

Chapitre III : Déplacements des poutres en flexion

III.1) Théorème de réciprocité des travaux, théorème de réciprocité des déplacements :

III.1.1) Travail des forces extérieures :

Soit une poutre isostatique linéairement déformable soumise à deux forces concentrées P_1 et P_2 (Fig.III.1)

- a) Appliquons d'abord la charge P_1 , puis faisons subir à la poutre déformée la force P_2

Δ_{11} : Déplacement dans la direction de la charge P_1 produit par cette même charge.

Δ_{22} : Déplacement dans la direction de la charge P_2 produit par cette même charge.

Δ_{11} et Δ_{22} : sont appelés déplacements généraux

Δ_{12} : Déplacement dans la direction de la charge P_1 produit par la force P_2 .

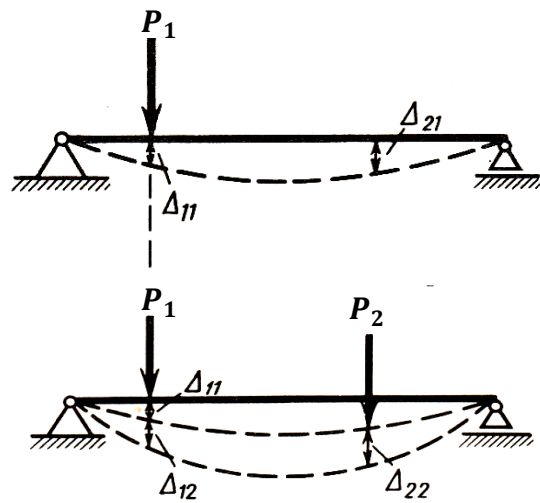


Fig.III.1 (1^{er} mode de sollicitation)

- Le travail de la force P_1 sur son déplacement Δ_{11} produit par cette même force est :

$$W_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} \quad (\text{III.1})$$

- Le travail de la force P_2 sur son propre déplacement Δ_{22} est :

$$W_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} \quad (\text{III.2})$$

- Le travail auxiliaire de la force P_1 sur le déplacement Δ_{12} dû à la force P_2 est :

$$W_{12} = P_1 \Delta_{12} \quad (\text{III.3})$$

Le travail total réalisé par les forces extérieures suivant le 1^{er} mode de sollicitation est :

$$W_I = W_{11} + W_{22} + W_{12}$$

b) Chargeons maintenant la poutre dans une autre succession : appliquons d'abord la force P_2 , puis la force P_1 (FigIII.2)

D'où :

$$W_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} \quad (\text{III.4})$$

$$W_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$W_{21} = P_2 \Delta_{21} \quad (\text{III.6})$$

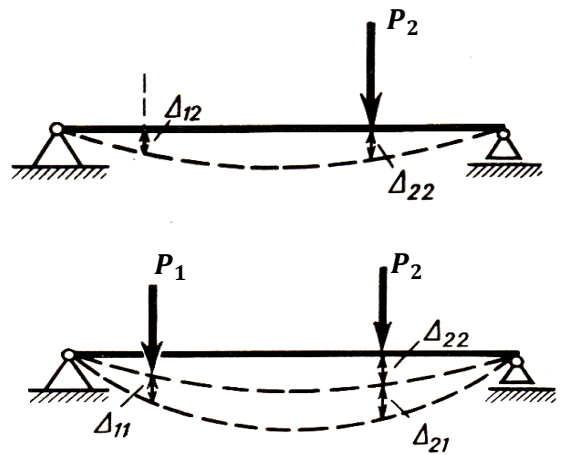


Fig.III.1 (2^{ème} mode de sollicitation)

Le travail total en 2^{ème} mode de sollicitation est :

$$W_{II} = W_{22} + W_{11} + W_{21}$$

Toutefois, le travail des forces ne dépend pas de l'ordre de leur application, par conséquent $W_I = W_{II}$

D'où $W_{12} = W_{21}$ ou

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21} \quad (\text{III.7})$$

D'où le théorème de réciprocité des travaux ou théorème de Betti, savant italien.

« Le travail produit par une force P_1 pour un déplacement dû à l'application d'une force P_2 est égal au travail produit par la force P_2 pour un déplacement dû à l'application de la force P_1 . »

III.1.1) Travail des forces intérieures :

D'une façon analogue, on peut démontrer la réciprocité du travail des forces intérieures

$$W_{12}^i = W_{21}^i$$

Le travail virtuel, par exemple W_{12}^i d'un élément de poutre de longueur dx vaut en valeur absolue (Fig.III.3)

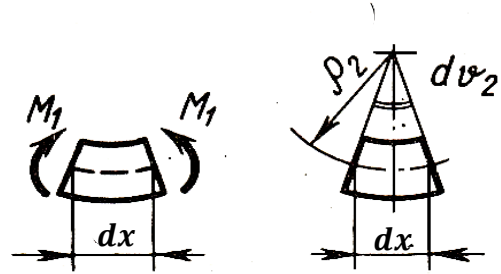


Fig.III.3

$$dW_{12}^i = M_1 dv_2 \quad (\text{III.8})$$

D'après le dessin $dv_2 = \frac{dx}{\rho_2}$ mais $\frac{1}{\rho_2} = \frac{M_2}{EI}$. Donc, $dv_2 = \frac{M_2 dx}{EI}$; en remplaçant cette dernière expression dans l'équation (III.8) on obtient :

$$dW_{12}^i = \frac{M_1 M_2 dx}{EI}$$

Le travail virtuel W_{12}^i pour toute la poutre de longueur l est :

$$W_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx \quad (\text{III.9})$$

Où M_1 et M_2 sont les valeurs courantes des moments fléchissant en premier état (première succession d'application des forces) et en deuxième états (deuxième succession d'application des forces).

Remarque : Portons notre attention sur le fait que dans cette formule, tout comme dans celle du travail virtuel des forces extérieures, le facteur $\frac{1}{2}$ ne figure pas.

D'une façon analogue, on peut montrer que le travail des forces intérieures en deuxième état sur les déplacements produits par les forces intérieures du premier état peut se calculer d'après la formule :

$$W_{21}^i = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx \quad (\text{III.10})$$

En comparant les expressions (III.9) et (III.10), on voit qu'en effet $W_{12}^i = W_{21}^i$, puisque

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

Ceci démontre la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures.

En utilisant la loi de conservation de l'énergie, on peut montrer que le travail supplémentaire des forces extérieures est égal en valeur absolue au travail supplémentaire des forces intérieures : $W_{12} = W_{12}^i$.

En effet, lorsque le système est soumis à la force P_1 , les forces extérieures effectuent le travail :

$$W_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}$$

Et les forces intérieures, le travail : $W_{11}^i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, on a :

$$\frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$$

Pour la sollicitation ultérieure du système par la force F_2 , on a, d'une façon analogue, l'égalité :

$$\frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_2^2}{EI} dx$$

D'autre part, lorsque le système subit la force F_2 , le travail complémentaire réalisé par la force F_1 est :

$$W_{12} = F_1 \Delta_{12}$$

Et par les forces intérieures :

$$W_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, le travail W_{12} doit être égal au travail W_{12}^i :

$$W_{12} = W_{12}^i ; \text{ d'une façon analogue } W_{21} = W_{21}^i \quad (\text{III.11})$$

Ce qui vient d'être dit implique également

$$W_{12} = W_{21} = W_{12}^i = W_{21}^i \quad (\text{III.12})$$

Remarque : ces relations seront utilisées par la suite pour justifier la méthode générale de la détermination des déplacements.

Le théorème de la réciprocité des travaux conduit en tant qu'un cas particulier à un autre théorème important, celui de la *réciprocité des déplacements* (théorème de Maxwell).

En adoptant $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{1}$, on obtient d'après la formule (III.7) à partir du théorème de Betti

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (\text{III.13})$$

Ici les déplacements produits par les forces égales à l'unité (forces unitaires) sont notés δ_{11} , δ_{12} , etc., au lieu Δ_{11} , Δ_{12} , etc., adoptés pour la notation des déplacements produits par des forces quelconques.

Théorème de Maxwell :

« Le déplacement du point d'application d'une force unitaire dans le sens de sa direction, provoqué par une deuxième force unitaire, est égal au déplacement du point d'application de la deuxième force unitaire dans le sens de la direction de celui-ci, résultant de l'action de la première force unitaire. »

III.2) détermination des déplacements par la méthode de Mohr. Règle de vérehtchaguine :

Examinons maintenant la méthode générale de détermination des déplacements pour tout système déformé linéairement sous une charge quelconque. Cette méthode est proposée par le savant éminent Mohr.

Supposons, par exemple, qu'il soit nécessaire de calculer le déplacement vertical du point **B** de la poutre représentée sur la figure(III.4.a). Notons par **C** l'état de sollicitation. Choisissons un état auxiliaire de la même poutre à force unitaire (adimensionnelle) appliquée au point **B** dans la direction du déplacement cherché. Désignons par **1** l'état auxiliaire (fig.III.4.b).

Calculons le travail des forces extérieures et intérieures de l'état auxiliaire sur les déplacements résultants de l'action des forces de l'état de sollicitation.

Le travail des forces extérieures est égal au produit de la force unitaire par le déplacement cherché y_B :

$$W_{1C} = 1 * y_B$$

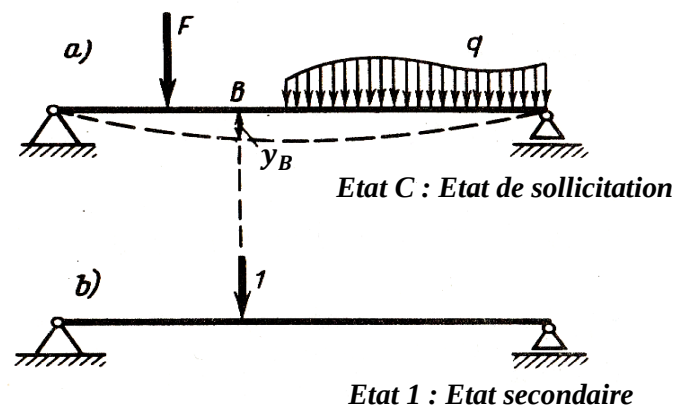
et le travail des forces intérieures, à l'intégrale

$$W_{1C}^i = W_{1c}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_C}{EI} dx$$

Mais, en vertu de l'égalité (III.12), on a

$$W_{1C} = W_{1c}^i \text{ ou }$$

$$y_B = \int_0^l \frac{M_C M_1}{EI} dx \quad (\text{III.14})$$



FigIII.4

Remarques :

- L'intégrale (III.4) est appelée l'**intégrale de Mohr** qui permet de calculer le déplacement en un point quelconque d'un système déformé linéairement.
- Le produit $M_1 M_C$ est positif si les deux moments fléchissant sont de même signe, et négatif si M_1 et M_C ont des signes différents.
- Si au lieu d'un déplacement, on devait calculer la rotation au point **B**, il faudrait appliquer à l'état **1** un moment égal à l'unité (adimensionnel).

$$\theta_B = \int_0^l \frac{M_C M_1}{EI} dx \quad (\text{III.15})$$

Dans le cas général, l'expression analytique de M_1 et M_c peut différer suivant les tronçons différents de la poutre. C'est pourquoi au lieu des équations (III.14) et (III.15), on utilise des formules plus générales.

$$y_B = \int_0^l \sum \frac{M_c M_1}{EI} dx \quad (\text{III.16})$$

$$\theta_B = \int_0^l \sum \frac{M_c M_1}{EI} dx \quad (\text{III.17})$$

Exemple d'application : déterminer le déplacement et la rotation au point d'application de la P (point A).

L'expression du moment dû à la charge :

$$M_c(x) = -P \cdot x$$

L'expression du moment dû à la force unitaire :

$$M_1(x) = -1 \cdot x$$

L'expression du moment dû au moment unitaire :

$$M_1(x) = -1$$

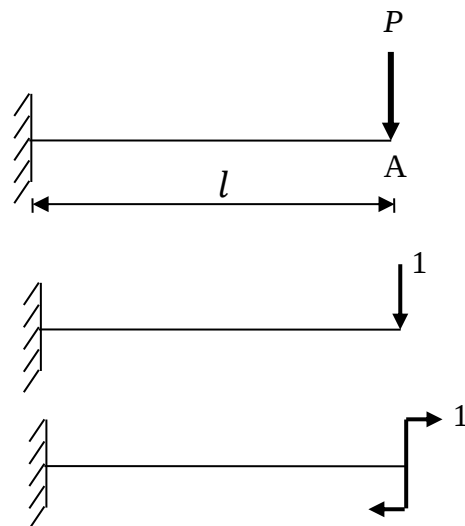


Fig.III.5

$$y_A = \int_0^l \frac{M_c(x) M_1(x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(Px^2)}{EI} dx = \frac{Px^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\theta_A = \int_0^l \frac{M_c(x) M_1(x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-Px)(-1)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(Px)}{EI} dx = \frac{Px^2}{2EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^2}{2EI}$$

III.3) Méthode de multiplication des diagrammes (règle de Vérechtchaguine) :

Le calcul de l'intégrale de Mohr peut être remplacé par le mode grapho-analytique ou la méthode de multiplication des diagrammes, ou encore la règle de Vérechtchaguine.

Considérons deux diagrammes des moments fléchissants, dont l'un, celui de M_C , est d'un contour arbitraire, alors que l'autre, celui de M_1 , est rectiligne (Fig.III.6).

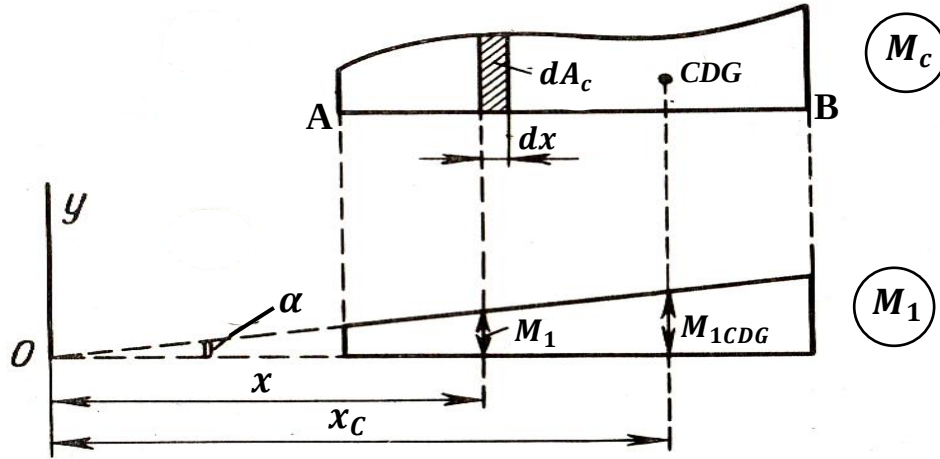


Fig.III.6

Admettons que la section de la barre du tronçon **AB** soit constante.

Dans ce cas,

$$\theta = \int_A^B \frac{M_C M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_A^B M_C M_1 dx \quad (\text{III.18})$$

La grandeur $M_C dx$ est l'aire élémentaire dA_C du diagramme de M_C (hachurée sur la figure). Ainsi,

$$\int_A^B M_C M_1 dx = \int_A^B M_1 dA_C \quad (\text{III.19})$$

$$\text{Mais } M_1 = x \tan \alpha ; \text{ d'où, } \int_A^B M_1 dA_C = \tan \alpha \int_A^B x dA_C \quad (\text{III.20})$$

$\int_A^B x dA_C$: est le moment statique du diagramme de M_C par rapport à un certain axe y passant par le point O et égal à $A_C x_C$.

$$\int_A^B x dA_c = A_c x_c \quad (\text{III.21})$$

Avec A_c : l'aire du diagramme des moments ;

x_c : la distance entre l'axe y et le centre de gravité du diagramme de M_c .

En remplaçant l'équation (III.21) dans l'équation (III.20), on obtient

$$\int_A^B M_1 dA_c = tg \alpha \cdot A_c \cdot x_c \quad (\text{III.22})$$

La figure (III.6) montre que : $x_c tg \alpha = M_{1CDG}$

où M_{1CDG} : est l'ordonnée du diagramme de M_1 sous le centre de gravité du diagramme de M_c (sous le point C).

d' où l'équation (III.22) devient :

$$\int_A^B M_1 dA_c = A_c M_{1CDG} \quad (\text{III.23})$$

En remplaçant cette équation dans l'équation (III.19) et le résultat dans l'équation (III.18), on obtient la formule de Vérechtchaguine :

$$\boxed{y = \frac{A_c M_{1CDG}}{EI}} \quad (\text{III.24})$$

La règle de Vérechtchaguine remplace donc, l'intégrale de Mohr par le produit de l'aire du diagramme M_c par l'ordonnée du diagramme rectiligne de M_1 sous son centre de gravité.

Remarque:

- on admet que la quantité $A_c M_{1CDG}$ est positive si les deux diagrammes reposent du même côté de la barre, et négative s'ils se trouvent des côtés différents
- Le résultat positif de la multiplication des diagrammes signifie que la direction du déplacement coïncide avec la direction de la force (ou du moment) unitaire.
- Il faut retenir qu'il est de rigueur que le diagramme où est prise l'ordonnée M_{1CDG} doit être rectiligne.

- Pour les barres de sections variables, la règle Vérehtchaguine de la multiplication des diagrammes est inapplicable du que EI ne peut déjà plus être sortie du signe d'intégration. Il faut alors exprimer la quantité EI comme fonction de l'abscisse de la section et calculer l'intégrale de Mohr.
- Pour accélérer les calculs, on peut utiliser les tableaux pour prêts des produits des diagrammes des tableaux.

Exemple d'application : déterminer le déplacement et la rotation au point d'application de la force P (point A).

$$\frac{2}{3}l = \frac{x}{l} \rightarrow x = \frac{2}{3}l$$

$$y = \frac{A_C M_{1CDG}}{EI} = \frac{\frac{pl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}l}{EI} = \frac{pl^3}{3EI}$$

$$\theta = \frac{A_C M_{1CDG}}{EI} = \frac{\frac{pl^2}{2} \cdot 1}{EI} = \frac{pl^2}{2EI}$$

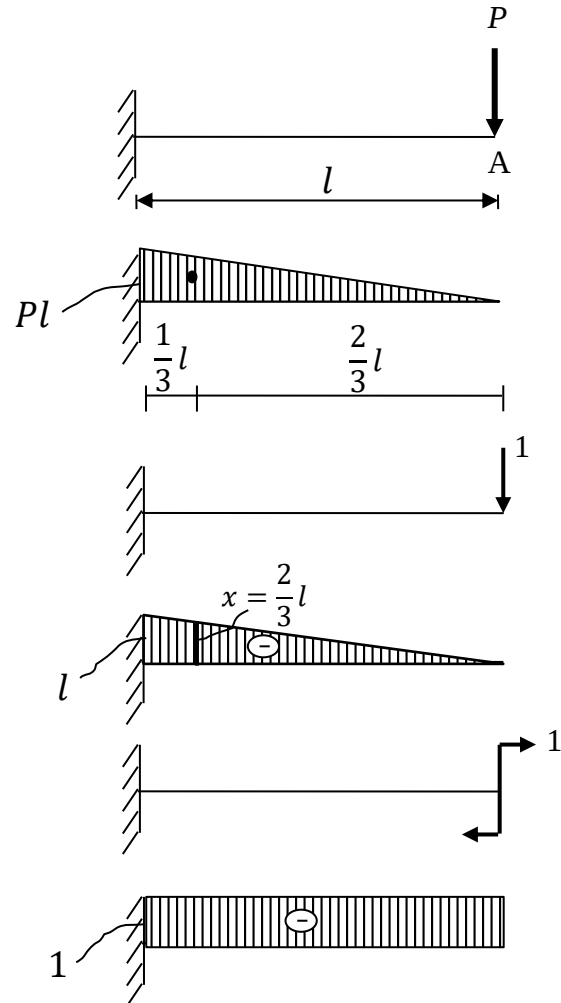


Fig.III.7

III.4) Méthode énergétique de calcul des déplacements : « Théorème de Gastigliano » :

On suppose que :

- Les déplacements sont élastiques « loi de Hooke applicable »
- Les forces sont appliquées statiquement

L'expression générale de l'énergie potentielle d'une barre est :

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{Voir cours RDM1})$$

Théorème de Gastigliano (Ingénieur Italien 1847-1884) : *la dérivée partielle de l'énergie potentielle d'un système par rapport à la force est égale au déplacement du point d'application de la force dans la direction de cette force.*

- Pour déterminer par exemple le déplacement au point d'application de la force P_1 , on dérive l'énergie potentielle de flexion par rapport à la force P_1 .

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx$$

$$y_1 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P_1} dx$$

- Pour déterminer la rotation au point d'application du moment concentré de flexion M_1 , on dérive l'énergie potentielle de flexion par rapport au moment concentré M_1

$$\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1} \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx$$

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M_1} dx$$

Exemple d'application : A l'aide du théorème de Gastigliano, déterminer le déplacement et la rotation au point d'application de la force **P** (point A).

Calcul du déplacement au point A :

$$M(x) = -Px$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x$$

$$y_A = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx$$

$$y_A = \int_0^l \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{Px^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

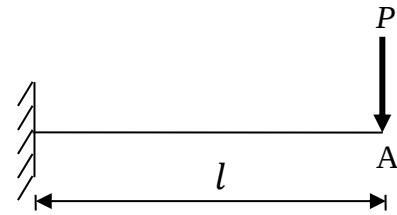


Fig.III.8

Calcul de la rotation au point A :

Au point A le moment concentré n'existe pas. Pour appliquer cette méthode, on suppose un moment concentré fictif au point A, qu'on annulera après calcul.

$$M(x) = -Px - M$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M} = -1$$

$$\theta_A = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx$$

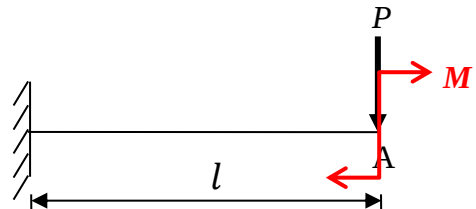


Fig.III.9

$$\theta_A = \int_0^l \frac{(-Px - M)(-1)}{EI} dx = \int_0^l \frac{Px + M}{EI} dx = \frac{Px^2 + Mx}{2EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{avec } M = 0$$