Chapitre II

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Objectif du chapitre

- *Résolution des systèmes linéaires AX = B en utilisant les méthodes directes :*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Gauss pour A quelconque ;*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Cholesky pour A symétrique définie positive.*
- *Résolution des systèmes linéaires AX = B en utilisant les méthodes itératives:*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Jacobi*

Introduction

La résolution simultanée de n équations à n inconnus, système d'équations A.X = B ; A : Matrice(n,n), peut se faire en utilisant les méthodes directes telle que la méthode de Gauss ; ou les méthodes itératives telle que la méthode de Jacobi.

La méthode directe conduit à la solution en un nombre fini d'étapes et sans erreurs d'arrondi, la solution serait celle du système.

La méthode itérative fait passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à une autre estimé $X^{(k+1)}$ de cette solution. S'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un infini d'itérations.

Le choix entre la méthode directe ou la méthode itérative pour résoudre le système se fait suivant les caractéristiques de la matrice A.

- ✓ Matrice A de taille réduite (n < 100) et pleine (comprend peu d'éléments nuls) ; on utilise la méthode directe.
- ✓ Matrice A de grande taille (n > 100) et éparse (comprend peu d'éléments non nuls) ; on utilise la méthode itérative.

I. Méthodes directes

Soit A.X = B ; un système d'équations linéaires qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ou encore

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

I.1. Système linéaire à matrice A particulière

I.1.1. Système à matrice A triangulaire inférieure

Soit le système d'ordre n AX = B avec A une matrice triangulaire inférieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Qui peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots n) \qquad \text{où} \quad a_{ij} = 0 \ \ pour\ j > i$$

D'où

$$b_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}\, x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Si on connait les (i-1) premiers éléments de X, on aura :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

<u>**Exemple**</u> **:**

I.1.2. Système à matrice A triangulaire supérieure

Soit le système d'ordre n AX = B avec A une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Qui peut s'écrire :

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots n)$ où $a_{ij} = 0$ *pour* $j < i$

D'où

$$b_i = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j + a_{ii}\,x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[\, b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \,\right] \quad (i = n,\ n-1, \dots 1)$$

<u>Exemple</u> :

I.1.3. Système à matrice A diagonale

Soit le système d'ordre n AX = B avec A une matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \vdots\ddots & & & \\ & & \vdots\ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, \dots n)$$

I.2. Système linéaire à matrice A quelconque : Méthode de Gauss

I.2.1. Principe

La méthode de Gauss consiste à transformer le système AX = B à matrice A quelconque en un système équivalent A'X = B' où A' est une matrice triangulaire supérieure.

La triangularisation s'effectue en utilisant les transformations élémentaires se basant sur les opérateurs de Perlis.

I.2.2. Description de la méthode

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Pour simplifier l'algorithme, on forme la matrice augmentée [A , B] ou B devient la 4ème colonne de A ; on aura alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \qquad [A\,,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

La méthode comporte (n – 1) étapes ; dans notre cas on aura 2 étapes.

- **1ère Etape : Termes sous diagonaux de la 1ère colonne nuls**
  $a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = 0$

  Prémultiplication de [A , B] par $E_{21}(-a_{21}/a_{11})$

  [A , B] . $E_{21}(-a_{21}/a_{11})$ → modification de la 2ème ligne

$$\begin{cases} a_{21}^{(1)} = a_{21} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{11} = 0 \\ a_{22}^{(1)} = a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{12} \\ a_{23}^{(1)} = a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{13} \\ a_{24}^{(1)} = a_{24} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{14} \end{cases}$$

  Prémultiplication de [A , B] par $E_{31}(-a_{31}/a_{11})$

  [A , B] . $E_{31}(-a_{31}/a_{11})$ → modification de la 3ème ligne

$$\begin{cases} a_{31}^{(1)} = a_{31} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{11} = 0 \\ a_{32}^{(1)} = a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{12} \\ a_{33}^{(1)} = a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{13} \\ a_{34}^{(1)} = a_{34} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{14} \end{cases}$$

  On aura : $[A\,,B]^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24}^{(1)} \\ a_{34}^{(1)} \end{bmatrix}$

- **2ème étape : Termes sous diagonaux de la 2ème colonne nuls**
  $a_{32}^{(2)} = 0$

  Prémultiplication de $[A\,,B]^{(1)}$ par $E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$

  $[A\,,B]^{(1)}$. $E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ → modification de la 3ème ligne

$$\begin{cases} a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, a_{23}^{(1)} \\ a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, a_{24}^{(1)} \end{cases}$$

On aura : $[A\ ,B]^{(2)} = [A^{'}\ ,B^{'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24}^{(1)} \\ a_{34}^{(2)} \end{bmatrix}$

les *pivots*

La résolution de ce système de matrice triangulaire supérieure est telle que :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}^{(1)}} \left[a_{24}^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3\right] \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \left[a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right] \end{cases}$$

I.I.3. Algorithme de Gauss pour la résolution d'un système linéaire d'ordre n

1. ***Triangularisation :*** *[A , B] → [A' , B'] en (n-1) étapes*

$$\left.\left.\left.\begin{matrix} w = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ij} = a_{ij} - w a_{kj} \end{matrix}\right\} j = k+1 \to n+1 \right\} i = k+1 \to n \right\} k = 1 \to n-1 \quad (a_{kk} \neq 0)$$

(Colonnes) *(Lignes)* *(Etapes)*

2. ***Résolution du système résultant :*** $A^{'}X = B^{'}$

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left[b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j\right] \quad (i = n,\ n-1, \dots 1)$$

I.3. Système à matrice A symétrique définie positive –Méthode de Cholesky -

Pour résoudre un système à matrice A ; A étant une matrice symétrique définie positive, on utilise la méthode de Cholesky

- ✓ *A est symétrique : $A = A^t$;*
- ✓ *A symétrique définie positive : tous les déterminants de la matrice A sont strictement positifs, > 0. (Critère de Sylvester)*

I.3.1. Théorème de Cholesky

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors elle peut être décomposée en $A=L\,L^t$; avec L : Matrice triangulaire inférieure.

I.3.2. Description de la méthode

Pour résoudre un système linéaire AX = B ; A matrice symétrique définie positive on a :

$AX = B$ et $A = L\,L^t$

Donc : $L\,L^t X = B$

On pose $Y = L^tX \rightarrow L\,Y = B$ on aura donc :

$$\begin{cases} L\,Y = B \ ; \ L: Matrice\ triangulaire \text{ inf} \rightarrow \ résolution\ directe\ pour\ trouver\ Y \\ L^tX = Y \ ; \ L^t: Matrice\ triangulaire \text{ sup} \rightarrow \ résolution\ directe\ pour\ trouver\ X \end{cases}$$

I.3.3. Décomposition de la matrice A

$$A = L\,L^t \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & \dots & l_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}\, l_{jk} \qquad i = 1 \rightarrow n,\quad j = 1 \rightarrow n$$

Pour la partie triangulaire supérieure de A, A étant une matrice symétrique, la r^ième^ ligne s'écrit :

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk}\, l_{jk} \qquad j = r \rightarrow n$$

Soit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}\, l_{jk} + l_{rr}\, l_{jr}$$

D'où

$$a_{rr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2 + l_{rr}^2$$

Soit

$$\left.\begin{array}{l} l_{rr} = \sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ l_{jr} = \frac{1}{l_{rr}}\left[\, a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk} \,\right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{array}\right\} r = 1 \rightarrow n$$

- **Algorithme de décomposition de Cholesky $A \rightarrow L\,L^t$**

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{1.}\quad l_{rr} = \sqrt{a_{rr} - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ \textbf{2.}\quad l_{jr} = \dfrac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk}\right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{array}\right\} r = 1 \rightarrow n$$

Remarque *: si le terme* $(a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2) < 0$*, alors la matrice A n'est pas définie positive.*
Ce test est un autre moyen pour vérifier si une matrice est définie positive ou non.

I.3.4. Résolution

Après décomposition, la résolution de L L^t X = B s'écrit :

$$\begin{cases} L\,Y = B \;\;;\;\; L: Matrice\ triangulaire\ \text{inf} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ Y \\ L^t X = Y \;\;;\;\; L^t: Matrice\ triangulaire\ \text{sup} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ X \end{cases}$$

La résolution est immédiate par les algorithmes ; systèmes à matrices triangulaires inférieure et supérieure.

- **Algorithme de Cholesky**

1. ***Décomposition A → L L^t***

$$\left.\begin{aligned} l_{rr} &= \sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ l_{jr} &= \frac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk}\right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{aligned}\right\} \; r = 1 \rightarrow n$$

2. ***Résolution de L L^t X = B***

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[\, b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \,\right] \quad (i = 1, \dots, n)$$
$$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[\, y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} x_j \,\right] \quad (i = n,\ n-1, \dots 1)$$

II. Méthodes itératives

L'idée des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs $X^{(k)}$ qui converge vers le vecteur X, solution du système AX = B. $X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}$

L'intérêt des méthodes itératives, comparées aux méthodes directes, est d'être simples à programmer et de nécessiter moins de place mémoire. En revanche, le temps de calcul est souvent plus long.

II.1. Méthode de Jacobi

II.1.1. Condition suffisante de convergence

Théorème : *Une condition suffisante pour que la solution* $X^{(k+1)}$ *converge vers la solution du système est que A, matrice du système AX = B, soit à diagonale fortement dominante.*

II.1.2. Méthode de Jacobi

L e système linéaire AX = B est équivalent à :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[\, b_i - \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} a_{ij} x_j \,\right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

Pour une donnée initiale $X^{(0)}$ choisie, on calcule $X^{(k+1)}$ par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\, b_i - \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \,\right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

Soit

$$r_i^{(k)} = \left[\, b_i - \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \,\right] \qquad \text{Vecteur résidu}$$

$x_i^{(k+1)}$ peut s'écrire:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

II.1.3. Test d'arrêt

Le critère d'arrêt des itérations est :

$$\frac{\|R^{(k)}\|}{\|B\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$$

II.1.4. Algorithme de Jacobi

1. ***Initialisation***
   Etant données A, B, $X^{(0)}$, k_{max}, ε

2. ***Généralisation***

$$\left.\begin{aligned} r_i^{(k)} &= \left[b_i - \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \\ x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} \quad (i = 1 \rightarrow n) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \dots, k_{max}$$

3. ***Test d'arrêt***
   Arrêter si :

$$\frac{\|R^{(k)}\|}{\|B\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$$