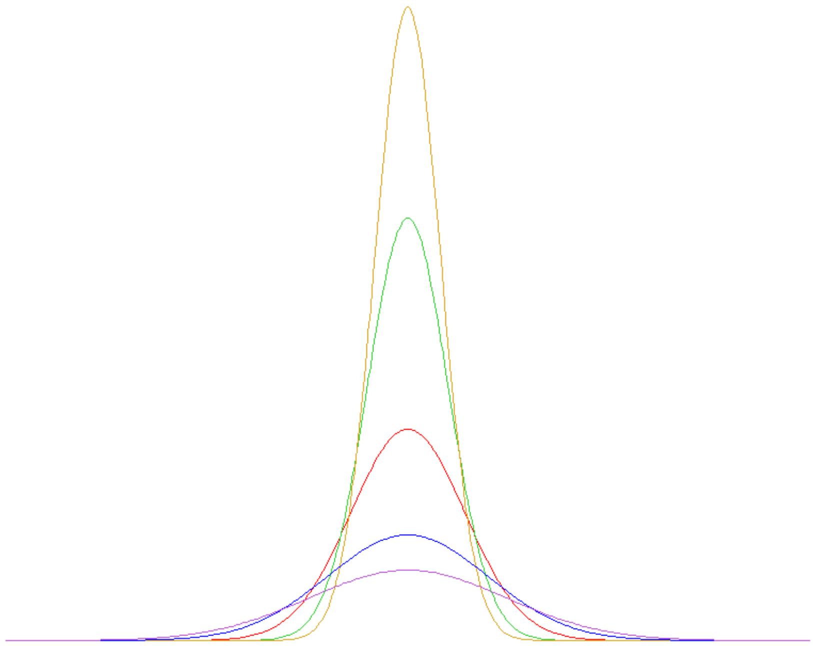
Université Paris 13
Master Mathématiques 1

Année scolaire 2018-2019

Distributions tempérées et espaces de Sobolev

H. Boumaza



Le 5 novembre 2018

Bibliographie

[1] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

[2] G. Carlier, *Notes de cours : Analyse fonctionnelle*, https ://www.ceremade.dauphine.fr/∼carlier/poly2010.pdf

[3] F. Golse, *Notes de cours : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[4] F. Nier, *Rappels et formulaires : Distributions*, https ://www.math.univ-paris13.fr/∼nier/ensP13/enseignement/M2spmic2013/rappeldist.pdf

[5] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Sciences Sup, Dunod.

Table des matières

0.1 Notations multi-indicielles . . . 1
0.2 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 1

1 Espaces de Fréchet **3**
1.1 Definitions . . . 3
1.2 Fonctions localement intégrables . . . 5
1.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact . . . 5

2 La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ **7**
2.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 8
2.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 9
2.3 Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 13
2.4 Transformée de Fourier et convolution . . . 15
2.5 Transformée de Fourier des fonctions à support compact . . . 15

3 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées **19**
3.1 Définition . . . 19
3.2 Exemples . . . 19
3.2.1 Espaces de fonctions classiques . . . 19
3.2.2 Distributions de Dirac . . . 21
3.2.3 Valeur principale de $\frac{1}{x}$ . . . 22
3.3 Opérations dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . 22
3.3.1 Produit par une fonction de classe C^∞ tempérée . . . 22
3.3.2 Dérivation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . 23
3.4 Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . 25

4 La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ **27**
4.1 Définition et propriétés . . . 27
4.2 La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ . . . 28
4.3 La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ . . . 29
4.4 Transformée de Fourier partielle et applications . . . 30

5 Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ **33**
5.1 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ . . . 33
5.1.1 Définitions et premiers exemples . . . 33
5.1.2 Densité des fonctions régulières . . . 35
5.1.3 Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ . . . 35
5.2 Théorème d'injection de Sobolev . . . 37
5.3 Dualité . . . 38
5.4 Théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ . . . 39

Notations

Dans tout ce cours, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k est un entier naturel ou le symbole ∞ (sauf précision). On désigne par $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω et par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois dérivables et dont les dérivées k-ièmes sont continues sur Ω.

0.1 Notations multi-indicielles

Un multi-indice α est un d-uplet d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On appelle longueur de α l'entier

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

On définit la factorielle de α par $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ on pose aussi $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.
Si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots d\}$. On pose aussi

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Enfin, on pose :

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Alors, une fonction $\varphi \in C^k(\Omega)$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction $\partial^\alpha \varphi$ est dans $C^0(\Omega)$.

Une formule importante est celle de Leibniz. Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α de longueur inférieure ou égale à k,

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta} \psi.$$

Pour s'en souvenir, pensez à la formule du binôme de Newton.

0.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Voici une formule qui nous sera souvent utile dans la suite. Il faut la connaître au moins à l'ordre 1 ou 2 et à tout ordre pour $d = 1$.

Proposition 0.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $n \geq 1$ un entier et φ une fonction de classe C^n sur Ω. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. Alors :*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{n}{\alpha!}(x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{n-1} \partial^\alpha \varphi(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Dans le cas de la dimension 1 on obtient la formule suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(x-y)^k \varphi^{(k)}(y) + (x-y)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t.$$

En dimension $d \geq 1$ et à l'ordre $n = 1$ on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t.$$

Ce sont ces deux dernières formules que l'on utilisera le plus souvent dans la suite.

Chapitre 1

Espaces de Fréchet

1.1 Definitions

Commençons par donner la définition d'une semi-norme. Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme sur E lorsque :*

1. $p(0_E) = 0,$
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$
3. $\forall x, y \in E,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y).$

Une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est dite *séparante* lorsque

$$\forall x \in E,\ (\forall i \in I,\ p_i(x) = 0) \Rightarrow (x = 0).$$

La topologie induite sur E par une famille séparante de semi-normes est localement convexe. On peut en donner une base de voisinages convexes : pour $x \in E$, $\varepsilon > 0$ et $i \in I$, on pose

$$V_{i,\varepsilon}(x) = \{y \in E,\ |\ p_i(x-y) < \varepsilon\}.$$

Un voisinage de x dans $(E, (p_i)_{i \in I})$ sera alors un sous-ensemble de E qui contient un $V_{i,\varepsilon}$ pour un certain couple (i, ε). On définit alors les ouverts de $(E, (p_i)_{i \in I})$ comme les sous-ensembles de E qui sont voisinage de chacun de leur points et l'ensemble des ouverts ainsi définis forme bien une topologie $\mathcal{T}$ sur E.
On peut alors définir la notion d'espace de Fréchet.

Définition 1.1.2. *Un espace de Fréchet est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une famille dénombrable et séparante de semi-normes $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle qu'avec la distance*

$$\forall x, y \in E,\ d(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)},$$

(E, d) est un espace métrique complet.

On remarque que les espaces topologiques $(E, \mathcal{T})$ et (E, d) coïncident.
Quitte à remplacer p_i par $\max_{k \leq i} p_k$, on peut toujours supposer la famille dénombrable de semi-normes croissante. On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.1.3. *Soient $(E, (p_m)_{m\in\mathbb{N}})$ et $(F, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ deux espaces de Fréchet avec des suites croissantes de semi-normes. Une application linéaire $L : E \to F$ est continue si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m_n \in \mathbb{N},\ \exists C_{m_n} > 0,\ \forall x \in E,\ q_n(L(x)) \leq C_{m_n} p_{m_n}(x). \tag{1.1}$$

Démonstration : Pour le sens direct, on raisonne par contraposée. Supposons (1.1) fausse et montrons que L n'est pas continue en 0. On part de

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \exists x \in E,\ q_n(L(x)) > C p_m(x).$$

Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$. Il existe alors $x_m \in E$, $q_n(L(x_m)) > m p_m(x_m)$. Posons $\tilde{x}_m = \frac{x_m}{q_n(L(x_m))}$. Alors, $q_n(L(\tilde{x}_m)) = 1$. De plus,

$$p_m(\tilde{x}_m) = \frac{p_m(x_m)}{q_n(L(x_m))} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall m \geq k,\ p_k(\tilde{x}_m) \leq p_m(\tilde{x}_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Cela signifie exactement que la suite $(\tilde{x}_m)$ tend vers 0 dans $(E, (p_m)_{m\in\mathbb{N}})$. Or, $q_n(L(\tilde{x}_m)) = 1$ ne tend pas vers 0 ce qui contredit la continuité de L.

Réciproquement, soit une application linéaire $L : E \to F$ qui vérifie (1.1). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m_n \in \mathbb{N}$ et $C_{m_n} > 0$ tels que

$$q_n(L(x)) \leq C_{m_n} p_{m_n}(x).$$

On peut toujours supposer que $C_{m_n} \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in E$ tel que $x \in V_{m_{n_0}, \frac{\varepsilon}{C_{m_{n_0}}}}$ pour la famille $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Alors, en utilisant la croissance de la famille $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
d(L(x), L(0)) &= \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(L(x))}{1 + q_n(L(x))} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(L(x))}{1 + q_n(L(x))} \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{2^n} q_n(L(x)) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leq q_{n_0}(L(x)) \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leq C_{m_{n_0}} p_{m_{n_0}}(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où la continuité de L en 0 donc en tout point.

□

1.2 Fonctions localement intégrables

Commençons par montrer que l'ouvert Ω peut s'écrire comme une réunion croissante dénombrable de compacts.

Lemme 1.2.1. *Il existe une famille $(K_i)_{i\geq 1}$ de compacts de Ω telle que*

1. *pour tout $i \geq 1$, $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$,*
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i = \bigcup_{i=2}^{+\infty} \overset{\circ}{K}_i$,
3. *pour tout compact K de Ω, il existe $i_0 \geq 1$ tel que $K \subset K_{i_0}$.*

Démonstration : (Heuristique.) En effet, pour $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, on pose :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ ||x|| \leq i\} \cap \{x \in \Omega \ : \ d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i}\}.$$

Pour les détails, voir [5, Lemme 1.1, p2].

□

Une telle famille est appelée une exhaustion de Ω par des compacts.

Définition 1.2.2. *Une fonction $f \ : \ \Omega \to \mathbb{K}$ est dite localement intégrable pour la mesure de Lebesgue lorsqu'elle est intégrable sur tout compact de Ω.*
On note $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω.

A l'aide d'une exhaustion $(K_i)_{i\geq 1}$ de Ω par des compacts, on peut définir les semi-normes suivantes sur $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$:

$$\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \ p_i(f) = \int_{K_i} |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Muni de cette famille de semi-normes, $(L^1_{\text{loc}}(\Omega), (p_i)_{i\geq 1})$ est un espace de Fréchet.

1.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact

Définition 1.3.1. *Le support d'une fonction $\varphi \in C^0(\Omega)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ noté* supp φ *et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. supp $\varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.
2. (supp $\varphi)^c$ *est le plus grand ouvert où la fonction φ est nulle.*
3. $x_0 \notin$ supp φ *si et seulement s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que : $\forall x \in V_{x_0}, \ \varphi(x) = 0$.*

On a alors :

1. (supp $\varphi = \emptyset$) $\Leftrightarrow$ ($\varphi \equiv 0$ dans Ω),
2. supp $(\varphi \cdot \psi) \subset$ supp $\varphi \cap$ supp ψ,
3. si $\varphi \in C^k(\Omega)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, supp $\partial^\alpha \varphi \subset$ supp φ.

Soit $K \subset \Omega$ un compact fixé. On notera $C^\infty_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ telles que supp $\varphi \subset K$.

Définition 1.3.2. *Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C^\infty_K(\Omega)$ tend vers φ dans $C^\infty_K(\Omega)$ lorsque, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha \varphi$ sur K.*

Pour K un compact fixé de Ω, les espaces $C^k_K(\Omega)$ et l'espace $C^\infty_K(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet. En effet, soit une exhaustion $(K_i)_{i\geq 1}$ de Ω par des compacts. On peut alors définir, pour $i \geq 1$,

$$\begin{cases} p_i(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^k(\Omega),\ k \in \mathbb{N}, \\ p_i(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Chaque p_i est une semi-norme sur $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Elles induisent par restriction des semi-normes sur $C^k_K(\Omega)$ et $C^\infty_K(\Omega)$. On peut alors définir sur $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la distance suivante :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(\varphi - \psi)}{1 + p_i(\varphi - \psi)}$$

qui par restriction induit une distance sur $C^k_K(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les espaces $(C^k(\Omega), d)$ sont complets. De plus, si $K \subset \Omega$ est un compact, $(C^\infty_K(\Omega), d)$ est complet comme sous-espace fermé de $(C^\infty(\Omega), d)$.
Finalement, $(C^\infty_K(\Omega), (p_i)_{i\geq 1})$ est bien un espace de Fréchet.

Définition 1.3.3. *L'espace $C^\infty_0(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ telles qu'il existe un compact $K \subset \Omega$, $K = supp\ \varphi$.*

Pour définir la topologie de l'espace $C^\infty_0(\Omega)$ nous allons définir la notion de convergence des suites d'éléments de cet espace.

Définition 1.3.4. *Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C^\infty_0(\Omega)$ tend vers φ dans $C^\infty_0(\Omega)$ lorsque :*

1. *il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$,*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha \varphi$ sur K.*

La distance d définie plus haut ne rend pas l'espace $(C^\infty_0(\Omega), d)$ complet. La distance d caractérise la convergence dans $(C^\infty_K(\Omega), d)$, mais pas dans $(C^\infty_0(\Omega), d)$. En effet, il peut y avoir des problèmes aux bords pour les supports. La distance d ne "contient" pas le point (i) de la définition de la convergence dans $C^\infty_0(\Omega)$.

Comme on peut écrire que $C^\infty_0(\Omega) = \bigcup_{i\geq 1} C^\infty_{K_i}(\Omega)$, la topologie que l'on a définie sur $C^\infty_0(\Omega)$ n'est autre que la limite inductive stricte des topologies définies par la distance ci-dessus sur chaque $C^\infty_{K_i}(\Omega)$. Toutefois, $C^\infty_0(\Omega)$ n'est pas métrisable, seul chacun des $C^\infty_{K_i}(\Omega)$ l'est (voir [2], Proposition 1.5).

Rappelons que la limite inductive des topologies est la topologie la plus fine sur $C^\infty_0(\Omega)$ qui rende toutes les injections $i_{K\to\Omega} : C^\infty_K(\Omega) \to C^\infty_0(\Omega)$ continues. De manière équivalente, pour tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$, une application $f : C^\infty_0(\Omega) \to X$ est continue si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, $f \circ i_K$ est continue.

Chapitre 2

La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

La théorie de Fourier classique nous enseigne que, lorsqu'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est de classe C^1 et périodique de période T, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx\frac{2\pi}{T}} \tag{2.1}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Lorsque f est quelconque, on ne peut pas, en général, la représenter comme une série de Fourier. Il faut qu'elle soit périodique. On cherche alors une représentation de type intégral. C'est ce que nous allons faire heuristiquement. Pour cela on remplace c_n par son expression intégrale dans (2.1) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Or, la vitesse de convergence vers 0 à l'infini des coefficients de Fourier est contrôlée par la régularité de f. Ainsi, si f est suffisamment régulière, par exemple de classe C^∞, $c_n = \mathcal{O}(|n|^{-p})$ pour tout $p \geq 0$. Cela nous amène à négliger, pour T assez grand, les termes dans la somme infinie tels que $|n| > \frac{T^2}{2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \simeq \frac{1}{T}\sum_{|n|\leq\frac{T^2}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Cette somme finie est une somme de Riemann et on obtient, lorsque T tend vers $+\infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}\xi,\ \text{ avec }\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi t}\mathrm{d}t.$$

On retrouve ainsi heuristiquement l'analogue pour des fonctions non périodiques de la formule de reconstitution du signal pour les fonctions périodiques, une intégrale remplaçant la somme discrète dans (2.1). Cette formule est appelée formule d'inversion de Fourier et l'un des principaux objectifs de ce cours sera de démontrer une telle formule pour une classe de fonctions adaptée, puis de l'étendre par dualité à une large classe de distributions.

2.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

La transformée de Fourier est définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$. Toutefois, l'espace des fonctions intégrables n'est pas invariant par transformée de Fourier. De même, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas invariant par transformée de Fourier, la transformée de Fourier d'une fonction non identiquement nulle à support compact n'étant jamais à support compact.
Nous allons donc chercher un espace intermédiaire entre $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact) et $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui soit invariant par $\mathcal{F}$.
Pour obtenir ensuite par dualité l'espace le plus grand possible, on va essayer de trouver un espace invariant qui soit le plus petit possible. On commence donc par se restreindre à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, une condition suffisante pour que $\hat{f}$ soit dérivable est que f et $x \mapsto xf(x)$ soient toutes deux intégrables. Plus généralement, pour avoir $\hat{f}$ de classe C^∞, il suffit d'avoir $x \mapsto x^p f(x)$ intégrable pour tout $p \geq 0$. On veut aussi avoir le même contrôle pour toutes les dérivées de f. Cela conduit à introduire l'espace de Schwartz.

Définition 2.1.1. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, appelé espace de Schwartz, est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.2. *Dans la définition 2.1.1, nous aurions pu remplacer (2.2) par la condition*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0.$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on considère ici des fonctions à valeurs complexes).

Exemple 2.1.3.

1. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec* $\mathrm{Re}\, z > 0$, *la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
3. *Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-z|x|^2}$ avec $z \in \mathbb{C}$,* $\mathrm{Re}\, z > 0$ *et P une fonction polynômiale, sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Avant de définir la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous donnons encore quelques propriétés de cet espace. Commençons par le munir d'une topologie. Pour cela on défini les semi-normes

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{2.3}$$

Muni de cette famille de semi-normes, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.
On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.4.

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto \partial^\alpha f$ sont continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
3. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Pour le premier point, les deux applications sont linéaires en f et laissent stables f. La continuité est immédiate puisque ces deux opérations ne font qu'opérer un décalage de α dans respectivement les premier et second indices de la famille de semi-norme que l'on s'est donnée.

Le second point est une conséquence de la formule de Leibniz.

Le dernier point est clair puisque l'on peut choisir α quelconque et β nul donc on peut majorer par une fonction de la forme $x^{-\alpha/p}$ pour x suffisamment loin de 0 et obtenir l'intégrabilité de ce majorant par le critère de Riemann.

□

2.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On remarque que, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. La définition qui suit a donc bien un sens.

Définition 2.2.1. *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ est la fonction définie par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots x_d\xi_d$.

Commençons par calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne. Cet exemple est essentiel non seulement dans un cadre théorique pour obtenir la formule d'inversion de Fourier, mais aussi dans diverses applications, comme dans le calcul des probabilités (voir théorème de Lévy ou le Théorème Central Limite).

Exemple 2.2.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}. \tag{2.4}$$

Etape 1. *On commence par effectuer le calcul dans le cas où $d = 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

L'usage du théorème est justifié par domination à l'aide de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ qui décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme et en particulier $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} \in L^1(\mathbb{R})$.
Comme $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$$

et une intégration par parties montre que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

Ainsi $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{2\lambda}\hat{f}$ avec comme condition initiale $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est bien

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

***Etape 2.** On passe au cas où $d \geq 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le résultat est alors une conséquence directe du théorème de Fubini :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\mathrm{d}x = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_d\xi_d}\mathrm{e}^{-\lambda x_d^2}\mathrm{d}x_d\right),$$

ce qui donne, par propriété de morphisme de l'exponentielle, la formule voulue.

***Etape 3.** La formule s'étend à l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ par prolongement analytique. En effet, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé, on note $\Phi\ :\ \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par*

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-z|x|^2}\mathrm{d}x.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-z|x|^2}$ est holomorphe sur Ω et si $K \subset \Omega$ est un compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $\mathrm{Re}\, z > \varepsilon$ et

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-z|x|^2}| \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi, le théorème d'holomorphie sous le signe intégral s'applique Φ est holomorphe sur Ω. Or, on sait que pour $z \in]0, +\infty[$,

$$\Phi(z) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}.$$

Comme le membre de droite de cette égalité est également holomorphe sur Ω, cette égalité reste vraie pour tout $z \in \Omega$.

La formule donnée dans cet exemple se généralise ainsi : soit une matrice réelle symétrique $A \in \mathrm{S_d}(\mathbb{R})$ définie positive. Si on considère la densité Gaussienne centrée

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(A)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)},$$

alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(G_A)(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}.$$

Cela s'obtient à partir de la formule que l'on a démontré en diagonalisant A en base orthonormée.

À l'aide de la transformée de Fourier de la Gaussienne, nous pouvons à présent démontrer le théorème d'inversion de Fourier dans le cadre de la classe de Schwartz.

Théorème 2.2.3. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}\ :\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire bijective, continue et d'inverse continu. Son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est donnée par*

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}g(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{2.5}$$

Remarque 2.2.4. *La formule (2.5) peut s'écrire :*

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(g)(-x).$$

Remarque 2.2.5. *Ce théorème montre en particulier que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bien invariant par transformée de Fourier, comme nous l'avons souhaité lors de sa construction.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ envoient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(g)(-x)$, il suffit de le montrer pour $\mathcal{F}$.

Tout d'abord, $\mathcal{F}(g) \in C^\infty$ si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour x fixé, la fonction $\xi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}g(x)$ est de classe C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$|\partial_\xi^\beta(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}g(x))| = |(-\mathrm{i}x)^\beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}g(x)| = |x^\beta g(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral de manière récurrente. De plus :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}(-\mathrm{i}x)^\beta g(x)\mathrm{d}x.$$

On montre ensuite, par intégrations par parties successives, que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} ((-D_x)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi})((-\mathrm{i}x)^\beta g(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} D_x^\alpha((-\mathrm{i}x)^\beta g(x))\mathrm{d}x$$

où l'on a utilisé la notation $D_j = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_j}$ et $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$. On en déduit que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha(x^\beta g(x))|\mathrm{d}x < +\infty.$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $g \mapsto \mathcal{F}(g)$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par la formule de Leibniz.

Il nous reste à prouver que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g = g$ pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour cela il faudrait pouvoir considérer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi$. Mais, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ et on ne peut donc pas intervertir les intégrales par Fubini. On va procéder par approximation. On remarque que, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Or, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right)g(y)\mathrm{d}y.$$

D'après la formule (2.4), on a

$$I_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}}g(y)\mathrm{d}y = \pi^{\frac{d}{2}}2^d \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-|z|^2}g(x - 2\sqrt{\varepsilon}z)\mathrm{d}z.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \pi^{\frac{d}{2}}2^d g(x)\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}z = (2\pi)^d g(x).$$

D'où, $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d g(x)$ et $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. On montre de même que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$.

□

Il est courant de noter $\check{g}$ la fonction $x \mapsto g(-x)$. Avec cette notation, la relation d'inversion de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}g = (2\pi)^d \check{g}.$$

Nous terminons cette section par un résultat important de densité.

Théorème 2.2.6. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour la norme L^2.*

Démonstration : On considère la famille des fonctions polynômiales de Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n)}.$$

Cette famille forme une base de $\mathbb{R}[X]$ car c'est une famille échelonnée en degré. De plus, elle est orthogonale dans $L^2(\mu)$ où μ est la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de dérivée de Radon-Nikodym $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, et pour le produit scalaire

$$(f,g) \mapsto (f|g)_{L^2(\mu)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu.$$

On note alors V le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $L^2(\mu)$ engendré par la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que V est dense dans $L^2(\mu)$ pour la norme hilbertienne induite par le produit scalaire ci-dessus. Pour cela, on montre que l'orthogonal $V^\perp$ est réduit au singleton $\{0\}$. Soit donc $f \in V^\perp$. Alors $f \in L^2(\mu)$ et pour toute $h \in V$, $(f|h)_{L^2(\mu)} = 0$. Par ailleurs, considérons la transformée de Fourier de $g\ :\ x \mapsto f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\hat{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}dx \end{array}.$$

On montre par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral que $\hat{g}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{C},\ \hat{g}^{(n)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-i)^n x^n e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}dx$$

et en $\xi = 0$,

$$\hat{g}^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$$

car $x \mapsto x^n \in V$, puisque $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Donc $\hat{g}$ est holomorphe au voisinage de 0 de série entière nulle (puisque toutes ses dérivées successives sont nulles en 0), donc elle est nulle au voisinage de 0. Par prolongement analytique, $\hat{g}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. En particulier elle est aussi nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit par inversion de Fourier que g est identiquement nulle, donc f aussi. Ainsi, V est dense dans $L^2(\mu)$. Puis $e^{-\frac{x^2}{2}}V$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Or, $e^{-\frac{x^2}{2}}V \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On obtient alors le résultat en dimension $d \geq 1$ quelconque par produit tensoriel.

□

2.3 Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Nous commençons par présenter la propriété fondamentale de la transformée de Fourier : elle échange la dérivation et la multiplication algébrique. C'est cette propriété qui justifie le rôle central de la transformée de Fourier dans l'étude des EDPs à coefficients constants.

Théorème 2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

1. *la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}x_j f)(\xi). \tag{2.6}$$
2. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\partial_{x_i} f)(\xi) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{2.7}$$

Démonstration : La fonction $(x,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,
$$|\partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))| = |-\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)| = |x_j f(x)|$$
et $x \mapsto x_j f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir
$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$$
ce qui établit le premier point.
Pour montrer le second point, intégrons pas parties par rapport à x_j :
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x_j = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\right]_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (\partial_{x_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}) f(x)\mathrm{d}x_j = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x_j$$
car $x_j \mapsto f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d)$ tend vers 0 lorsque $|x_j| \to +\infty$ puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Puis, comme $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)| = |\partial_{x_j} f(x)|$ et que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, de même que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$, on peut intégrer l'égalité issue de l'intégration par parties selon les variables autres que x_j pour obtenir, via Fubini,
$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x,$$
ce qui prouve le second point.

□

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ échange donc dérivation et multiplication par x. Par conséquent, $\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini : plus une fonction est dérivable, plus vite sa transformée de Fourier décroît à l'infini. On retrouve en particulier l'invariance de la classe de Schwartz par $\mathcal{F}$.

Bien entendu, nous avons toujours $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc voir ce que l'on obtient lorsque l'on applique la transformée de Fourier à une fonction à support compact. La décroissance à l'infini étant maximale pour une telle distribution, on s'attend à obtenir une régularité maximale. Plus généralement, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ et à support compact. Alors sa transformée de Fourier définit, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, une fonction analytique sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ qui s'étend en une fonction holomorphe sur

$\mathbb{C}$. En particulier, sa restriction à la droite réelle est analytique. Nous verrons plus en détails ces questions sur $\mathbb{R}^d$ lorsque nous aborderons le théorème de Paley-Wiener.

Passons à présent aux propriétés hilbertiennes de la transformée de Fourier. Le théorème de Plancherel qui suit énonce un principe de conservation de l'énergie lorsque l'on passe de l'espace classique à l'espace de Fourier et justifie le fait que du point de vue physique, on ne "perd" rien à passer dans l'espace de Fourier.

Théorème 2.3.2. *Soient f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x \tag{2.8}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{2.9}$$

En particulier pour $f = g$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi. \tag{2.10}$$

Démonstration : Le premier point est une application directe de la définition de la transformée de Fourier et du théorème de Fubini. Les fonctions dans l'intégrale double étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, elles sont intégrables.

On applique alors (2.8) aux fonctions f et $h = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\hat{g}}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{h}(x)\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs,

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\overline{\hat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi} = \overline{\overline{\mathcal{F}}\hat{g}(x)} = \overline{g}(x).$$

D'où le résultat.

La dernière identité est alors évidente.

□

Voyons à présent comment la transformée de Fourier se comporte vis-à-vis des translations avant de voir la relation entre produit de convolution et transformée de Fourier.

Proposition 2.3.3. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si $\tau_a : x \mapsto x + a$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $(\tau_a)_*f = f \circ \tau_{-a}$ a pour transformée de Fourier*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}((\tau_a)_*f)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Réciproquement,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot x}f)(\xi) = (\tau_a)_*(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - a).$$

Démonstration : Pour le premier point, on effectue le changement de variables $z = x - a$ dans l'intégrale de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a)_*f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}f(x-a)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(z+a)}f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Le second point découle directement de la définition de la transformée de Fourier.

□

2.4 Transformée de Fourier et convolution

Proposition 2.4.1. *Soient f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. Réciproquement, $\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.*

Démonstration : Rappelons tout d'abord la définition du produit de convolution pour deux fonctions, l'une intégrable et l'autre bornée :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y.$$

Cette définition est licite pour f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, à y fixé, la fonction $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\partial_x^\beta(f(y)g(x-y))| = |f(y)(\partial^\beta g)(x-y)| \leq C_{0,\beta}|f(y)|$ en reprenant les notations de la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Or, $y \mapsto C_{0,\beta}|f(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, donc par dérivation sous le signe intégral, $f \star g$ est de classe C^∞ et $\partial^\beta(f \star g) = f \star (\partial^\beta g)$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Comme $x^\alpha = (x - y + y)^\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}$, on peut écrire

$$x^\alpha \partial^\beta(f \star g) = x^\alpha f \star (\partial^\beta g) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (x^{\alpha-\gamma} f) \star (x^\gamma \partial^\beta g)$$

et cette fonction est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'où $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut alors appliquer le théorème de Fubini à la fonction intégrable $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ pour obtenir, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} g(x-y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi).
\end{aligned}$$

On a donc obtenu le premier point. Pour le second nous allons utiliser la transformée de Fourier inverse. On applique le premier point à $\varphi = \mathcal{F}(f)$ et $\psi = \mathcal{F}(g)$. Alors, $\hat{\varphi} = (2\pi)^d \check{f}$ et $\hat{\psi} = (2\pi)^d \check{g}$ d'où :

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \star g)) = (2\pi)^d f \check{\star} g.$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
(f \check{\star} g)(\xi) = (f \star g)(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\eta) g(-\xi - \eta) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(-\eta) \hat{\psi}(\xi + \eta) \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\eta) \hat{\psi}(\xi - \eta) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} (\hat{\varphi} \star \hat{\psi})(\xi).
\end{aligned}$$

Cela prouve le second point car $\mathcal{F}$ est une permutation de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

□

2.5 Transformée de Fourier des fonctions à support compact

Comme nous l'avons déjà fait remarqué, la transformée de Fourier échange la décroissance à l'infini d'une fonction avec la régularité de sa transformée de Fourier. On ne peut pas décroître plus vite à l'infini qu'en étant à support compact, on s'attend donc à une régularité maximale pour la transformée de Fourier d'une fonction à support compact.

Commençons par donner la définition d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^d$.

Définition 2.5.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ un ouvert et soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que F est de classe C^1 sur Ω (identifié à un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$) en les $2d$ variables réelles $(\mathrm{Re}\ z_1, \mathrm{Im}\ z_1, \dots, \mathrm{Re}\ z_d, \mathrm{Im}\ z_d)$. On dit alors que F est holomorphe dans Ω lorsque*

$$\forall z \in \Omega,\ \forall j \in \{1, \dots, d\},\ \overline{\partial_{z_j}} F(z) = 0$$

où $\overline{\partial_{z_j}} F = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} + \mathrm{i}\partial_{y_j})F$.

On retiendra qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^d$ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^{2d}$ qui est de plus holomorphe en chacune de ses variables, les autres étant fixées.

Nous allons à présent caractériser les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^d$ qui sont la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.5.2 (Paley-Wiener.).
1. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que* supp $\varphi \subset B(0,r)$ *pour un $r > 0$. Alors $\hat{\varphi}$ s'étend en une fonction holomorphe F sur $\mathbb{C}^d$ qui vérifie*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists C_N > 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^d,\ |F(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im}\ z|}. \tag{2.11}$$

2. *Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui vérifie l'estimation (2.11), alors il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que* supp $\varphi \subset B(0,r)$ *et $\hat{\varphi}(\xi) = F(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Remarques. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas la fonction nulle, sa transformée de Fourier n'est pas à support compact, puisque, comme c'est la cas en une variable, la seule fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^d$ à support compact est la fonction nulle.

Si $z = \xi \in \mathbb{R}$, alors (2.11) implique que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{O}\left((1 + |\xi|)^{-N}\right).$$

Démonstration : **1.** Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Le théorème d'holomorphie sous le signe intégral s'applique alors pour obtenir que la fonction $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^d,\ F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.z} \varphi(x) \mathrm{d}x$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}^d$. En effet, la domination se faisant sur tout compact de $\mathbb{C}$, on peut majorer directement l'intégrande par une constante ne dépendant que du compact et celle-ci est intégrable puisque φ étant à support compact, l'intégration se fait sur un compact.

De plus, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a par IPP,

$$z^\alpha F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} z^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.z} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} (-D_x)^\alpha (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.z}) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.z} (D_x)^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

où $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d}$ avec pour tout j, $D_{x_j} = \frac{1}{\mathrm{i}} \partial_{x_j}$. En effet, φ étant à support compact, tous les crochets d'intégration apparaissant dans les IPPs successives sont nuls. De cette expression, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$, telle que

$$(1 + |z|)^N |F(z)| \leq C_N \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im}\ z|}$$

en utilisant le fait que $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.z}| = \mathrm{e}^{x_1 \mathrm{Im}\ z_1} \cdots \mathrm{e}^{x_d \mathrm{Im}\ z_d}$ et le fait que le support de φ est inclus dans $B(0,r)$ ce qui borne tous les x_i par r.

2. Réciproquement, supposons à présent F holomorphe sur $\mathbb{C}^d$ et vérifiant (2.11). Alors $F|_{\mathbb{R}^d} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ en choisissant N assez grand, et la fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x.\xi} F(\xi) \mathrm{d}\xi$$

est de classe C^∞ par le théorème de dérivation sous le signe intégral. Là encore, l'hypothèse de domination uniforme provient du fait que (2.11) est valable pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Puisque $\hat{\varphi} = F$ sur $\mathbb{R}^d$ par inversion de Fourier, il reste à montrer que supp $\varphi \subset B(0,r)$. Pour cela, on commence par montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x.(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi + \mathrm{i}\eta) \mathrm{d}\xi. \tag{2.12}$$

Pour $z_1 = \xi_1 + \mathrm{i}\eta_1 \in \mathbb{C}$, on considère le rectangle dans $\mathbb{C}$ donné par $[-R, R] \times [0, \mathrm{i}\eta_1]$ pour tout $R > 0$. On oriente le contour γ_R de ce rectangle dans le sens trigonométrique. Alors γ_R est un lacet orienté dans $\mathbb{C}$. Puisque, pour $x' \in [-R, R]^{d-1}$ et $z' \in \mathbb{C}^{d-1}$ fixés, la fonction $g : z_1 \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1.z_1 + x'.z')} F(z_1, z')$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1.z_1+x'.z')} F(z_1, z') \mathrm{d}z_1 = 0.$$

A l'aide de (2.11), on obtient que les intégrales sur les côtés "verticaux" du rectangle tendent toutes les deux vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. Il ne reste donc que les deux contributions "horizontales". Celle sur l'axe réel donne $\varphi(x)$ et celle sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z = \eta_1\}$ donne, compte tenu de l'orientation, lorsque R tend vers l'infini,

$$-\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x.(\xi+\mathrm{i}(\eta_1,0,\ldots,0))} F(\xi + \mathrm{i}(\eta_1, 0, \ldots, 0)) \mathrm{d}\xi.$$

Notons φ_1 l'opposé de cette intégrale. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. On peut à présent répéter cet argument avec φ_1 au lieu φ pour obtenir par récurrence la formule (2.12).

On utilise alors la formule (2.12) en prenant $\eta = \lambda \frac{x}{|x|}$ pour un $\lambda > 0$. On a alors $x.(\xi + \mathrm{i}\eta) = x.\xi + \mathrm{i}\lambda|x|$ et $|\eta| = \lambda$. Alors pour $N = d+1$ dans (2.11), on obtient

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x.(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi + \mathrm{i}\eta)| \le C_d \mathrm{e}^{-\lambda|x|} (1 + |x|)^{-d-1} \mathrm{e}^{r\lambda}.$$

Donc pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\varphi(x)| \le C_d \mathrm{e}^{(r-|x|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^{d+1}}$$

ce qui montre que $|\varphi(x)| = 0$ lorsque $|x| > r$ en faisant alors tendre λ vers $+\infty$. On obtient bien que supp $\varphi \subset B(0,r)$.

□

Chapitre 3

L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées

3.1 Définition

Pour pouvoir définir la transformée de Fourier d'une fonction, il nous a fallu contrôler sa croissance à l'infini. C'est la cas pour une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Or, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est par construction invariant par la transformée de Fourier. Par dualité, nous allons donc pouvoir définir la transformée de Fourier sur le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace des distributions dites tempérées.

Définition 3.1.1. *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), (p_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d})$. Plus précisément, une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est une distribution tempérée si et seulement si*

$$\exists k, l \in \mathbb{N},\ \exists C_{k,l} > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_{k,l} \max_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi) \tag{3.1}$$

où les $p_{\alpha,\beta}$ sont définies en (2.3). On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque. On retrouve dans (3.1) la caractérisation de la continuité des applications linéaires entre espaces de Fréchet, avec comme espace d'arrivé, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

3.2 Exemples

3.2.1 Espaces de fonctions classiques

Une des premières choses à vérifier est que la théorie des distributions tempérées généralise bien la théorie des fonctions classiques, typiquement des fonctions intégrables. On va donc montrer comment les fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ s'injectent dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.2.1. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On peut associer à f une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, notée T_f, telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soit q l'exposé conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et par l'inégalité de Hölder, on a

$$| < T_f, \varphi > | = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \right| \leq ||f||_{L^p}\ ||\varphi||_{L^q}.$$

Si $p = 1$ et donc $q = +\infty$, on a terminé, T_f est bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$. Si $p > 1$ et $q < +\infty$, on écrit pour un entier $N > d$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^q \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-N}(1+|x|)^N |\varphi(x)|^q \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^N}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N |\varphi(x)|^q \\ &\leq C \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{\frac{N}{d}} |\varphi(x)|\right)^q .\end{aligned}$$

D'où,

$$||\varphi||_{L^q} \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left((1+|x|)^{\frac{N}{q}} |\varphi(x)|\right).$$

Ainsi,

$$| < T_f, \varphi > | \leq C||f||_{L^p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left((1+|x|)^{\frac{N}{q}} |\varphi(x)|\right)$$

et $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

Remarque. Par ailleurs, le lemme de Dubois-Reymond nous permet d'identifier T_f à la fonction f de manière unique. L'application $f \mapsto T_f$ est une injection de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dans la suite nous ferons donc parfois l'abus de langage qui consiste à identifier T_f à f. Nous écrirons par exemple "soit f la distribution tempérée...".

Fonctions à croissance au plus polynomiale. En particulier, à toute fonction bornée est associée une distribution tempérée. Plus généralement, toute fonction mesurable à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$. En effet, soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurable et telle qu'il existe une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ |f(x)| \leq |P(x)|.$$

Soit $N > d + \deg P$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-N}|P(x)|(1+|x|)^N|\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|P(x)|\mathrm{d}x}{(1+|x|)^N}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N|\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Ainsi, pour une telle fonction f, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Un contre-exemple. La distribution définie par la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas tempérée. En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,2]$ et valant 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Pour $j \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\psi\left(\frac{x}{j}\right)$. Alors $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|x^\alpha \varphi_j^{(\beta)}(x)| &= \left|\sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left(-\frac{1}{2}\right)^\gamma x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{j^{\beta-\gamma}} \psi^{(\beta-\gamma)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \sup_{x\geq 0} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi^{(\beta-\gamma)}(x)| := M_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Or,

$$\langle T_{\mathrm{e}^{\cdot}}, \varphi_j \rangle = \int_0^{2j} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \psi\left(\frac{x}{j}\right) \mathrm{d}x \geq \int_{\frac{j}{2}}^{j} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{j}{2}} - 1) \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty.$$

Donc $T_{\mathrm{e}^{\cdot}}$ n'est pas tempérée.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Un dernier exemple. Toutefois, pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme. Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$. Alors $|f(x)| = \mathrm{e}^x$, mais $f(x) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ car $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Intuitivement, ce sont les oscillations rapides de la fonction qui compensent le comportement exponentiel (donc non tempéré) du module de la fonction.

3.2.2 Distributions de Dirac

Définition 3.2.2. *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution tempérée.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, $| < \delta_a, \varphi > | \leq 1 \cdot ||\varphi||_\infty$. Donc δ_a est une distribution tempérée.

□

La distribution de Dirac est un nouvel objet de la théorie des distributions. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Si cela était le cas, puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on aurait :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, si $a \notin \mathrm{supp}\ \varphi$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{a\})$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, $f = 0$ pp sur $\mathbb{R}^d \setminus \{a\}$, donc sur $\mathbb{R}^d$. Mais alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 = \varphi(a)$. En choisissant φ telle que $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

Exemple. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance polynômiale, *i.e.* telle qu'il existe $p \geq 0$, $a_k = \mathcal{O}(|k|^p)$ lorsque k tend vers l'infini. Alors la distribution sur $\mathbb{R}$,

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée. En effet, il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C(1 + |k|^{2p})$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi \rangle| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||\varphi(k)| \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + k^{2p})|\varphi(k)| \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}(1 + k^2 + k^{2p} + k^{2p+2})|\varphi(k)| \\
&\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} \sum_{i\leq 2p+2} p_{i,0}(\varphi)
\end{aligned}$$

et $C' = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} < +\infty$.

3.2.3 Valeur principale de $\frac{1}{x}$

La fonction inverse, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est dans aucun $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, +\infty]$. On ne peut donc pas définir à partir de cette fonction une distribution comme on l'a fait auparavant. Cependant, en prenant garde à éviter la singularité en 0 et en effectuant une intégration "symétrique" par rapport à 0, on va tout de même pouvoir associer une distribution à f.

Définition 3.2.3. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose*

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Alors $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution tempérée sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il s'agit tout d'abord de démontrer l'existence de la limite. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, en posant pour tout $\varepsilon > 0$, $I_\epsilon = \int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$, on a

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x := J_\varepsilon + K.$$

Par Taylor à l'ordre 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $|\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty$. Comme par imparité, $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(0)}{x} \mathrm{d}x = 0$, on a $I_\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \psi(x) \mathrm{d}x + K$. Comme ψ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \int_{|x|\leq 1} \psi(x) \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$\left| \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle \right| \leq C||\varphi'||_\infty + \left(\int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \right) \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\varphi(x)|.$$

Donc, $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

□

3.3 Opérations dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Voyons à présent les opérations que l'on peut définir sur les distributions tempérées.

3.3.1 Produit par une fonction de classe C^∞ tempérée

On commence par introduire l'ensemble des fonctions C^∞ tempérées sur $\mathbb{R}^d$. On note :

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^d) = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists k_N > 0,\ \exists C_N > 0,\ \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(\partial^\alpha a)(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{k_N} \right\}.$$

Définition 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$. La forme linéaire aT définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < aT, \varphi > = < T, a\varphi >$$

est une distribution tempérée appelée produit de a par T.

Démonstration : Tout d'abord, on a bien $a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ donc le membre de droite est bien défini. Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ et $C_{k,l} > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ | < T, \varphi > | \leq C_{k,l} \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Alors,

$$| < aT, \varphi > | = | < T, a\varphi > | \leq C_{k,l} \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Or, par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha (a\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta} \varphi.$$

Alors, pour tout α de longueur inférieure à l et tout β de longueur inférieure à k,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha (a\varphi)(x)| \leq 2^{|\alpha|} \max_{|\beta_1| \leq |\alpha|} \max_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^{\beta_1} a(x)| \cdot \max_{|\beta_2| \leq |\alpha|} \max_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^{\beta_2} \varphi(x)| := \tilde{C} p_{\alpha,\beta}(\varphi),$$

d'où, $p_{\alpha,\beta}(a\varphi) \leq \tilde{C} p_{\alpha,\beta}(\varphi)$ et on a finalement,

$$| < aT, \varphi > | \leq (C_{k,l} \tilde{C}) \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi),$$

ce qui montre que aT est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.

□

Nous avons facilement les propriétés suivantes. Pour $a, b \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ et $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$(a+b)T = aT + bT, \quad (ab)T = a(bT), \quad a(S+T) = aS + aT.$$

Exemple 3.3.2. *Si $a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ et si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour un $p \in [1, +\infty]$, on a : $aT_f = T_{af}$.*

Exemple 3.3.3. *Si $a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ et si $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on a : $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. En particulier dans $\mathbb{R}$, $x\delta_0 = 0$.*

3.3.2 Dérivation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Nous allons voir qu'il est possible de donner un sens à la dérivée d'une fonction qui n'est pas dérivable au sens classique. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction. La dérivée usuelle peut laisser échapper l'essentiel de la "vraie" dérivée, par exemple une masse de Dirac dans le cas de la fonction de Heaviside. Nous allons aussi voir, et c'est là l'un des concepts les plus étonnants de la théorie des distributions, que l'on peut dériver à n'importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques.

Le tout est de trouver "la bonne formule" pour définir la "bonne" notion de dérivée des distributions. Pour cela, regardons ce qui se passe dans le cas des distributions associées à une fonction f dans $C^1(\mathbb{R})$ et à croissance au plus polynômiale. Par intégration par parties (le crochet s'annulant pour des raisons de comportement à l'infini) :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ < T_{f'}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = - < T_f, \varphi' > .$$

Bien entendu, notre définition générale de la dérivée d'une distribution doit coïncider avec la notion de dérivée classique dans le cas des fonctions de classe C^1 et à croissance au plus polynômiale, nous allons donc adopter la définition suivante.

Définition 3.3.4. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. La forme linéaire $\partial_{x_i} T$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < \partial_{x_i} T, \varphi >= - < T, \partial_{x_i} \varphi >$$

est une distribution tempéré sur $\mathbb{R}^d$, appelée i-ième dérivée partielle de T.

Le fait que $\partial_{x_i} T$ soit une distribution tempérée est évident. La définition de $\partial_{x_i} T$ peut être itérée autant de fois que voulu, on peut donc définir, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > .$$

La dérivation se comporte bien vis-à-vis du produit par une fonction dans $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.3.5. *Soit $a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, $\partial_{x_i}(aT) = (\partial_{x_i} a)T + a\partial_{x_i} T$.*

Démonstration : Cela provient directement de la formule de Leibniz.

□

Exemple 3.3.6. *La dérivée d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ et à croissance au plus polynômiale est la distribution $T_{f'}$. C'est l'objet du calcul fait au début de cette section.*

Exemple 3.3.7. *La i-ième dérivée partielle d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et à croissance au plus polynômiale est la distribution $T_{\partial_{x_i} f}$. Cela résulte de la formule d'intégration par partie multidimensionnelle.*

Remarque. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, $\partial_{x_j} T$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc, si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $P\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 3.3.8. *Soit H la fonction de Heaviside qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$, $\frac{1}{2}$ en 0 et 1 sur $]0, +\infty[$. Alors, $H' = \delta_0$. En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ < H', \varphi >= - < H, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Exemple 3.3.9. *La fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \log|x|$ et une valeur quelconque en 0 est à croissance au plus polynômiale. On peut donc lui associer une distribution $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a alors : $(T_f)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi' >= - \int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x$. Or, par intégrabilité du logarithme en 0, on a

$$- \int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \log|x| \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x := - \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty \log(x) \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x.$$

On effectue une intégration par partie dans chacune des deux intégrales pour obtenir :

$$I_\varepsilon = - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x + \varphi(-\varepsilon) \log(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) \log(\varepsilon).$$

Or, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Donc $\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = -\varepsilon(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon))$, d'où

$$I_\varepsilon = - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x - \varepsilon \log(\varepsilon)(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)).$$

Comme $\varepsilon \log(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a finalement

$$< (T_f)', \varphi >= - \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

D'où le résultat annoncé.

3.4 Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Nous terminons cette section par la définition de la notion de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 3.4.1. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle.$$

La convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ à croissance tempérée.

Proposition 3.4.2. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers a dans $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a alors, avec convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,*

$$a_n T \xrightarrow[n\to\infty]{} aT, \quad aT_n \xrightarrow[n\to\infty]{} aT \quad \text{et} \quad a_n T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} aT.$$

Démonstration : Bien entendu, il suffit de montrer le troisième point. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Posons pour tout n, $\psi_n = a_n\varphi$. Alors, $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\varphi$ dans $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ par la formule de Leibniz, donc

$$< a_n T_n, \varphi > = < T_n, \psi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, a\varphi > = < aT, \varphi > .$$

□

La proposition suivante est tout à fait remarquable de simplicité lorsqu'on la compare aux énoncés équivalents dans le cadre des fonctions classiques qui requiert tous des hypothèses très fortes de convergence uniforme.

Proposition 3.4.3. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha T_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< \partial^\alpha T_n, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T_n, \partial^\alpha \varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha\varphi > = < \partial^\alpha T, \varphi > .$$

D'où le résultat voulu.

□

Chapitre 4

La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

4.1 Définition et propriétés

Nous avons déjà démontré au théorème 2.3.2 que pour toute paire de fonctions f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\mathrm{d}x.$$

Cette identité nous suggère de définir de manière analogue la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 4.1.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}T$ ou $\hat{T}$ est la distribution tempérée définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle.$$

La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour une distribution tempérée de la forme T_f avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On définit de manière analogue la transformation $\overline{\mathcal{F}}$.

Appliquer la transformée de Fourier à une distribution tempérée revient à l'appliquer à des fonctions tests dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il est donc naturel que toutes les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se transposent au cadre des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.1.2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire, continue, bijective et de réciproque continue. De plus, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 2.2.3. En effet, on a, pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$. Puis, si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle.$$

De même pour $\overline{\mathcal{F}}$, la réciproque de $\mathcal{F}$.

□

Proposition 4.1.3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a :*

1. *$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^d \check{T}$, où pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j} T) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}T$.*
3. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(x_j T) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j}\mathcal{F}T$.*
4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot\xi}\mathcal{F}T$.*
5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot x}T) = (\mathcal{F}T)\circ\tau_a$.*

Démonstration : Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 4.1.2. Les deuxièmes et troisièmes points sont directement obtenus à partir des résultats du théorème 2.3.1. Les quatrièmes et cinquièmes points sont une conséquence de la proposition 2.3.3.

□

Pour le moment, nous ne traduisons pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ les relations entre transformée de Fourier et convolution données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 4.1.4. 1. *On a $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}(\varphi))(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle.$$

2. *En combinant avec la translation τ_a, on obtient, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}$. Cette écriture a bien un sens puisque la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est toujours une distribution associée à une fonction de classe C^∞ (et même analytique).*
3. *On a $\mathcal{F}1 = (2\pi)^d\delta_0$. En effet, $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^d\check{\delta}_0 = (2\pi)^d\delta_0$.*
4. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. Alors :*

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \ \text{ et } \ (\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}.$$

   Cela découle directement de la proposition 4.1.3.
5. *Soit $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculons $\hat{T}$. On part de l'égalité $xT = 1$. Alors, $\mathcal{F}(xT) = 2\pi\delta_0$ soit encore $\mathrm{i}\partial_\xi\hat{T} = 2\pi\delta_0$. Par intégration, si H désigne la distribution de Heaviside, il existe $C \in \mathbb{R}$, $\hat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C$. Or, comme T est impaire, $\hat{T}$ aussi et $-2\mathrm{i}\pi + C = -C$ soit encore $C = \mathrm{i}\pi$. On obtient donc*

$$\mathcal{F}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = -2\mathrm{i}\pi H + \mathrm{i}\pi.$$

6. *On reprend les notations de l'exemple précédent. Alors, $\mathcal{F}\mathcal{F}T = 2\pi\check{T} = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, $-2\mathrm{i}\pi\mathcal{F}H + \mathrm{i}\pi 2\pi\delta_0 = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que*

$$\mathcal{F}H = -\mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0.$$

4.2 La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Nous avons déjà vu que $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont contenus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Voyons les propriétés particulières de la transformée de Fourier sur ces deux sous-espaces.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}f(x)\mathrm{d}x.$$

Alors $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, qui tend vers 0 à l'infini et dont une borne est donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\hat{f}(\xi)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

De plus, la distribution T_f est tempérée et on a :

$$\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}.$$

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi\rangle = \langle T_f, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\varphi(y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Or, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)\varphi(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y} f(x)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\hat{f}(y)\mathrm{d}y,$$

d'où le résultat annoncé.

Par ailleurs, on obtient aussi la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $\hat{f}$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(\hat{f}) = (2\pi)^d \check{f}$ presque partout.
En effet, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}\mathcal{F}T_f = (2\pi)^d \check{T}_f$ et comme $\hat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, les deux membres sont des fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, donc l'égalité a lieu presque partout.

4.3 La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Passons au cas de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Commençons par montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}T_f$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \mathcal{F}T_{f_n}, \varphi\rangle| = |\langle T_{f_n}, \mathcal{F}\varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(\xi)(\mathcal{F}\varphi)(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq ||f_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\mathcal{F}(\varphi)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{4.1}$$

avec $C = (2\pi)^d \sup_{n\geq 0} ||f_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$, constante déduite de l'utilisation du théorème de Plancherel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (voir théorème 2.3.2). Le sup sur n est bien fini car la suite converge.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, elle converge aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de sorte que, par continuité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}T_{f_n}$ tend vers $\mathcal{F}T_f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En faisant tendre n vers l'infini dans (4.1) on obtient

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle \mathcal{F}T_f, \varphi\rangle| \leq C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.2}$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité (4.2) s'étend à toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $\mathcal{F}T_f$ se prolonge par continuité en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de représentation de Riesz implique alors l'existence d'un élément $\hat{f}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}T_f, \varphi\rangle = (\hat{f}|\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On peut donc identifier $\mathcal{F}T_f$ à la fonction $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et ainsi $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Or, d'après l'inversion de Fourier pour les distributions tempérées,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)),$$

d'où
$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)) = L^2(\mathbb{R}^d).$$
De plus, $\mathcal{F}$ induit un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Enfin, l'égalité de Plancherel étant valable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par densité, elle est aussi valable sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que l'application $f \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\hat{f}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.
Nous pouvons résumer cette discussion par l'énoncé suivant.

Théorème 4.3.1. *L'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) & \to & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \\ T & \mapsto & (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}T \end{array}$$
induit une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Il existe des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.\xi}f(x)$ ne soit intégrable pour aucun ξ. Par exemple en dimension 1 il suffit de prendre $f(x) = (1+|x|)^{-\frac{3}{2}}$. Par contre, pour tout $R > 0$, la fonction définie par
$$g_R(\xi) = \int_{|x|\le R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.\xi} f(x)\mathrm{d}x$$
tend vers $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ compte tenu du théorème 4.3.1, puisque $f\mathbf{1}_{|x|\le R} \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On retrouve ainsi presque la formule classique de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$: si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\le R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

4.4 Transformée de Fourier partielle et applications

Dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$, nous noterons (t,x) où $t \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^d$ la variable. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$, on définit la transformation de Fourier partielle en x par la formule
$$\tilde{\mathcal{F}}(\varphi)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.\xi}\varphi(t,x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$
Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ définit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ dans lui-même d'inverse
$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x.\xi}\psi(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$
Par dualité, on peut alors définir $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ par
$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle.$$
Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme bicontinu (pour la convergence des suites) de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ dans lui-même. De plus, on a les formules
$$\tilde{\mathcal{F}}(D_x^\alpha T) = \xi^\alpha \tilde{\mathcal{F}}T, \tag{4.4}$$
avec $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_d}^{\alpha_d}$ et pour tout j, $D_{x_j} = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_j}$,
$$\tilde{\mathcal{F}}(x^\alpha T) = (-D_\xi)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}T, \tag{4.5}$$
et
$$\tilde{\mathcal{F}}(D_t^\beta u) = D_t^\beta \tilde{\mathcal{F}}u. \tag{4.6}$$

Exemple 4.4.1. *Calculons $\tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)}$. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$,*

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)}, \varphi\rangle = \langle \delta_{(0,0)}, \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)(0,0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

D'où

$$\tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi.$$

Nous allons voir comment appliquer cela à la recherche de solutions élémentaires d'opérateurs classiques de la physique.

Opérateur de la chaleur. Soit $P = \partial_t - \Delta_x$ agissant sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. On cherche à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ l'équation $PE = \delta_0$ d'inconnue E, avec E à support dans $\{(t,x) \ : \ t \geq 0\}$. Par transformée partielle de Fourier, cela revient à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ $(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi$ où l'on a posé $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{F}}E$.
Hors de $t = 0$, $\tilde{E}$ est solution de l'équation différentielle $(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{E} = 0$. Cette équation admet des solutions de la forme $\xi \mapsto a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. On cherche alors une fonction a telle que $\tilde{E}(t,\xi) = H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$ soit solution de notre équation initiale, où H désigne la fonction de Heaviside, indicatrice de $[0,+\infty[$. Or, on a :

$$\partial_t\tilde{E}(t,\xi) = -|\xi|^2 H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} + a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\delta_{t=0} \otimes 1_\xi = -|\xi|^2 H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} + \delta_{t=0} \otimes a(\xi).$$

Il suffit donc de prendre $a(\xi) = 1$, *i.e.* $\tilde{E}(t,\xi) = H(t)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. Cette formule définie bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t > 0$. Par inversion de Fourier ($\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}T = (2\pi)^d\check{T}$), on obtient $(2\pi)^d\check{E} = H(t)\tilde{\mathcal{F}}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. Par la transformée de Fourier de la Gaussienne dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (voir Exemple 2.4), on a

$$(2\pi)^d\check{E} = H(t)\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Alors, $\check{E} = E$ et on a finalement,

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Opérateur des ondes. On cherche $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ à support dans $\{(t,x) \ : \ t \geq 0\}$ telle que $\Box E = \delta_0$ où $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$ est le d'Alembertien dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$. Il est équivalent de résoudre $\tilde{\mathcal{F}}\Box E = \tilde{\mathcal{F}}\delta_0$, soit encore

$$(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi.$$

Hors de $t = 0$, la distribution $\tilde{E}$ est solution de l'équation $(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E} = 0$. C'est une équation différentielle en t qui admet des solutions de la forme $t \mapsto a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)$. Pour satisfaire la condition de support, on cherche $\tilde{E}$ sous la forme

$$\tilde{E}(t,x) = H(t)(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{E} &= \delta_{t=0}(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)) + H(t)(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|)) \\ &= H(t)(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|)) + \delta_{t=0} \otimes a(\xi).\end{aligned}$$

De même,

$$\partial_t\tilde{E} = H(t)(-a(\xi)|\xi|^2\cos(t|\xi|) - b(\xi)|\xi|^2\sin(t|\xi|)) + \delta_{t=0} \otimes |\xi|b(\xi) + \delta'_{t=0} \otimes a(\xi).$$

Pour que $\tilde{E}$ soit solution de notre équation, il suffit donc de prendre $a(\xi) = 0$ et $b(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$. On obtient alors

$$\tilde{E}(t,x) = H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

C'est une fonction de classe C^∞ en ξ et telle que $|\tilde{E}(t,\xi)| \leq \max(t,0)$, c'est donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Par transformée de Fourier inverse on obtient une solution élémentaire E de $\Box$ définie par

$$E = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left(H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right).$$

Chapitre 5

Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

5.1 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

5.1.1 Définitions et premiers exemples

Nous allons commencer par définir les espaces de Sobolev d'indice $m \in \mathbb{N}$ avant de généraliser à des indices quelconques dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.1. *L'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^d)$ est le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées u telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

On peut alors munir cet espace d'un produit scalaire définit ainsi :

$$\forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^d),\ (u|v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

Ce produit scalaire induit la norme suivante sur $H^m(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall u \in H^m(\mathbb{R}^d),\ ||u||_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 5.1.2. *L'espace $(H^m(\mathbb{R}^d), (\cdot|\cdot)_{H^m})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : C'est un conséquence directe de la complétude de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

□

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev à l'aide de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 5.1.3. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Démonstration : On se donne $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Or, si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi on a, pour tout α, $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi) \xi^\alpha|^2 < +\infty$$

car par la formule du binôme, il existe $C_m > 0$ telle que, pour tout $|\alpha| \leq m$,

$$\prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j} \leq (1+|\xi|^2)^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} \prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit encore $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$. La réciproque est alors immédiate avec les mêmes arguments.

□

On peut alors étendre les espaces de Sobolev à des indices non entiers pour pouvoir considérer une échelle continue d'espaces.

Définition 5.1.4. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ défini par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi < +\infty \right\}.$$

Notons ainsi que pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ceci n'est plus vrai pour $s < 0$. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est muni du produit scalaire

$$\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^d),\ (u|v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Cela a bien un sens car on intègre le produit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de deux distributions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ égales respectivement à $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\hat{v}(\xi)}$.
On peut alors définir sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ la norme

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ ||u||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Nous avons les premières propriétés suivantes.

Proposition 5.1.5.
1. *Si $s_1 \geq s_2$, alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ et l'injection est continue.*
2. *$(H^s(\mathbb{R}^d), (\cdot|\cdot)_{H^s(\mathbb{R}^d)})$ est un espace de Hilbert.*
3. *Si $s = m \in \mathbb{N}$, $H^m(\mathbb{R}^d)$ comme défini à la définition 5.1.1 et $H^s(\mathbb{R}^d)$ coïncident algébriquement et topologiquement.*

Démonstration : Le premier point résulte de l'inégalité $(1+|\xi|^2)^{s_2} \leq (1+|\xi|^2)^{s_1}$. Pour le second point, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle converge donc vers $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons $u = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, par le théorème de Plancherel, $u \in H^s$ et

$$||u_j - u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j - g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Le dernier point a été déjà été vu à la proposition 5.1.3.

□

Exemple 5.1.6. *On a $L^1(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $s < \frac{d}{2}$.*

Exemple 5.1.7. *Puisque l'espace de Schwartz est invariant par transformée de Fourier, il est clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Exemple 5.1.8. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, la distribution δ_a est dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, on remarque que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-\mathrm{i}a\xi}$, ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-\mathrm{i}a\xi}|^2(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Cette intégrale est convergente pour $s < -\frac{d}{2}$, divergente si $s \geq -\frac{d}{2}$. De même, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}(\partial_{x_j}\delta_a), \phi\rangle = \langle \partial_{x_j}\delta_a, \hat{\phi}\rangle = -\langle \delta_a, \partial_{x_j}\hat{\phi}\rangle = \mathrm{i}\xi_j e^{-\mathrm{i}a\xi}.$$

Ainsi on trouve $\partial_{x_j}\delta_a \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s < -\frac{d}{2} - 1$.

5.1.2 Densité des fonctions régulières

Théorème 5.1.9. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(v_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$. Posons pour tout j, $u_j = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}v_j)$. Alors $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et par Plancherel,

$$||u_j - u||_s = ||v_j - (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat voulu.

□

Corollaire 5.1.10. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Il suffit de raisonner par troncature et de montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $||\cdot||_s$. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau valant 1 si $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$. Posons $\theta_k(x) = \theta(\frac{x}{k})$ pour tout $k \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit s_0 un entier naturel tel que $s \leq s_0$. Posons pour tout $k \geq 1$, $u_k = \theta_k u$. Alors, $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$||u_k - u||_s^2 \leq ||u_k - u||_{s_0}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s_0} ||\partial^\alpha((\theta_k - 1)u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

d'après la proposition 5.1.3. Il suffit alors d'appliquer la formule de Leibniz et le théorème de convergence dominée pour montrer que ce majorant tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

□

5.1.3 Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^d)$

A partir de l'exemple des dérivées du Dirac, on généralise au résultat suivant.

Proposition 5.1.11. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha u$ est dans $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\partial^\alpha u||_{s-|\alpha|} \leq ||u||_s.$$

Démonstration : Comme on a démontré que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on en déduit, utilisant $|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\xi^\alpha \hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

$\square$

Le résultat suivant sur le produit par une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ permet de définir les espaces de Sobolev locaux $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Proposition 5.1.12. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\varphi u||_s \leq (2\pi)^{-d} 2^{\frac{|s|}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right) ||u||_s. \tag{5.1}$$

Ainsi, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ si on a, pour tout $K \subset \Omega$, $\forall \varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Par densité, on va commencer par démontrer l'inégalité (5.1) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons défini le produit de convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et montré son lien avec la transformée de Fourier. On a alors $\varphi u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-d} (\hat{\varphi} \star \hat{u})(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\eta. \tag{5.2}$$

Par ailleurs, montrons que l'on a l'inégalité :

$$\forall \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^d,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|} (1+|\eta|^2)^s. \tag{5.3}$$

En effet, on a $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$, d'où par l'inégalité d'Archimède, $|\xi|^2 \leq 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2)$ et

$$(1+|\xi|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2).$$

Si $s \geq 0$, par croissance on obtient bien (5.3). Traitons le cas $s < 0$. On écrit alors $|\eta| \leq |\xi - \eta| + |\xi|$ et comme dans le premier cas on obtient $(1+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\xi|^2)$ et puisque $s < 0$,

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s} (1+|\xi-\eta|^2)^{-s} (1+|\xi|^2)^{-s}$$

d'où encore (5.3) dans ce cas.

En utilisant (5.2) et (5.3), on obtient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\eta)| \mathrm{d}\eta \Big)^2 \mathrm{d}\xi.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale en η pour obtenir

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \Big) \times \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \Big) \mathrm{d}\xi.$$

Par changement de variable dans la première intégrale, il vient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \mathrm{d}\eta \Big) \times \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \Big).$$

En utilisant le théorème de Fubini dans l'intégrale double on obtient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \mathrm{d}\eta \right)^2 ||u||_s^2$$

ce qui prouve l'inégalité (5.1) pour φ et u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
On suppose à présent $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En écrivant (5.1) pour $u_j - u_k$, on voit que $(\varphi u_j)_{j\geq 1}$ est de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ qui est complet, donc il existe $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi u_j \to v$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Or, $\varphi u_j \to \varphi u$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc par unicité de la limite, $\varphi u = v \in H^s(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors (5.1) pour u_j et on passe à la limite. On obtient alors (5.1) pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

□

5.2 Théorème d'injection de Sobolev

Le fait d'être dans un espace de Sobolev signifie une certaine décroissance à l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. Cela correspond à une certaine régularité pour la distribution et les espaces de Sobolev forme ainsi une échelle de régularité. Il se trouve que pour s suffisament grand, cette régularité correspond à l'échelle de régularité classique des fonctions de classe C^k.
Commençons par introduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'espace $C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$ de limite nulle à l'infini ainsi que toute leurs dérivées, *i.e.*, $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \lim_{|x|\to+\infty} \partial^\alpha u(x) = 0.$$

On peut munir cet espace de la norme

$$|u|_k = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Théorème 5.2.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{d}{2} + k$. Alors l'espace $(H^s(\mathbb{R}^d), ||\cdot||_s)$ est inclus, avec injection continue, dans l'espace $(C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d), |\cdot|_k)$.*

Démonstration : Nous allons utiliser la fait que la transformée de Fourier envoie continûment l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$.
Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2} + k$. Alors $\hat{u}$ est mesurable et, pour tout $|\alpha| \leq k$, $(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, on peut écrire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}(\xi)| = \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)|.$$

Comme $2s - 2k > d$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et le membre de droite dans l'inégalité précédente est le produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il est donc dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et par intégration de l'inégalité, il existe $C > 0$, $||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s$.
Alors, $\partial^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}((-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}) \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$. Donc $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\forall |\alpha| \leq k,\ ||\partial^\alpha u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq ||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s.$$

□

Corollaire 5.2.2. *On a*

$$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty_{\to 0}(\mathbb{R}^d).$$

Remarque. Il faut prendre garde au fait que ce corollaire ne signifie pas que l'intersection de tous les $H^s(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour $d = 1$ par exemple, la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, de transformée de Fourier $\xi \mapsto e^{-|\xi|}$ est bien dans tous les $H^s(\mathbb{R})$, mais n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque. Le théorème d'injection de Sobolev n'est pas vrai pour $s = \frac{d}{2} + k$, il faut une inégalité stricte. Par exemple, pour $k = 0$, l'espace $H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

5.3 Dualité

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{v}(-\xi)$$

et ce second membre est donc le produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc, $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)$ est une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)\mathrm{d}\xi \right| \leq ||u||_s \, ||v||_{-s}. \tag{5.4}$$

Par conséquent, à partir de $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la forme linéaire $L_v : H^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ par

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ L_v(u) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

D'après (5.4), cette forme linéaire est continue et on a

$$||L_v||_{(H^s(\mathbb{R}^d))'} \leq (2\pi)^{-d}||v||_{-s}.$$

On peut donc définir une application

$$L : \begin{array}{ccc} H^{-s}(\mathbb{R}^d) & \to & (H^s(\mathbb{R}^d))' \\ v & \mapsto & L_v \end{array}.$$

Théorème 5.3.1. *L'application L est linéaire, bijective et bicontinue. Elle permet d'identifier le dual de $H^s(\mathbb{R}^d)$ à $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque. Pour $s = 0$ on retrouve la réflexivité de $L^2(\mathbb{R}^d)$ via Plancherel car pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on obtient $L_v(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration : Sa linéarité et sa continuité viennent d'être vues. Voyons tout d'abord son injectivité. Supposons que $L_v = 0$. Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $L_v(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$. Comme la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bijective, on en déduit que pour toute $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$. Donc, $\overline{\mathcal{F}}v = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ d'où $v = 0$ car $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}v = v$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. D'où l'injectivité de L.

Montrons la surjectivité de L. Soit $T \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$. Il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T, \varphi \rangle| \leq C||\varphi||_s.$$

D'autre part, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ car la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique celle de $H^s(\mathbb{R}^d)$. On peut alors écrire pour toute $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle| = |\langle (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle| \\ &\leq C||\varphi||_s \leq C'||(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En posant $\psi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on obtient donc

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, \psi\rangle| \leq C'||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Cette inégalité montre que $(1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la forme L^2. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour cette même norme, cette application linéaire continue se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que,

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle (1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, \psi\rangle = (\psi|w)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)\bar{w}(\xi)\mathrm{d}\xi = \langle \bar{w}, \psi\rangle.$$

On en déduit que $(1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T = \bar{w} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui prouve que $T \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\mathcal{F}}T(\xi)\mathrm{d}\xi = L_T(\varphi).$$

Donc $T = L_T$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ par densité. D'où la surjectivité de L.
Enfin, L^{-1} est continue par le théorème de l'isomorphisme de Banach.

□

5.4 Théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$

Considérons l'hyperplan de $\mathbb{R}^{d+1}$, $\{(x', x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_{d+1} = 0\}$, où x' désigne les d premières coordonnées. Nous nous intéressons à l'opérateur trace γ qui à une fonction raisonnable $(x', x_{d+1}) \mapsto \varphi(x', x_{d+1})$ associe la fonction $\gamma\varphi\ :\ x' \mapsto \varphi(x', 0)$. Cet opérateur γ est bien défini pour des fonctions continues, mais il n'a pas de sens a priori pour des classes de fonctions localement intégrables, l'hyperplan étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$. D'autre part, il existe des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ qui sont continues pour $x_{d+1} \neq 0$ et qui tendent vers $+\infty$ lorsque x_{d+1} tend vers 0. Il paraît alors exclu de définir la trace d'une telle fonction.
Nous allons montrer que l'on peut définir γu dès que $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Hormis en dimension 1 (et dans ce cas l'hyperplan considéré est réduit au singleton nul...), une telle condition n'implique pas la continuité de u. Nous allons donc construire γ par prolongement par continuité de l'opérateur trace usuel.

Théorème 5.4.1. *Si $s > \frac{1}{2}$, l'application*

$$\gamma\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & (x' \mapsto \varphi(x', 0)) \end{array}$$

se prolonge en une application continue γ de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. De plus, ce prolongement défini une application surjective.

Démonstration : Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}),\ ||\gamma\varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_s||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{5.5}$$

Pour cela, considérons $\psi(x') = \varphi(x', 0)$. Ainsi

$$\hat{\psi}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\varphi(x', 0)\mathrm{d}x'.$$

Notons $\tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_{d+1}\xi_{d+1}}\varphi(x', x_{d+1})dx_{d+1}$ la transformée de Fourier partielle de φ par rapport à x_{d+1}. Ainsi, par inversion de Fourier,

$$\varphi(x', x_{d+1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1})e^{ix_{d+1}\xi_{d+1}}d\xi_{d+1}$$

et

$$\psi(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1})d\xi_{d+1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi') &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix'\xi'}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1})d\xi_{d+1}dx' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-ix'\xi'-ix_{d+1}\xi_{d+1}}\varphi(x', x_{d+1})dx'dx_{d+1}d\xi_{d+1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1})d\xi_{d+1}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1})(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-\frac{s}{2}}d\xi_{d+1}\right|^2.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{s}d\xi_{d+1}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-s}d\xi_{d+1}.$$

Dans l'intégrale ne comportant pas φ, on effectue le changement de variable $\xi_{d+1} = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}u$. Il reste

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{s}d\xi_{d+1}(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}\int_{\mathbb{R}}(1+u^2)^{-s}du.$$

On remarque que la dernière intégrale converge bien par l'hypothèse $s > \frac{1}{2}$. On intègre alors en ξ' pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi' \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{du}{(1+u^2)^s}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{s}d\xi_{d+1}d\xi'.$$

On a alors l'inégalité (5.5) avec $C_s = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{du}{(1+u^2)^s}$.

Cette inégalité implique que γ peut être prolongée par continuité de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Pour ce faire, on considère $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ convergeant vers u au sens de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. La suite $\gamma\varphi_j$ est une suite de Cauchy dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, qui converge car l'espace est de Hilbert. La limite ne dépend pas de la suite φ_j choisie ; on la note γu et cela définit le prolongement par continuité de γ à $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$.

On remarque d'après nos calculs que l'on peut expliciter γ de la manière suivante :

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1}),\ \gamma u = \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{\xi_{d+1}}u(\xi', \xi_{d+1})d\xi'\right), \tag{5.6}$$

où on a mis en indice de la transformée de Fourier la variable concernée.

Il nous reste à démontrer la surjectivité de l'application γ que l'on vient de construire. Soit donc $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Notons $\xi' \mapsto g(\xi')$ la transformée de Fourier de v et définissons u, distribution sur $\mathbb{R}^{d+1}$, comme la transformée de Fourier inverse de la fonction f suivante,

$$\forall \xi = (\xi', \xi_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},\ f(\xi) = k_N \frac{(1+|\xi'|^2)^N}{(1+|\xi|^2)^{N+\frac{1}{2}}} g(\xi').$$

On va choisir les constantes N et k_N de sorte que $\gamma u = v$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. On veut donc montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1+|\xi|^2)^s |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty \tag{5.7}$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi', \xi_{d+1}) \mathrm{d}\xi_{d+1} = g(\xi'). \tag{5.8}$$

Par définition de f, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1+|\xi|^2)^s |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi'|^2)^{2N} |g(\xi')|^2 \mathrm{d}\xi' \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-2N-1} \mathrm{d}\xi_{d+1}. \tag{5.9}$$

La seconde intégrale est finie dès lors que l'on choisit $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$, et elle est égale, après changement de variable, à une constante fois $(1+|\xi'|^2)^{s-2N-\frac{1}{2}}$. Le membre de droite de (5.9) est donc égal à une constante fois $\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi'|^2)^{2N} |g(\xi')|^2 \mathrm{d}\xi'$ dont la finitude exprime précisément l'hypothèse $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons donc établit (5.7) sous la condition $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$.

D'après l'expression de f, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi', \xi_{d+1}) \mathrm{d}\xi_{d+1} = k_N (1+|\xi'|^2)^N g(\xi') \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

L'intégrale de droite est égale à une constante $c_{N+\frac{1}{2}} := \int_{\mathbb{R}} (1+\lambda^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda$ multiplié par $(1+|\xi'|^2)^{-N}$. Il suffit donc de choisir $k_N = 2\pi (c_{N+\frac{1}{2}})^{-1}$ pour avoir (5.8). Cela démontre la surjectivité de γ.

□