II- Représentation d’écoulements potentiels 2D par le potentiel complexe

Le potentiel complexe de vitesse permet l’écriture du champs de vitesse dans un plan complexe afin de réduire le nombre de variables et en les remplaçant par des variables complexes.

Cette technique permet de transformer la solution pour un écoulement potentiel autour d’un corps simple (ex : disque, cylindre, sphère etc..) en une solution pour un écoulement plus complexe autour d’un corps de forme difficile (ex : aile, aube, roue,etc..).

Sachant que : $U = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad V = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Soit le potentiel complexe suivant :

$f(z) = \phi + i\Psi$, avec ϕ la partie réelle et Ψ la partie imaginaire et pour la variable spatiale $z = x + iy$

Pour un écoulement complexe, il peut ètre décomposé en plusieurs écoulements simples sous la forme : $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U - iV$$

Cette fonction peut s’écrire sous forme exponentielle : $\frac{df(z)}{dz} = |\vec{V}|e^{-i\theta}$,

avec θ est l’angle d’inclinaison du vecteur vitesse sur l’axe x.

1- Ecoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$f(z) = f_0.z$, la vitesse complexe partout dans l’écoulement sera égale à $\frac{df(z)}{dz} = f_0$

En posant :

$f_0 = U_0 e^{-i\theta}$ avec U_0 est le module du vecteur vitesse et θ est appelé angle d’attaque par rapport à x.

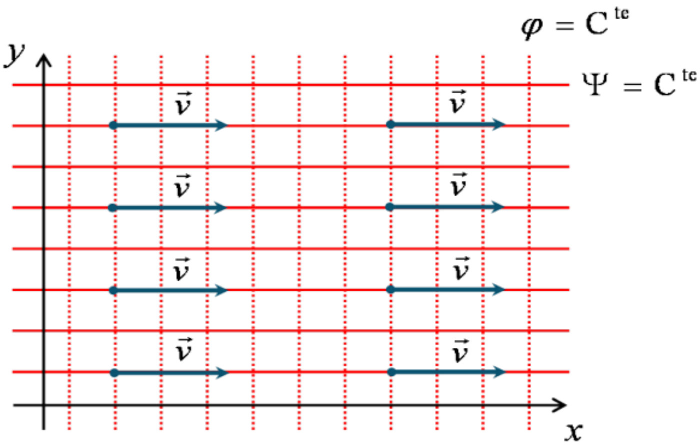
Par identification des parties réelle et imaginaire avec respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant, on obtient :

$$f(z) = U(x+iy) = \varphi + i\Psi \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi(x,y) = Ux \\ \Psi(x,y) = Uy \end{array}$$

Les lignes de courant sont alors définies par $\Psi = \text{Cte} \Leftrightarrow Uy = \text{Cte}$, d'où $y = \text{Cte}\ \forall x$: il s'agit donc de droites horizontales (toutes parallèles à l'axe x). Tandis que les équipotentielles sont définies par $\varphi = \text{Cte} \Leftrightarrow Ux = \text{Cte}$, d'où $x = \text{Cte}\ \forall y$: il s'agit alors de droites verticales (toutes parallèles à l'axe y).

Le champ du vecteur vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U$$
$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$



2- Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = C \ln z$$

où C est une constante réelle.

Pour faciliter l'étude, il vaut mieux utiliser les coordonnées cylindriques(r, θ, h) ; ainsi : $z = r e^{i\theta}$ et $f(z) = C \ln(r e^{i\theta}) = C \ln r + i C\theta = \varphi + i\Psi$, où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\varphi(r, \theta) = C \ln r$$
$$\Psi(r, \theta) = C\theta$$

Les lignes de courant sont $\Psi(r, \theta) = C\theta = \text{Cte} \Rightarrow \theta = \text{Cte} \; \forall r$

Ce sont donc des droites passant toutes par l'origine O

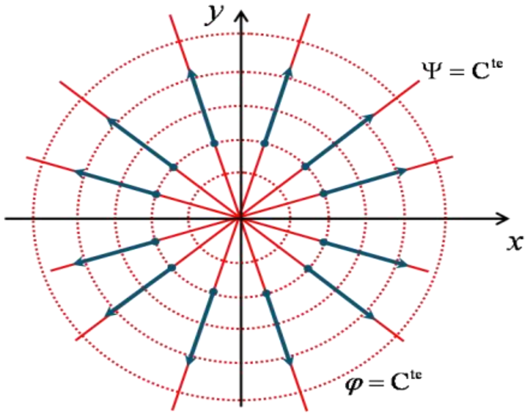
Les équipotentielles doivent vérifier que $\varphi(r, \theta) = C \ln r = \text{Cte} \Rightarrow r = \text{Cte} \; \forall \theta$:

Il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine O. On vérifie bien que les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de courant.

Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\left.\begin{array}{l} v_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ v_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} v_r=\dfrac{C}{r} \\ v_\theta=0 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \vec{v}=\frac{C}{r}\vec{e}_r$$

On a donc un **écoulement radial**, centré sur l'origine du repère inversement proportionnelle à la distance du centre.



On remarquera que selon le signe de la constante C, l'écoulement peut être divergent ou convergent

- si $C>0$ l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une **source à l'origine** ;
- si $C<0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un **puits à l'origine.**

La signification physique de la constante C est en rapport avec le débit généré par cette source ou ce puits. Pour s'en rendre compte, calculons le débit volumique de l'écoulement radial à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r, et de hauteurΔz. L'écoulement ayant lieu à travers la surface latérale du cylindre, on peut calculer :

$$q_V=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\vec{v}\cdot\vec{n}\,r\,\mathrm{d}\theta\,\Delta z \;; \quad \vec{n}=\vec{e}_r \quad \vec{v}=C/r\,\vec{e}_r\,.$$

On obtient donc :$q_v = 2\pi C$

$$q_V=\int_0^{2\pi}\frac{C}{r}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi C\;\forall r$$

Ainsi, indépendamment du cylindre choisi, la constante C est égale, à 2π près, au débit généré par la source ou le puits. C'est la raison pour laquelle on formule communément l'écoulement généré par un puits $q_v< 0$ ou une source $q_v> 0$par :

$$f(z)=\frac{q_V}{2\pi}\ln z$$

où q_v est le débit volumique par unité de hauteur de l'écoulement plan (en $m^2 . s^{-1}$).

***Cette formulation est valable pour un puits ou une source centré à l'origine du repère. On peut trouver un écoulement centré en un point autre que l'origine, de coordonnées $z_0 = x_0 + iy_0$, donc

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0)$$
.