

Processus Aléatoires et Fiabilité des Systèmes

Dr GHORAF NAMIRE

Département MI. Université Larbi Ben M'Hidi Oum EL Bouaghi.

Table des matières

1	Introduction à la fiabilité	5
1.1	Mesures de performances	5
1.2	Taux de hasard, de défaillance et de réparation	9
1.2.1	Les formules de base	9
1.2.2	Taux de défaillance monotone	12
1.2.3	Loi NBU	13
1.2.4	Deux familles de lois classiques en fiabilité	15
1.3	Exercices	18

Chapitre 1

Introduction à la fiabilité

La sûreté de fonctionnement : **(SDF)** aptitude d'une entité à satisfaire à une ou plusieurs fonctions requises dans des conditions données.

Définition de la fiabilité :

Aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant un intervalle de temps donné. Donc :

Fiabilité = ne pas avoir de défaillance.

Maintenabilité = être rapidement dépanné.

Disponibilité : être en état d'accomplir sa fonction.

1.1 Mesures de performances

On considère un matériel (une pompe, un composant électronique, une voiture. . .) pouvant se trouver dans différents états. Cet ensemble d'états est noté E . Dans tous les exemples que nous considérons, ce sera un ensemble fini. Il se décompose en deux sous-ensembles formant une partition :

L'ensemble M des états de marche.

L'ensemble P des états de panne

L'évolution du matériel dans le temps est décrite par un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeur dans E continue à droite et pourvu de limite à gauche en tout point.

La qualité du matériel, du point de vue sûreté de fonctionnement est donnée par un certain nombre d'indicateurs ou mesures de performance.

La liste de celles qui sont utilisées le plus couramment est donné ci-dessous :

Définition 1. *La disponibilité (availability en anglais) notée $D(t)$: la disponibilité du matériel à l'instant t est la probabilité pour que le matériel fonctionne à cet instant :*

$$D(t) = P(X_t \in M).$$

* Cette quantité est également appelée **disponibilité instantanée** à l'instant t , par opposition à **la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$** , qui désigne soit la proportion de temps pendant laquelle le matériel est en marche sur l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s \in M\}} ds$$

Soit l'espérance mathématique de cette dernière quantité, c'est-à-dire la moyenne de la disponibilité instantanée sur l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\frac{1}{t} \int_0^t D(s) ds.$$

* Nous appelons disponibilité asymptotique et nous la notons $D(\infty)$, la limite, lorsque t tend vers l'infini, de la disponibilité à l'instant t (quand cette limite existe) :

$$D(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D(t)$$

c'est donc également la limite, quand t tend vers l'infini de $\frac{1}{t} \int_0^t D(s) ds$.

Définition 2. *L'indisponibilité à l'instant t est la probabilité que le système soit*

en panne à cet instant :

$$\tilde{D}(t) = P(X_t \in P) = 1 - D(t)$$

* L'**indisponibilité asymptotique** est la limite, lorsque t tend vers l'infini, de l'indisponibilité à l'instant t (quand cette limite existe) :

$$\tilde{D}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{D}(t) = 1 - D(\infty).$$

Définition 3. La fiabilité (reliabilty) $R(t)$ du matériel à l'instant t est la probabilité que le matériel soit en fonctionnement sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$R(t) = P(X_s \in M, \forall s \in [0, t]).$$

Définition 4. La défiabilité $\tilde{R}(t)$ à l'instant t est la probabilité que le matériel ait une panne pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.

* Soit $T = \inf \{s \geq 0 : X_s \in P\}$ la première durée de bon fonctionnement du matériel, et F la fonction de répartition de la variable aléatoire T , nous avons :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$$

$$\tilde{R}(t) = 1 - R(t) = P(T \leq t) = F(t).$$

* L'inégalité $R(t) \leq D(t)$ est toujours vérifiée. Remarquons que lorsque le matériel n'est pas réparable (ce qui revient à dire que l'ensemble des états de pannes est absorbant). nous avons $R(t) = D(t)$. Cette remarque évidente permet de ramener un calcul de fiabilité à un calcul de disponibilité.

Définition 5. (Maintenabilité) Si on remplace l'ensemble M par l'ensemble P , la quantité duale de la fiabilité est la **démaintenabilité**, \tilde{M} :

$$\tilde{M}(t) = P(X_s \in P, \forall s \in [0, t]).$$

tandis que la **maintenabilité** est la probabilité que la réparation du matériel soit

achevée avant l'instant t , ces notions de maintenabilité et de démaintenabilité n'étant utilisées que lorsque le matériel est en panne à l'instant initial

$$M(t) = 1 - \widetilde{M}(t) = P(\exists s \in [0, t], X_s \in M) \quad \text{lorsque } X_0 \in P.$$

Examinons maintenant les différentes durées moyennes :

Définition 6. * Le **MTTF** (Mean Time To Failure) est la durée moyenne de bon fonctionnement :

$$MTTF = E(T) = \int_0^{+\infty} p(T > t) dt.$$

* Le **MTTR** (Mean Time To Repair) est la durée moyenne de réparation. Elle n'est pas en général définie que si le matériel est en panne à l'instant initial, et :

$$MTTR = \int_0^{+\infty} \widetilde{M}(t) dt \quad \text{lorsque } X_0 \in P.$$

Lorsque le matériel considéré est réparable, le matériel passe par des périodes successives de marche et de panne. Notons M_n (respectivement P_n) la durée de la $n^{\text{ème}}$ période de bon fonctionnement (respectivement de réparation).

Définition 7. *Le **MUT** (Mean Up Time) est la durée moyenne de fonctionnement sans panne " en asymptotique" dans le sens où :

$$MUT = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(M_n).$$

lorsque cette limite existe,

* tandis que le **MDT** (Mean Down Time) est la quantité duale :

$$MDT = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(P_n).$$

lorsque cette limite existe.

* Le **MTBF** (Mean Time Between Failure) est la durée moyenne qui sépare deux

défaillances “ en asymptotique ” (au sens précédent), c’est-à-dire :

$$\text{MTBF} = \text{MUT} + \text{MDT}.$$

1.2 Taux de hasard, de défaillance et de réparation

Dans ce paragraphe nous considérons une variable aléatoire positive T de fonction de répartition F et nous posons $\bar{F} = 1 - F$.

1.2.1 Les formules de base

Nous commençons par supposer que la loi de T admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ .

Définition 8. On appelle **taux de hasard** de la variable aléatoire T , la fonction :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} & \text{si } \bar{F}(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{F}(t) = 0 \end{cases}$$

La fonction f n’est définie qu’à une équivalence près (relativement à la mesure de Lebesgue), il en est donc de même pour le taux de hasard h . cependant, dans la plupart des applications, la variable T admet pour densité une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* .

* Si T représente la durée de fonctionnement sans défaillance d’un matériel, la fonction h s’appelle le **taux de défaillance** du matériel et se note λ .

* Si T représente la durée de réparation, h est appelée le **taux de réparation** et se note μ .

La terminologie de “**taux**” est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. Supposons que la variable aléatoire T admette une densité f qui soit continue sur \mathbb{R}_+^* . Alors, pour tout $t > 0$ tel que $P(T > t) > 0$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t).$$

Démonstration : il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta}.$$

et que $F' = f$ puisque f est continue.

Proposition 1.2.2. *Supposons que T admette une densité f qui soit continue sur \mathbb{R}_+^* , et soit $A = \{t > 0 : \bar{F}(t) \neq 0\}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall t \in A, h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$
2. $\forall t \in A, h(t) = (-\log \bar{F}(t))'$
3. $\forall t \in A, \bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$
4. $\forall t \in A, f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$.

Démonstration : La condition 1 équivaut à $h(t) = \frac{-\bar{F}(t)'}{\bar{F}(t)}$, d'où l'équivalence entre 1 et 2. L'équivalence entre les conditions 2 et 3 est immédiate en utilisant le fait que $\bar{F}(0) = 1$. L'implication 3 \implies 4 s'obtient par dérivation et 4 \implies 3 par intégration en remarquant que 4 s'écrit :

$$-\bar{F}(t)' = -\left[\exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)\right]'$$

Proposition 1.2.3. *La variable aléatoire T a pour taux de hasard h si et seulement si, pour tout t positif :*

$$P(T > t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right).$$

Démonstration : Supposons que T ait pour taux de hasard h , alors on a :

$$P(T \leq t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t P(T > s) h(s) ds.$$

Nous en déduisons que la fonction $z(t) = P(T > t)$ est solution de l'équation intégrale :

$$z(t) = 1 - \int_0^t z(s)h(s)ds .$$

Où cette équation admet une et une seule solution $t \rightarrow z(t)$ qui soit bornée sur tout compact, et cette solution est :

$$z(t) = \exp \left(- \int_0^t h(s)ds \right) .$$

Réciproquement, supposons que $P(T > t) = \exp \left(- \int_0^t h_0(s)ds \right)$ pour une certaine fonction h_0 . En utilisant la condition nécessaire que nous venons de démontrer, nous voyons que :

$$\int_0^t h(s)ds = \int_0^t h_0(s)ds \quad \forall t,$$

et par conséquent $h = h_0$ presque-partout (relativement à la mesure de Lebesgue).

Nous allons déduire deux corollaires de cette proposition. Le premier n'est qu'une ré-écriture de la proposition (1.2.3) avec la terminologie de la fiabilité.

Corollaire 1.2.1. *La fiabilité d'un matériel de taux de défaillance λ est :*

$$R(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s)ds \right)$$

Le second corollaire est une manière d'exprimer le fait que la loi exponentielle est la seule loi avec densité qui soit sans mémoire.

Corollaire 1.2.2. *La variable aléatoire T a un taux de hasard constant égale à c si et seulement si T est de loi exponentielle de paramètre c .*

Si la variable aléatoire T désigne la durée de bon fonctionnement d'un matériel, un taux de défaillance constant signifie que le matériel ne vieillit pas (et ne rajeunit pas non plus!).

1.2. TAUX DE HASARD, Taux de défaillance et fonction de fiabilité

Il est couramment admis que la courbe du taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$ d'un matériel est une courbe en baignoire (cf figure ci-dessous).

Pendant une première période, le taux de défaillance est décroissante, c'est la période de déverminage ou de rodage ou encore de jeunesse, puis le taux de défaillance est approximativement constant, c'est la période de « vie utile », enfin dans une troisième phase le taux de défaillance est croissant, c'est la période de vieillissement ou d'usure.

1.2.2 Taux de défaillance monotone

Nous supposons ici que la variable aléatoire T possède une densité et représente la durée de fonctionnement d'un matériel, nous parlerons donc de taux de défaillance au lieu de hasard et nous le noterons $\lambda(t)$ au lieu de $h(t)$.

* Une variable aléatoire ou une loi est dite **IFR** (increasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction croissante.

* Elle est dite **DFR** (Decreasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction décroissante.

Définition 1.2.1. on appelle durée de survie à la date t , une variable aléatoire τ_t dont la loi est donnée par :

$$P(\tau_t > x) = P(T - t > x / T > t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}.$$

Proposition 1.2.4. On suppose f continue, donc \bar{F} dérivable, alors :

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T est I F R,
- $\log \bar{F}$ est concave,
- $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)}$ est décroissante,
- $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow p(\tau_t > a)$ est décroissante.

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T est D F R,
- $\log \bar{F}$ est convexe,

- $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)}$ est croissante,
- $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow p(\tau_t > a)$ est croissante.

Proposition 1.2.5. Posons $a_n = \frac{E(T^n)}{n!}$ pour $n \geq 0$. soit n tel que les quantités a_{n-1}, a_n, a_{n+1} soient finies, nous avons :

- si T est I F R alors $a_{n-1}a_{n+1} \leq a_n^2$,
- si T est D F R alors $a_{n-1}a_{n+1} \geq a_n^2$.

Le coefficient de variation d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité d'espérance μ et de variance σ^2 est le quotient $\frac{\mu}{\sigma}$. Cela peut s'interpréter comme la version aléatoire de la notion d'erreur relative

Corollaire 1.2.3. Soit T une variable aléatoire de carré intégrable :

- si T est I F R alors $\frac{\mu}{\sigma} \leq 1$,
- si T est D F R alors $\frac{\mu}{\sigma} \geq 1$.

1.2.3 Loi NBU

La variable aléatoire T (ou sa loi) est **NBU** (New Better than Used) si pour tous s et t :

$$\bar{F}(t+s) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(s),$$

Ce qui équivaut, en notant

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du.$$

Le taux de défaillance cumulé, à la sur-additivité de la fonction Λ :

$$\forall s, t \geq 0 \quad \Lambda(t+s) \geq \Lambda(t) + \Lambda(s).$$

La terminologie est due au fait que, pour tout $t > 0$, la durée de survie τ_t à la date t est stochastiquement inférieure à la durée initiale T , au sens où :

$$\forall s \geq 0 \quad P(\tau_t > s) \leq P(T > s).$$

Proposition 1.2.6. *tout loi I F R est NBU.*

Démonstration : La sur-additivité de la fonction Λ s'écrit :

$$\forall s, t \geq 0 \quad \int_t^{t+s} \lambda(u) du \geq \int_0^s \lambda(u) du.$$

Or, si λ est croissante, on a :

$$\int_t^{t+s} \lambda(u) du = \int_0^s \lambda(t+u) du \geq \int_0^s \lambda(u) du.$$

Notons $\lambda(\infty)$ le **taux de défaillance asymptotique**, c'est-à-dire :

$$\lambda(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t).$$

lorsque cette limite existe.

Proposition 1.2.7. *(approximation exponentielle) Si T est NBU, si λ est bornée (hors d'un voisinage de 0) et si $\lambda(\infty)$ existe, alors :*

$$P(T > t) \geq e^{-\lambda(\infty)t}$$

Démonstration : Nous avons vu que, dans le cas NBU, pour tous s et t :

$$\int_0^t \lambda(u) du \leq \int_0^t \lambda(s+u) du.$$

En faisant tendre s vers l'infini, nous obtenons :

$$\int_0^t \lambda(u) du \leq \lambda(\infty) t.$$

d'où le résultat.

ce résultat fournit une approximation exponentielle de la fiabilité qui est pessimiste.

1.2.4 Deux familles de lois classiques en fiabilité

La loi gamma

Soit α et β deux réels strictement positifs. La loi gamma de paramètres (α, β) est la loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ , la fonction Γ étant définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Le paramètre α est le paramètre de forme et β le paramètre d'échelle.

Nous résumons les principales propriétés de la loi gamma dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.8.

1.(a) pour $0 < \alpha < 1$, la loi gamma de paramètres (α, β) est D F R et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\beta}.$$

(b) pour $\alpha > 1$, la loi gamma de paramètres (α, β) est I F R et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\beta}.$$

2. Soit T une variable aléatoire de loi de gamma de paramètres (α, β) , alors :

$$E(T) = \alpha\beta, \quad \text{var}(T) = \alpha\beta^2,$$

$$E(e^{-sT}) = \frac{1}{(1+\beta s)^\alpha}, \quad E(e^{iuT}) = \frac{1}{(1-i\beta u)^\alpha}.$$

3. Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de gamma de paramètres respectifs (α_1, β) et (α_2, β) . alors $T_1 + T_2$ est de loi de gamma de paramètres $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

La famille des lois gamma contient des lois connues. La loi gamma de paramètres :

1.2. TAUX DE HASARD, DE DÉFAILLANCE ET DE RÉPARATION

- $\alpha = 1$ et β est la **loi exponentielle** de paramètre $\frac{1}{\beta}$.
- $\alpha = n$ et $\beta = \frac{1}{\lambda}$ est la **loi d'Erlang** d'ordre n et de paramètre λ (loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ),
- $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = 2$ est la **loi du χ^2** à n degrés de liberté (loi de la somme des carrés de n variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée de variance 1).

La loi de weibull

Donnons-nous trois paramètres α , β et θ , les deux premiers étant strictement positifs, le troisième étant positif ou nul. La loi de densité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t - \theta}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t - \theta}{\alpha} \right)^\beta \right\}.$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[\theta, +\infty[$ est la **loi de weibull** de paramètres (α, β, θ) .

Le paramètre α est le paramètre d'échelle, β le paramètre de forme et θ le paramètre de translation.

Remarquons que le cas $\beta = 1$ et $\theta = 0$ correspond à la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha}$.

Nous ne considérons ici que le cas $\theta = 0$ et nous parlerons alors de la loi de weibull de paramètres (α, β) .

Proposition 1.2.9. *Soit T variable aléatoire de loi de weibull de paramètres (α, β) , Notons h son taux de hasard.*

1. Alors :

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}, \quad p(T > t) = \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right\},$$

$$E(T) = \alpha \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right), \quad \text{var}(T) = \alpha^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right],$$

2. La variable aléatoire $(\frac{T}{\alpha})^\beta$ est de loi exponentielle de paramètre 1.

La loi de weibull est très utilisée en fiabilité. La première raison est que cette loi est apparue “ expérimentalement ” lors d’études sur le taux de défaillance de matériels. Notons λ le taux de défaillance du matériel étudié et Λ son taux de défaillance cumulé :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

J. Duane a constaté que $\log \Lambda(t)$ était approximativement une fonction linéaire de $\log t$.

On peut également considérer que le théorème des valeurs extrêmes fournit une explication mathématique au fait que cette loi se rencontre “ dans la nature ”.

Théorème 1.2.1. (extrait du théorème des valeurs extrêmes) *Considérons des variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ indépendantes de même loi de fonction de répartition F . Supposons qu’il existe :*

- un réel x_0 pour lequel $F(x_0) = 0$ et $F(x) > 0$ pour tout $x > x_0$,
- un réel $\beta > 0$ tel que, pour tout $x > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt + x_0)}{F(t + x_0)} = x^\beta.$$

Alors il existe des suites de réels a_n et b_n ($a_n > 0$) telles que la suite de variable aléatoire :

$$Z_n = \min_{1 \leq k \leq n} (a_n X_k + b_n).$$

converge en loi, lorsque n tend vers l’infini, vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme β .

La variable Z_n peut représenter la durée de vie d’un matériel décomposé en n éléments, le matériel étant défaillant dès que l’un des éléments le constituant est défaillant (imaginer par exemple un câble découpé “virtuellement” en n tronçons).

Exemple 1.2.1. Si les X_k sont de loi de gamma de paramètres de forme α , alors Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme

α . En effet, $x_0 = 0$ et en appliquant la formule généralisée des accroissements finis (règle de L'hôpital), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt) - F(0)}{F(t) - F(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{xf(xt)}{f(t)} = x^\alpha.$$

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1. On considère un système formé de n composants indépendants et non réparables. On suppose que le taux de défaillance de chaque composant est constant .

Donner la formule de la fiabilité du système en fonction des fiabilités de ses composants et calculer et étudier (IFR et DFR) le taux de défaillance du système dans les deux cas suivants

* Cas d'un système en série

* Cas d'un système en parallèle

Exercice 1.3.2. On considère un système " k -sur- n : G " dont les composants sont indépendants, identiques et non réparables. Donner la formule de la fiabilité du système.

Bibliographie

- [1] Christiane Cocozza-Thivent, "Processus stochastiques et fiabilité des systèmes"
Mathématiques & Applications 28 , Springer, SMAI. ISBN 978-3-540-63390-7,
ISSN 1154-483X, (1997).