Chapitre I

Analyse Matricielle

Objectif du chapitre :

Définir les notions de :

- ✓ *Matrice*
- ✓ *Opérations sur les matrices*
- ✓ *Déterminant*
- ✓ *Transformations élémentaires d'une matrice*
- ✓ *Valeurs propres - Vecteurs propres*
- ✓ *Normes*

Introduction

L'analyse numérique ou calcul numérique ou encore mathématiques appliquées est le domaine de mathématiques où l'on étudie des algorithmes permettant de résoudre des problèmes de l'analyse mathématiques au moyen de calcul arithmétique.

Les problèmes de l'analyse mathématiques se basant sur l'utilisation des systèmes d'où l'application de matrices. Pour ce faire, ce chapitre s'intéresse principalement à l'analyse matricielle.

I. Matrice

I.1. Définition

Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments comportant n lignes et m colonnes.

Soit A une matrice ; on note a_{ij} l'élément de la matrice A situé sur la ligne *i* et la colonne *j*. La matrice A s'écrit en général :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

La matrice A est dite de taille nxm ;
n : nombre de lignes ;
m : nombre de colonnes.

I.2. Quelques types de matrices

- **Matrice rectangulaire :** *Nombre de lignes ≠ Nombre de colonnes (A(n,m))*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- **Matrice carrée :** *Nombre de lignes n = Nombre de colonnes m (A(n,n))*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On peut distinguer plusieurs types de matrices carrées :

- **Matrice diagonale :** $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice symétrique-antisymétrique :**
  - ✓ $a_{ij} = a_{ji}$ *; la matrice est symétrique.*
  - ✓ $a_{ij} = -a_{ji}$ *; la matrice est antisymétrique.*

- **Matrice triangulaire supérieure :** $a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice triangulaire inférieure :** *$a_{ij} = 0$ pour $i < j$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice singulière :** *une matrice est singulière si son déterminant est nul.*

- **Matrice orthogonale :** *une matrice A est orthogonale si $[A]^{-1} = [A]^t$*

- **Matrice définie positive :** *une matrice A est dite définie positive si les éléments a_{ij} de la diagonale principale (a_{ii}) sont ≠ 0, et cela même durant la procédure d'élimination de Gauss.*

I.3. Matrices particulières

- **Matrice transposé :** *$[A]^t$; échange des lignes avec les colonnes.*
- **Matrice conjuguée :** *$[\bar{A}]$; les éléments de $[\bar{A}] = \overline{a_{ij}}$*
- **Matrice adjointe :** *$[A]^* = [\bar{A}]^t$*
- **Matrice Hermitienne :** *$[A] = [A]^*$*
- **Matrice à diagonale dominante :** $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i$
- **Matrice à diagonale fortement dominante :** $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i$

II. Opérations sur les matrices

II.1. Somme et différence de matrices

La somme (différence) de deux matrices est la somme (différence) de leurs éléments.

Soient A et B deux matrices :

$C = A+(-)B \qquad c_{ij} = a_{ij}+(-)b_{ij}$

II.2. Multiplication par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire est la multiplication de ses éléments par ce scalaire.

Soit A une matrice et soit λ un scalaire.

$C = \lambda A \qquad c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

II.3. Produit de matrices

Si A(n,m) et B(m,l), on définit la matrice C = A.B de format (n,l) par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$$

Remarque : *Condition d'existence de A.B ; nombre de colonnes de A=nombre de lignes de B*

III. Déterminant

On appelle déterminant d'une matrice carrée A, le scalaire noté det(A) définie par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}$$

III.1. Mineur

Soit une matrice carrée A d'ordre n, si l'on supprime la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne, *le déterminant de la matrice d'ordre (n-1) obtenue est appelé mineur associé à l'élément a_{ij} de la matrice A, on le not m_{ij}.*

Soit par exemple $A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix}$ $\quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}\ a_{23} \\ a_{32}\ a_{33} \end{vmatrix}$; $m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{33} \end{vmatrix}$

III.2. Cofacteur

Dans une matrice carrée A d'ordre n, *on appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le terme*

$S_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

III.3. Calcul du déterminant

Le déterminant peut s'obtenir par :

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, S_{ij}$ (Suivant la ligne i)

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, S_{ij}$ (Suivant la colonne j)

IV. Matrice inverse

On appelle inverse de A, la matrice notée A^{-1} telle que :

$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$ (Matrice identitée)

IV.1. Comatrice

On appelle comatrice d'une matrice carrée A(n,n), la matrice S

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \cdots S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} \cdots S_{2n} \\ & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots S_{nn} \end{bmatrix}$$

où S_{ij} est le cofacteur de a_{ij}.

IV.2. Calcul de la matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} S^t$$

V. Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice A(n,m), noté r(A) ou rg(A), le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) linéairement indépendantes.

$rg(A) \leq Inf(n,m)$

VI. Trace d'une matrice

On appelle trace d'une matrice carrée A(n,n), notée tr(A), la somme de ses éléments diagonaux.

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

VII. Transformations élémentaires d'une matrice

VII.1. Définitions

On appelle transformation élémentaire sur les lignes (ou colonnes) d'une matrice l'une des opérations suivantes :

1. *La permutation de deux lignes (colonnes)*
2. *La multiplication d'une ligne (colonne) par un scalaire*
3. *L'addition à la $i^{ème}$ ligne (colonne) de d fois la $l^{ème}$ ligne (colonne) où $i \neq l$ et d un scalaire.*

VII.2. Opérations élémentaires de Perlis

Soient les matrices suivantes :

- E_{ij} : Matrice [I] (Identité) dont on a permuté les $i^{ème}$ et $j^{ème}$ lignes.
- $E_i(d)$ = [I] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [I] x d)
- $E_{il}(d)$ = [I] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [I] + d.$l^{éme}$ ligne [I])

Les matrices E_{ij}, $E_i(d)$ et $E_{il}(d)$ s'appellent Matrices élémentaires de Perlis ou Opérateurs élémentaires de Perlis. Leurs matrices inverses s'écrivent :

- $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
- $E_i^{-1}(d) = E_i(1/d)$
- $E_{il}^{-1}(d) = E_{il}(-d)$

VII.3. Transformations élémentaires

Les transformations élémentaires sur une matrice A peuvent se ramener à la prémultiplication de A par l'une des matrices élémentaires de Perlis.

- $A_1 = E_{ij}.A$ = [A] avec permutation des $i^{ème}$ et $j^{ème}$ lignes
- $A_2 = E_i(d).A$ = [A] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [A] x d)
- $A_3 = E_{il}(d).A$ = [A] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [A] + d.$l^{éme}$ ligne [A])

Remarque : *On peut aussi définir les matrices élémentaires pour les opérations sur les colonnes, on les note P_{ij}, $P_i(d)$ et $P_{il}(d)$.*

VIII. Matrices équivalentes

Deux matrices de même ordre A et B sont dites équivalentes (A~B), si l'on peut obtenir l'une de l'autre par une suite de transformations élémentaires.

IX. Valeurs propres – Vecteurs propres

En étudiant les transformations linéaires de la forme ; Y = A X

Où

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

On veut connaitre quels sont les vecteurs X, s'ils existent, qui gardent la même direction après transformation par l'opérateur A.

Deux vecteurs non nuls ont même direction ssi l'un est un multiple scalaire de l'autre ; alors on cherche les vecteurs X dont les images Y par l'opérateur A sont de la forme :

$Y=\lambda X$ où λ est un scalaire.

Donc on cherche les vecteurs X tel que

$AX = \lambda X$

ou

$(A-\lambda I)X = 0$

$(A-\lambda I)X = 0$ est un système d'équations linéaires et homogènes en λ du type :

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Et l'on sait qu'une solution X existe ssi : $\det(A-\lambda I) = 0$

$$det(A-\lambda I) = (-1)^n \lambda^n - b_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + b_2(-1)^{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_n(-1)^0 \quad (2)$$

Avec:

- b_m (m = 1, …, n-1) ; $b_m = (-1)^m \sum m_{(m)}$ $m_{(m)}$: mineurs principaux d'ordre m
- $b_n = \det(A)$

- ✓ L'équation (2) s'appelle équation caractéristique de la matrice A.
- ✓ Les racines λ de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I) = 0$ sont les valeurs propres de A
- ✓ Les vecteurs solutions du système (1) sont les vecteurs propres

X. Rayon spectral

Soit [A] une matrice complexe dont les n valeurs propres sont notées λ_i alors :

$\varphi(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ est le rayon spectral de la matrice A.

XI. Normes

XI.1. Norme Vectorielle

Soit $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^t \in \mathbb{C}^n$

On appelle norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ toute application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow R^+$

$X \rightarrow \|X\|$

XI.2. Norme de Hölder

L'application $X \rightarrow \|X\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ ($X \in \mathbb{C}^n$, $\forall$ $p \geq 1$) est une norme vectorielle dite norme de Hölder.

XI.3. Normes vectorielles courantes

On utilise couramment trois normes de Hölder

- $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|X\|_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, nommé norme euclidienne ou norme spectrale.
- $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

XI.4. Norme Matricielle

Soit $A(n,n) \in \mathbb{C}^{n,n}$

On appelle norme matricielle sur $\mathbb{C}^{n,n}$ toute application $f : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow R^+$

$A \rightarrow \|A\|$

XI.5. Normes matricielles courantes

Les normes les plus coupantes sont :

- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\varphi(A^*A)} = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\lambda_i}\,(A^*A)$
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$