x_1 \amalg x_2 \amalg ... \amalg x_k).(x_2 \amalg ... \amalg x_{k+1})...(x_{n-k+1} \amalg ... \amalg x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n-k+1} \coprod_{j=i}^{i+k-1} x_j = \min_{1 \le i \le (n-k+1)} \max_{i \le j \le (i+k+1)} (x_j).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.3. • *Si* $k = 1$: *Un système* **"1-consécutifs-sur n : F"** *est un système en série.*

• *Si* $k = n$: *Un système* **"n-consécutifs-sur n : F"** *est un système en parallèle.*

6) système "k-consécutifs-sur n : F" $(k \le n)$

Définition 2.1.5. *Un système* **"k-consécutifs-sur n : G"** *est un système composé de n composants et il fonctionne si et seulement si au moins k composants consécutifs fonctionnent c.à.d.*

$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \Longleftrightarrow$ *au moins* k *coordonnées successives du vecteur* x *valent* 1

Donc on peut écire :

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= (x_1 x_2 ... x_k) \amalg (x_2 x_3 ... x_{k+1}) \amalg ... \amalg (x_{n-k+1} x_{n-k+2} ... x_n) \\
&= \coprod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} x_j = \max_{(1 \le i \le n-k+1)} \min_{i \le j \le (i+k-1)} (x_j).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.4. • *Si* $k = 1$: *Un système* **"1-consécutifs-sur n : G"** *est un système en parallèle.*

• *Si* $k = n$: *Un système* **"n-consécutifs-sur n : G"** *est un système en série*

Définition 2.1.6. ***(Composant utile)*** *Soit* Φ *une structure d'ordre* n, *le* $i^{ème}$ *composant est dit* ***inutile*** *à la structure* Φ *si la fonction* $\Phi(x)$ *est constante par rapport* *à la $i^{ème}$ coordonnée x_i du vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; c'est-à-dire :*

$$\Phi(1_i, x) = \Phi(0_i, x) \ \textit{pour tout vecteur} (\bullet_i, x)$$

Notons qu'un composant inutile ne peut jamais causer directement la panne d'un système. Comme exemple d'un tel composant on peut considérer un condensateur disposé en parallèle avec un dispositif électrique, son rôle est de couper les hauts voltages qui peuvent détruire le dispositif électrique. Donc bien qu'inutile, le condensateur peut être très important dans la durée de vie du dispositif électrique, c'est le cas d'un disjoncteur dans les compteurs électriques domestiques.

Lemme 2.1.1. ***(Décomposition pivotale)*** *Pour toute fonction de structure Φ d'ordre n, on a la décomposition suivante : pour tout x et pour tout i, $i = 1, 2, ..., n$.*

$$\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i) \Phi(0_i, x)$$

**Ce lemme précédent nous permet d'écrire la fonction de structure d'ordre n en fonction de la fonction de structure d'ordre $n - 1$.*

**En répétant cette opération plusieurs fois on obtient :*

$$\Phi(x) = \sum_y \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1 - y_j} \Phi(y)$$

la somme porte sur tous les vecteurs $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que $0^0 = 1$.

Démonstration :

x_i prend les valeurs 1 uo 0. Donc :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi(1_i, x) & \text{si } x_i = 1. \\ \Phi(0_i, x) & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

D'où :

$$\Phi(x) = 1_{\{1\}}(x_i) \Phi(1_i, x) + 1_{\{0\}}(x_i) \Phi(0_i, x)$$

Mais $1_{\{1\}}(x_i) = x_i$ et $1_{\{0\}}(x_i) = (1 - x_i)$, donc :

$$\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i)\Phi(0_i, x)$$

Exemple 2.1.1. *Soit la fonction de structure $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2) = x_1, x_2$. C'est la fonction de structure d'un système en série d'ordre 2. Alors on a la décomposition pivotale*

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2) &= x_1(1-x_1)^0 x_2(1-x_2)^0 1 + x_1(1-x_1)^0 x_2^0(1-x_2) 0 \\
&\quad + x_1^0(1-x_1) x_2(1-x_2)^0 0 + x_1^0(1-x_1) x_2^0(1-x_2) 0 \\
&= x_1, x_2
\end{aligned}$$

Définition 2.1.7. ***(Fonction Duale)*** *Si Φ est une fonction de structure d'ordre n, sa dual Φ^D est la fonction donnée par :*

$$\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1 - x), où\ 1 - x = (1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n).$$

Exercice 2.1.1. **Montrer qu' un système en parallèle d'ordre n est dual d'un sustème en série d'ordre n et réciproquement*

Montrer qu'une structure* *"k-sur-n : G"*** *est duale de la structure "**(n–k+1)-sur-n : G**".*

2.1.3 Structures cohérentes

Ici on s'intéresse aux systèmes dit «cohérents». Les conditions de cohérence consistent à écarter tout système physique dont l'état ne dépend pas des états de ses composants et qui fonctionne avec un composant eu panne et tombe eu panne après réparation de ce composant. En effet, un tel système ne présente aucun intérêt dans la pratique.

Définition 2.1.8. *Un système est cohérent si et seulement si :*

(i) $\Phi(x)$ est croissante par rapport à chaque coordonnée x_i, $i = 1, 2, ..., n$.

(ii) chaque composant est utile ; c'est à dire :

$$\forall i, \exists\left(\bullet_i, x\right);\ tq \quad \Phi\left(1_i, x\right)=1 \quad et \quad \Phi\left(0_i, x\right)=0.$$

Exercice 2.1.2. *Montrer que les systèmes en série, en parallèle et **k-sur-n : G"** sont cohérents.*

Théorème 2.1.1. *Soit Φ une structure cohérente d'ordre n, Alors :*
(i) $\Phi(0)=\Phi(0,0,...,0)=0$, *et* $\Phi(1)=\Phi(1,1,...,1)=1$.
(ii) $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \Phi(x) \leq \coprod\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Démonstration :

(i) chaque composant étant utile donc pour tout i, $i=(1,2,...,n)$ il existe un vecteur $(\bullet_i, x)$ tel que $\Phi\left(1_i, x\right)=1$ et $\Phi\left(0_i, x\right)=0$, comme Φ est croissante alors :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \Phi\left(0_i, x\right)=0 \qquad \text{c'est à dire : } \Phi(0)=0, \\ \Phi(1) &\geq \Phi\left(1_i, x\right)=1 \qquad \text{c'est à dire : } \Phi(1)=1, \end{aligned}$$

(ii) Supposons $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i=1$, Alors $x_1=x_2=...=x_n=1$,

Donc $\Phi(x)=1$; et par conséquent $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \Phi(x)$.

Supposons $\coprod\limits_{i=1}^{n} x_i=1-\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)=0$,Alors $x_i=0, \forall i,\ i=1,2,...,n$.

Donc $\Phi(x)=0$; et par conséquent $\Phi(x) \leq \coprod\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Théorème 2.1.2. *Soit Φ une fonction de structure cohérente alors :*

(i) $\Phi(x \amalg y) \geq \Phi(x) \amalg \Phi(y)$,
(ii) $\Phi(x.y) \leq \Phi(x).\Phi(y)$,
On a l'égalité dans (i) ssi la sructure est en parallèle.
On a l'égalité dans (ii) ssi la sructure est en série.

Démonstration :

(i) Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $x_i \amalg y_i \geq x_i$ et $x_i \amalg y_i \geq y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, et Φ étant croissante donc :

$$\Phi\left(x \amalg y\right) \geq \Phi(x) \quad \text{et} \quad \Phi\left(x \amalg y\right) \geq \Phi(y), \Longrightarrow$$

$$\Phi\left(x \amalg y\right) \geq \max\ \left(\Phi(x), \Phi(y)\right) = \Phi(x) \amalg \Phi(y)$$

(ii) $x_i.y_i \leq x_i$ et $x_i.y_i \leq y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, Donc $\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi\left(x\right)$ et $\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi\left(y\right)$,

$$\text{Il suit que} \quad \Phi\left(x.y\right) \leq \min\ \left(\Phi(x), \Phi(y)\right) = \Phi(x).\Phi(y).$$

* Si le système est en série alors :

$$\Phi\left(x.y\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i. \prod_{i=1}^{n} y_i = \Phi(x).\Phi(y).$$

Réciproquement si $\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi(x).\Phi(y)$, il est immédiat que la structure Φ est en série.

* Si le système est en parallèle alors :

$$\begin{aligned}
\Phi\left(x \amalg y\right) &= \coprod_{i=1}^{n} \left(x_i \amalg y_i\right) \ = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \left(x_i \amalg y_i\right)\right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - x_i\right)\left(1 - y_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - x_i\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - y_i\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \Phi(x)\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \Phi(y)\right) \\
&= \Phi(x) \amalg \Phi(y).
\end{aligned}$$

La réciproquement est immédiat.

2.1.4 Liens et coupes

Définition 2.1.9. ***(Lien)*** *Soit* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *le vecteur indiquant les états des composants* $C = (1, 2, ..., n)$*. Le vecteur* x *est dit vecteur-lien si et seulement si* $\Phi(x) = 1$*. L'ensemble corespondant* $C_1(x) = \{i\,;\, x_i = 1\}$ *s'appelle lien.*

Définition 2.1.10. ***(Lien minimal)*** *Un vecteur -**lien minimal** est un vecteur-lien* x *tel que si* $y < x$ *alors* $\Phi(y) = 0$*. L'ensemble* $C_1(x)$ *correspondant s'appelle lien minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système.*

Définition 2.1.11. ***(Coupe)*** *Un vecteur* x *est dite vecteur-coupe ssi* $\Phi(x) = 0$*. L'ensemble corespondant* $C_0(x) = \{i\,;\, x_i = 0\}$ *s'appelle coupe.*

Définition 2.1.12. ***(Coupe minimale)*** *Un vecteur -coupe minimal est un vecteur-coupe* x *tel que si* $y > x$ *alors* $\Phi(y) = 1$*. L'ensemble* $C_0(x)$ *correspondant s'appelle coupe minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont la panne entraine la panne du système.*

Remarque 2.1.5. *D'aprés les définitions précédantes on a :*

1. *le fonctionnement d'un seul lien minimal (le lien fonctionne si tous ses composants fonctionnent) assure le fonctionnement du système.*
2. *la panne d'une seule coupe minimale (une coupe est en panne si tous ses composants sont en panne) cause la panne du système*

2.1.5 Fonction de structure via les liens minimaux et les coupes minimale

La proposition suivante montre qu'on peut écrire la fonction de structure d'un système en fonction de ses liens minimaux et ses coupes minimales :

Proposition 2.1.1. *soit* Φ *une fonction du structure d'ordre* n *;*

1. *La formule de Φ en fonction des liens minimaux :*

$$\Phi(x) = \coprod_{j=1}^{d} \prod_{i \in L_j} x_i = \max_{1 \leq i \leq d} \min_{i \in L_j} x_i$$

où d est le nombre de liens minimaux.

2. *La formule de Φ en fonction des coupes minimales :*

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in C_j} x_i = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{i \in C_j} x_i$$

où k : est le nombre de coupes minimales.

Démonstration

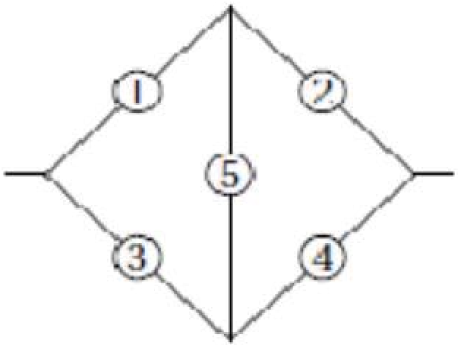
*Soit d le nombre de liens minimaux notés $L_1, L_2, ..., L_d$ alors au $j^{éme}$ lien minimal on peut associer la fonction de structure $\rho_j(x) = \prod_{i \in L_j} x_i = \min_{i \in L_j} x_i$, puisque dans un lien les composants sont disposés en série. Donc

$$\Phi(x) = \coprod_{j=1}^{d} \rho_j(x) = \coprod_{j=1}^{d} \prod_{i \in L_j} x_i = \max_{1 \leq i \leq d} \min_{i \in L_j} x_i$$

*Soit k le nombre de coupes minimales notés $C_1, C_2, ..., C_k$ alors à la $j^{éme}$ coupe minimale on peut associer la fonction de structure $k_j(x) = \coprod_{i \in C_j} x_i = \max_{i \in C_j} x_i$, puisque dans une coupe les composants sont disposés en parallèle. Donc

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^{k} k_j(x) = \prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in C_j} x_i = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{i \in C_j} x_i$$

Exemple 2.1.2. ***(Structure de pont)*** *Soit la structure suivante*



Structure de pont

- *Les liens minimaux sont les suivants :* $L_1 = \{\{1,2\}, L_2 = \{3,4\}, L_3 = \{1,5,4\}, L_4 = \{3,5,2\}\}$.
- *Les coupes minimales sont :* $C_1 = \{\{1,3\}, C_2 = \{2,4\}, C_3 = \{1,5,4\}, C_4 = \{3,5,2\}\}$

  D'aprés la proposition précédente, on peut écrire la fonction de structure en fonction des liens minimaux comme suivant :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \max_{1\le j\le 4}\min_{i\in L_j} x_i = 1-\prod_{j=1}^{4}\left(1-\prod_{i\in L_j} x_i\right)\\ &= 1-(1-x_1x_2)(1-x_3x_4)(1-x_1x_5x_4)(1-x_3x_5x_2).\end{aligned}$$

  Où en fonction des coupes minimales

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \min_{1\le i\le k}\max_{i\in C_j} x_i = \prod_{j=1}^{4}\coprod_{i\in C_j} x_i = \prod_{j=1}^{4}\left(1-\prod_{i\in C_j}^{4}(1-x_i)\right)\\ &= (1-(1-x_1)(1-x_3))(1-(1-x_2)(1-x_4))(1-(1-x_1)(1-x_5)(1-x_4))(1-(1-x\end{aligned}$$

Exercice 2.1.3. *Déterminer les coupes minimales et les liens minimaux des systèmes usuels précédents.*

2.1.6 Importance de structure des composants

Dans un système cohérent donné certains composants, de part leurs positions dans la configuration structurale de celui-ci, sont plus importants que d'autres dans le fonctionnement du système. Par exemple dans une structure en série ou en parallèle tous les composants ont la même importance.

Supposons connu le vecteur $(._i, x)$ *.Alors :*

$$si \;\; \Phi(1_i, x) = 1 \; et \;\; \Phi(0_i, x) = 0 \;, \; soit \;\; \Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = 1$$

On peut considérer le $i^{ème}$ *composant plus important que si on avait :*

$$\Phi(1_i, x) = 0 = \Phi(0_i, x) \; ou \;\; \Phi(1_i, x) = 1 = \Phi(0_i, x).$$

Dans le premier cas le $i^{ème}$ *composant détermine quant le système fonctionne ou non, alors que dans le dernier cas il n'est pas conséquent . Dans la première situation le vecteur* $(1_i, x)$ *est appelé "vecteur-lien critique" , pour le* $i^{ème}$ *composant et l'ensemble correspondant* $L_1(1_i, x)$ *s'appelle "lien critique" pour le* $i^{ème}$ *composant.*

Définition 2.1.13. *Dans une structure cohérente* Φ *l'importance de structure du* $i^{ème}$ *composant est donnée par :*

$$I_\Phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x, x_i = 1\}} [\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)]$$

* $n_\Phi(i) = \sum_{\{x;\; x_i=1\}} [\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)]$ *est le nombre de liens critiques pour le composant i, c'est aussi le nombre de vecteurs –liens critiques pour le composant i. le terme* 2^{n-1} *provient du fait qu'il y'a* 2^{n-1} *possibilités d'écrire le vecteur* $(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$

Remarque 2.1.6. * $I_\Phi(i)$ *est une proportion.*$(0 < I_\Phi(i) < 1)$

Exemple 2.1.3. *Soit le système* ***"k-sur-n : G" .***

on a $\Phi(x) = 1$ si et seulement si au moins k coordonnées du vecteur x valent 1, donc :

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = 1_{[x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n=k-1]},$$

Cela vaut 1 pour C_{n-1}^{k-1} valeurs de $(1_i, x)$, d'où : $I_\Phi\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}} C_{n-1}^{k-1}$, pour tout composant i.

** On peut vérifier que pour une structure en série ($k = n$) ou pour une structure en parallèle ($k = 1$) tous les composants ont la même importance de structure qui vaut : $I_\Phi\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$.*

Exercice 2.1.4. ** Soit la strucure de fonction : $\Phi(x) = x_1.(x_2 \amalg x_3)$ Montrer que*

$$I_\Phi\ (1) = \frac{3}{4}, I_\Phi\ (2) = \frac{1}{4} \text{ et (par symétrie) } I_\Phi\ (3) = \frac{1}{4}\ .$$

2.2 Propriétés des Systèmes Aléatoires

Ici on précise d'abord la notion de fonction de fiabilité d'un système cohérent, ensuite on établit ses propriétés importantes, on introduit aussi la notion de variables aléatoires « associées » très utilisé pour démontrer des inégalités sur la fiabilité des systèmes (ou sous-systèmes tels que liens minimaux et coupes minimales) à composants non indépendants.

2.2.1 Systèmes aléatoires à composants indépendants

On suppose que le système est formé de n composants indépendants, l'état du $i^{ème}$ composant est décrit par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p_i. On note $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ et $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ où les variables aléatoires X_i, $i = 1, 2, ..., n$, sont supposés indépendantes. Alors on a :

*La fiabilité du $i^{ème}$ composant est :

$$P[X_i = 1] = p_i = E(X_i)$$

* La fiabilité du système est donnée par :

$$P\left[\Phi\left(X\right)=1\right]=h=E\left[\Phi\left(X\right)\right].$$

Les composants du système étant supposés indépendants (les v.a X_i indépendantes,$\forall i$, $i=1,2,...,n$) alors on peut écrire :

$$h=h(p_1,p_2,\ldots p_n)=h(p)$$

* La fonction $h(p)$ s'appelle " **foction de fiabilité** " de la structure Φ.

* Lorsque $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$, on note également $h(p)$.

Remarque 2.2.1. *Dans le cas des systèmes à composants non indépendants on ne peut pas utiliser la notation $h(p)$ pour désigner la fonction de fiabilité parce que h ne dépend pas uniquement de $p_1,p_2,\ldots p_n$.*

Définition 2.2.1. ***(Importance moyenne ou en fiabilité)*** *Soit Φ une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants non nécessairement indépendants, alors l'importance moyenne (en fiabilité) du $i^{\text{ème}}$ composant est définie par :*

$$I_h\ (i)=E\left[\Phi\left(1_i,x\right)-\Phi\left(0_i,x\right)\right]\quad,\ pour\ \ i=1.2.3\ldots\ldots.n.$$

Définition 2.2.2. *Si Φ est une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, alors l'importance moyenne (en fiabilité) du $i^{\text{ème}}$ composant est donnée par :*

$$I_h\ (i)=\frac{\partial h(p)}{\partial p_i},\ \ pour\ \ i=1,2,...,n\ \ ;\ avec\ \ p=(p_1,p_2,\ldots p_n).$$

Proposition 2.2.1. *Dans le cas d'une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, les deux définitions précédentes sont équivalentes.*

Démonstration :

On peut écrire $h(p)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
h(p) &= P\left[\Phi\left(X\right)=1\right]=P\left[\left\{\Phi\left(X\right)=1\right\}\cap\left\{X_j=1\right\}\right]+P\left[\left\{\Phi\left(X\right)=1\right\}\cap\left\{X_j=0\right\}\right] \\
&= P\left[\Phi\left(X\right)=1/X_j=1\right]P\left[X_j=1\right]+P\left[\Phi\left(X\right)=1/X_j=0\right]P\left[X_j=0\right] \\
&= P\left[\Phi\left(1_j,X\right)=1\right]p_j+P\left[\Phi\left(0_j,X\right)=1\right]\left(1-p_j\right) \\
&= p_j h\left(1_j,p\right)+\left(1-p_j\right)h\left(0_j,p\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
I_h\ (i) &= E\left[\Phi\left(1_i,x\right)-\Phi\left(0_i,x\right)\right]=h\left(1_i,p\right)-h\left(0_i,p\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial p_i}\left[p_j\ h\left(1_i,p\right)+\left(1-p_i\right)\ h\left(0_i,p\right)\right] \\
&= \frac{\partial h(p)}{\partial p_i}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2. *On a :*

1. *$h(p)$ est un fonction multilinéaire. Si $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$, alors $h(p)$ est un polynôme en p.*

2. *Si $p_i=\frac{1}{2}$ pour tout i, $i=1,2,\ldots,n$, alors :*

$$I_h\ (i)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_x\left[\Phi\left(1_i,x\right)-\Phi\left(0_i,x\right)\right].$$

L'importance en fiabilité coïncide avec l'importance de structure.

3. *Si : $0<p_i<1$ pour tout i, $i=1,2,...,.n$, alors :*

$$0<I_h\ (i)<1.$$

Exemple 2.2.1. ***Structure "k-sur-n : G"*** *si les composants du système sont indépendants alors :*

** La fonction de fiabilité s'écrit :*

$$\begin{aligned} h(p) &= P\left[1_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \geq k} = 1\right] = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right] \\ &= \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_m}\left(1-p_{i_{m+1}}\right).....\left(1-p_{i_n}\right), \end{aligned}$$

la somme porte sur toutes les partitions $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *et* $\{i_{m+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *de l'ensemble* $\{1, 2, ...n\}$ *en deux ensembles disjoints où* $m \geq k$*.*

** L'importance en fiabilité du* $i^{\text{ème}}$ *composant est donnée par :*

$$I_h\ (i) = \frac{\partial h(p)}{\partial p_i} = \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_{k-1}}\left(1-p_{i_{k+1}}\right).....\left(1-p_{i_n}\right),$$

où $\{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\}$ *et* $\{i_{k+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *est une partition de l'ensemble* $\{1, 2, ..., i-1, i+1, ...n\}$

** Dans le cas ou les composants sont identiquement distribués c.à.d* $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ *alors :*

** La fonction de fiabilité s'écrit :*

$$\begin{aligned} h(p) &= P\left[\Phi\left(X\right)=1\right] = P\left[1_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \geq k} = 1\right] = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right] \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j \left(1-p\right)^{n-j} \end{aligned}$$

a) Lorsque k=1 (structure en parallèle) *alors :*

$$h(p) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) \ \text{ et } \ I_h\ (i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (1-p_j)$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$*, alors :* $I_h\ (1) < I_h\ (2) < \ldots < I_h\ (n)$*, le composant qui a la plus grande fiabilité est le plus important.*

***b) Lorsque k=n (structure en série)** alors* **:**

$$h(p) = \prod_{i=1}^{n} (p_i) \quad et\ I_h\ (i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (p_j)$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, *alors :* $I_h\ (1) > I_h\ (2) > ... > I_h\ (n)$, *le composant qui a la plus petite fiabilité est le composant le plus important.*

Théorème 2.2.1. *La fonction de fiabilité* $h(p)$ *d'une structure cohérente d'ordre* n *est strictement croissante pour* $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ *dans* $]0.1[^n$.

Démonstration :

On sait que : $h(p) = p_j\ h(1_j, p) + (1 - p_j)\ h(0_j, p)$, pour $1 \leq j \leq n$; donc :

$$\frac{\partial h(p)}{\partial p_i} = h(1_i, p) - h(0_i, p) = E\left[\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)\right].$$

Comme $\Phi(x)$ est une fonction croissante alors :

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x.$$

En outre il existe x^0 tel que $\Phi(1_i, x^0) - \Phi(0_i, x^0) = 1$, puisque chaque composant est utile, x^0 existe avec une probabilité strictement positive car $p \in\ ]0.1[^n$. On déduit donc :

$$E\left[\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)\right] > 0.$$

Par conséquent $h(p)$ est une fonction strictement croissante par rapport à chaque des coordonnées $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$.

Théorème 2.2.2. *Si* $h(p)$ *est la fonction de fiabilité d'une structure cohérente* Φ, *alors pour tout* p *et* $p' \in [0.1]^n$:

(i) $h(p \amalg p') \geq h(p) \amalg h(p')$,

(ii) $h(p.p') \leq h(p).\Phi(p')$,

On a l'égalité dans (i) si et seulement si la sructure Φ *est en parallèle.*

On a l'égalité dans (ii) si et seulement si la sructure Φ *est en série.*

Démonstration :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$; $X'_1, X'_2, ..., X'_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes avec $P[X_i = 1] = p_i$, $P[X'_i = 1] = p'_i$, alors :

(i)

$$h(p \amalg p') - h(p) \amalg h(p') = \sum_x \sum_{x'} [\Phi(x \amalg x') - \Phi(x) \amalg \Phi(x')] P[X = x] P[X' = x'] \geq 0,$$

car :

$$E[\Phi(x \amalg x')] - E[\Phi(x)] \amalg E[\Phi(x')] = E[\Phi(x \amalg x') - \Phi(x) \amalg \Phi(x')],$$

et on sait que : $\Phi(x \amalg x') \geq \Phi(x) \amalg \Phi(x')$; donc :

$$h(p \amalg p') \geq h(p) \amalg h(p').$$

(ii)

$$h(p.p') - h(p).h(p') = \sum_x \sum_{x'} [\Phi(x.x') - \Phi(x).\Phi(x')] P[X = x] P[X' = x'].$$

Or : $\Phi(x.x') \leq \Phi(x).\Phi(x')$; donc :

$$h(p.p') \leq h(p).\Phi(p').$$

* Si le système en parallèle alors : $\Phi(x \amalg x') = \Phi(x) \amalg \Phi(x')$, donc $h(p \amalg p') = h(p) \amalg h(p')$.

Réciproquememt, si $h(p \amalg p') = h(p) \amalg h(p')$, alors :

$$\sum_x \sum_{x'} [\Phi(x \amalg x') - \Phi(x) \amalg \Phi(x')] P[X = x] P[X' = x'] = 0.$$

et si p et $p' \in]0.1[^n$ alors $P[X = x] > 0$ et $P[X' = x'] > 0$, on a nécessairement : $\Phi(x \amalg x') = \Phi(x) \amalg \Phi(x')$, et par conséquent le système est en parallèle.

* On raisonne de la même façon pour $h(p.p') \leq h(p).\Phi(p')$. On conclue que le

système est en série

2.2.2 Système aléatoires à composants formant une Chaine de markov

On suppose que le système est formé de n composants indépendants, l'état du $i^{ème}$ composant est décrit par une variable aléatoire X_i. On note $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ où les variables aléatoires X_i, $i = 1, 2, ..., n$, forment une Chaine de Markov homogène c'est à dire l'état du $i^{ème}$ composant dépend seulement de l'état du $(i-1)^{ème}$ composant pour $i = 2, 3, ..., n$ Alors dans ce cas on définit les probabilités de transition suivantes :

- $p_{00} = P(X_i = 0/X_{i-1} = 0)$
- $p_{11} = P(X_i = 1/X_{i-1} = 1)$
- $p_{01} = 1 - p_{00} = P(X_i = 1/X_{i-1} = 0)$
- $p_{10} = 1 - p_{11} = P(X_i = 0/X_{i-1} = 1)$
- La loi initiale $(q_1, p_1) = (P(X_1 = 0), P(X_1 = 1))$ avec $q_1 = 1 - p_1$
- La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$

* La fiabilité du système est donnée par :

$$P[\Phi(X) = 1] = h = E[\Phi(X)].$$

et dans ce cas h dépend de q_1, p_1, p_{00} et p_{10}.

Exemple 2.2.2. *Calculer la fiabilité d'un système en série dont les composants forment une chaine de Markov homogène*

On a

$$\begin{aligned} h &= P[\Phi(X) = 1] = P\left[\min_{1 \le i \le n} X = 1\right] = P[X_1 = X_2 = ... = X_n = 1] \\ &= P[X_1 = 1] P[X_2 = 1/X_1 = 1] ....P[X_n = 1/X_{n-1} = 1] \\ &= p_1 p_{11} p_{11} ... p_{11} = p_1 (p_{11})^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 2.2.1. *Calculer la fiabilité et l'importance en fiabilité des composants pour les systèmes suivants*

** "2-consécutifs-sur-3 : F"*

** "2-consécutifs-sur-3 : G"*