Chapitre III

Résolution des systèmes d'équations non linéaires
-Méthode de Newton-

Objectif du chapitre :

Définir la :

- ✓ ***Méthode de Newton pour la résolution d'une équation non linéaire***
- ✓ ***Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaires***

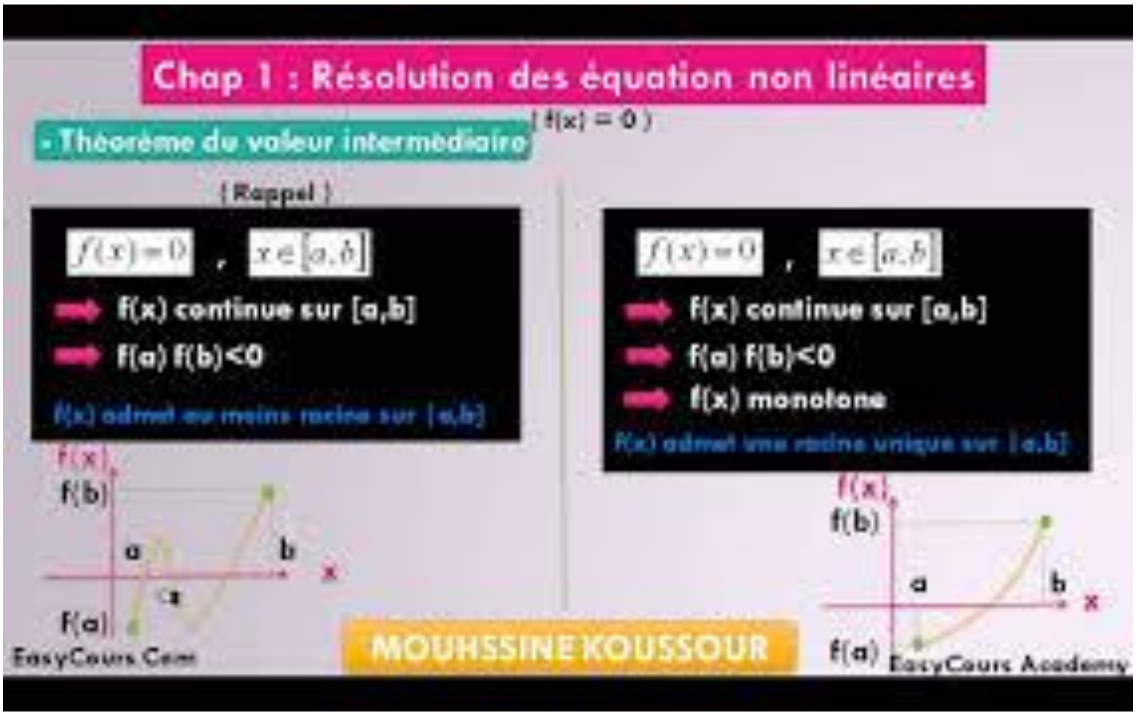
Introduction

La non linéarité est la particularité, en mathématiques, de systèmes dont le comportement n'est pas linéaire, c'est-à-dire soit ne satisfaisant pas le principe de superposition, soit dont la sortie n'est pas proportionnelle à l'entrée.

Pour résoudre des équations non linéaires, plusieurs méthodes sont à la disposition telles que ,

- ✓ *Méthode de la bissection*
- ✓ *Méthode de la sécante*
- ✓ *Méthode du point fixe*
- ✓ *Méthode de Newton appelée aussi méthode de Newton-Raphson ou méthode des tangentes.*

I. Théorème des valeurs intermédiaires



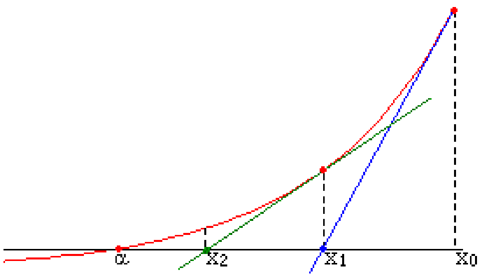
Théorème des valeurs intermédiaires *Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I; s'il existe a et b dans I tels que f(a)f(b) < 0 alors il existe au moins une solution de f(x) = 0 dans]a, b[. De plus si f est strictement monotone sur]a, b[cette solution* est *unique.*

II. Méthode de Newton pour la résolution d'une équation

II.1. Principe

La méthode consiste à introduire une suite (x_n) d'approximation successives de l'équation f (x) = 0 telle que f : [a, b] → ℝ et x_0 : valeur initiale.

- ✓ On part d'un x_0 proche de la solution.
- ✓ A partir de x_0, on calcule un nouveau terme x_1 de la manière suivante :
  - ➲ on trace la tangente de la courbe en x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 comme indiqué sur le figure ci-dessous.
  - ➲ On réitère ce procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1 , puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite ... .



Notons x^* la solution de l'équation f(x) = 0 ; f(x) est une fonction continûment dérivable, alors par développement en série de Taylor on aura :

$$f(x^*) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)(x^* - x^{(k)})$$

II.2. Formule de récurrence

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}$$

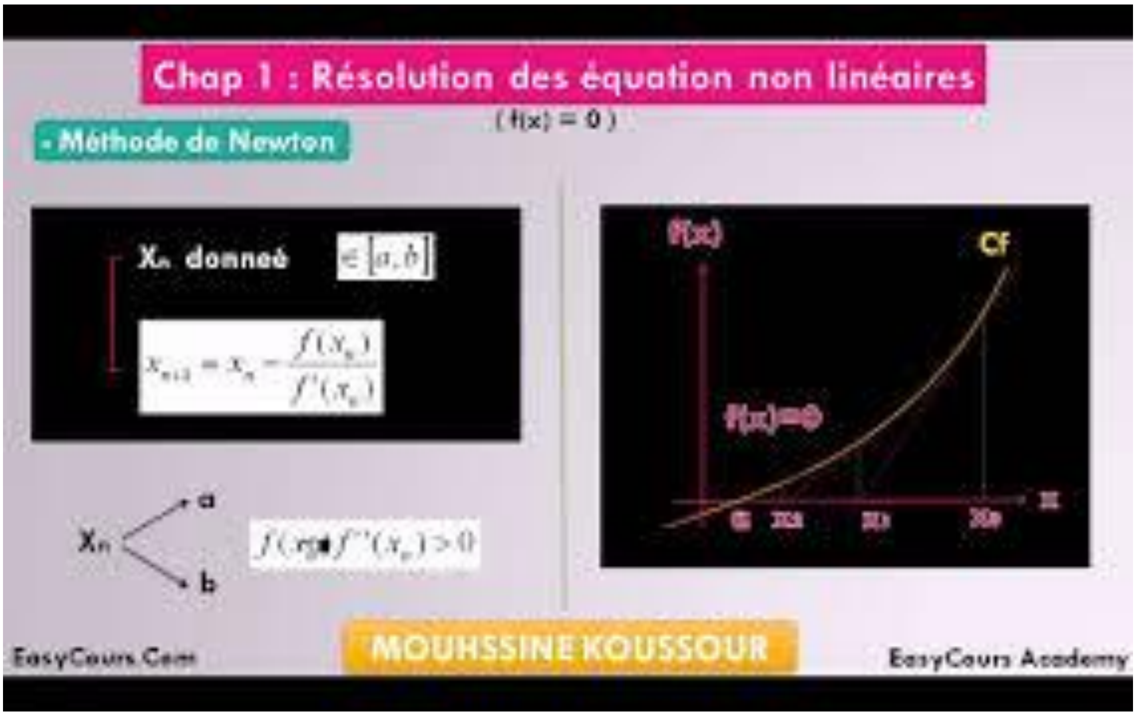
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

II.3. Choix de x_0



$x_0 \in [a, b]$

x_0 peut prendre les valeurs a ou b et doit vérifier $f(x_0)f''(x_0) > 0$

III. Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations

III.1. Principe

Le principe est le même que celui appliqué pour une équation ; il s'applique donc à toutes les équations du système.

Soit le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Notons $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^t$ le vecteur solution du système ; le développement en série de Taylor est le suivant, dans le voisinage d'un estimé $X^{(k)}$ proche de X^*.

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X^*)(x_1^* - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X^*)(x_2^* - x_2^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X^*)(x_n^* - x_n^{(k)}) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X^*)(x_1^* - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X^*)(x_2^* - x_2^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X^*)(x_n^* - x_n^{(k)}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X^*)(x_1^* - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X^*)(x_2^* - x_2^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X^*)(x_n^* - x_n^{(k)}) = 0 \end{cases}$$

qu'on peut écrire :

$$\boxed{f_i(X^*) = f_i(X^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\Big|_{X = X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = 0} \qquad i = 1, \dots, n$$

- On aura alors :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\Big|_{X = X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = -f_i(X^{(k)})} \qquad (1)$$

- Définissons la matrice Jacobienne $M^{(k)}$ tq :

$$\boxed{M_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\Big|_{X = X^{(k)}}} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots n \\ j = 1, \dots n \end{matrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Définissons le vecteur d'erreur $\delta X^{(k)}$ par :

$$\boxed{\Delta x_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)}}$$

et le vecteur $F^{(k)}$ par :

$$\boxed{F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})}$$

La relation matricielle (1) s'écrit :

$$\boxed{M^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)} = F^{(k)}}$$

$M^{(k)}$ et $F^{(k)}$ sont connues, $\Delta X^{(k)}$ est la seule inconnue. On a donc un système linéaire dont on peut résoudre pour déterminer ΔX.

$\Delta X^{(k)}$ est un estimé de l'erreur commise en approximant X^* par $X^{(k)}$. On peut donc obtenir un meilleur estimé $X^{(k+1)}$ de X^* par la relation :

$$\boxed{X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)}}$$

III.2. Critères d'arrêt :

1. $\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| \leq \varepsilon$
2. $\dfrac{\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \|}{\| X^{(k+1)} \|} < \varepsilon$
3. $k > k_{max}$ (k_{max} : N^bre d'itérations maximum)
4. $\| f(X^{(k+1)}) \| \leq \varepsilon$.

III.3. Algorithme de Newton :

1. Initialisation : Etant donnés $X^{(0)}$, ε, k_{max}
2. Calculer :
$$\left.\begin{array}{l} M_{ij}^{(k)} = \left.\dfrac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\right|_{X = X^{(k)}} \quad j = 1 \to n \\ F_i^{(k)} = - f_i(X^{(k)}) \end{array}\right\} \quad i = 1 \to n$$
3. Résoudre le système linéaire :
$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{(k)} \, \Delta x_j^{(k)} = F_i^{(k)} \qquad i = 1 \to n$$
4. Calculer :
$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \qquad i = 1 \to n$$
5. Test d'arrêt
$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| < \varepsilon \; ; \; \frac{\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \|}{\| X^{(k+1)} \|} < \varepsilon, \quad k > k_{max}$$ (‖ ‖ norme qlcq)

5