ECOULEMENTS POTENTIELS

I- Définition des écoulements potentiels :

L'écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait (non visqueux) incompressible.

En effet si le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \vec{0}$, il existe un vecteur potentiel $\vec{A}$ dont dérive le vecteur vitesse , c'est-à-dire $\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ (voir fonction de courant ou potentiel vecteur)

Et d'un autre coté ce même vecteur vitesse dérive d'un potentiel **scalaire**, qu'on peut définir par une fonction potentielle ϕ définie par :$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$

en sachant que le rotationnel de $\vec{\nabla}\emptyset$ est nul car l'écoulement est irrotationnel :

par équation de continuité nousavons: $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0,$ donc:

$$\overrightarrow{rot}V = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\nabla\phi}) = 0$$

$donc$: $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\emptyset = 0$

Pour un écoulement 2D, on aura :

u = $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et v = $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ce qui implique que : u = $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et v = $-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

c'est l'équation des lignes potentielles définies par la fonction potentielle ϕ.

Un écoulement est qualifié d'irrotationnel lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotation pure, autrement dit quand le tenseur des rotations pures, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tout point de l'écoulement , donc:

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} = \bar{\bar{0}} \quad ou\ en\ d'autres\ termes: \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Puisque le vecteur tourbillon n'est autre que le rotationnel du vecteur vitesse

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Il en résulte qu'un écoulement irrotationnel doit vérifier : $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

La vitesse s'exprime en fonction des dérivées partielles du potentiel des vitesses :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sur la base des mêmes hypothèses que celles posées pour définir la fonction de courant, supposons que l'écoulement est conservatif, en plus d'être irrotationnel : dans ces conditions, on doit vérifier l'équation de continuité: $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$; ce qui conduit à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta\phi = 0$$

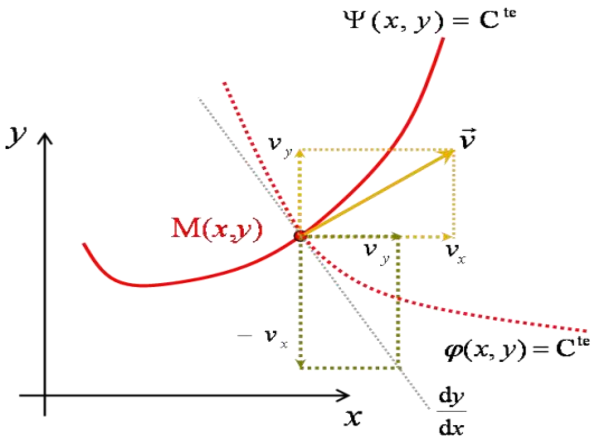
On en conclut que le potentiel des vitesses doit vérifier l'équation de *Laplace* $\Delta\phi = 0$.

Remarque :

Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de *Laplace*. En effet, on a :

$$\vec{\nabla}\otimes\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial y \\ -\partial\psi/\partial x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad donc \quad \Delta\psi = 0$$

Propriétés du potentiel des vitesses :



Au sein d'un écoulement plan, l'équation d'une courbe de potentiel constant définit une ligne qu'on nomme **« équipotentielle »**.

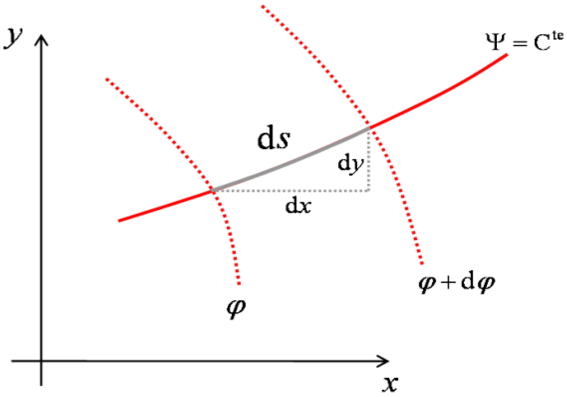
Le potentiel des vitesses étant constant le long d'une telle courbe, on doit vérifier : $d\phi = 0$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0 \quad or, \quad v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \;\; et \; v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

d'où : $v_x dx + v_y dy = 0$ devant être vérifiée en tout point de l'équipotentielle. Autrement formulée, on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}$$

En chacun de ses points, la courbe est orthogonale (⊥) au vecteur vitesse (voir **figure précédente**). Il en résulte aussi que **les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de courant**.



La signification physique de ces équipotentielles se comprend à travers le calcul de la longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant entre deux équipotentielles. Si les deux équipotentielles sont infiniment proches, on peut considérer que leurs deux constantes respectives diffèrent d'une quantité élémentaire dϕ (l'une est ϕ, l'autre ϕ+dϕ). Si on note ds la longueur de l'élément d'arc, il peut se décomposer en $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Par ailleurs, on a déjà établi que : $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy =: v_x dx + v_y dy$,

avec localement le long de la ligne de courant (dψ=0) : $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$,

d'où dy = $\frac{v_y}{v_x} dx$ et donc: $d\phi = v_x dx + \frac{v_y^2}{v_x} dx = \frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x} dx = \frac{v^2}{v_x} dx$. On obtient de même

$d\phi == \frac{v^2}{v_y} dy$, et on en déduit que : $dx = \frac{v_x}{v^2} d\phi \quad et\ dy = \frac{v_y}{v^2} d\phi$

Ainsi, la longueur de l'élément d'arc se reformule :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{v_x}{v^2} d\phi\right)^2 + \left(\frac{v_y}{v^2} d\phi\right)^2} = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{v^4} d\phi^2} \qquad soit \qquad ds = \frac{d\phi}{v}$$

Ce résultat permet de définir la distance entre deux équipotentielles qui est inversement proportionnelle à la vitesse locale de l'écoulement. Donc, un resserrement de ces lignes traduit une accélération de l'écoulement, et à l'inverse, un espacement plus grand traduit une décélération.