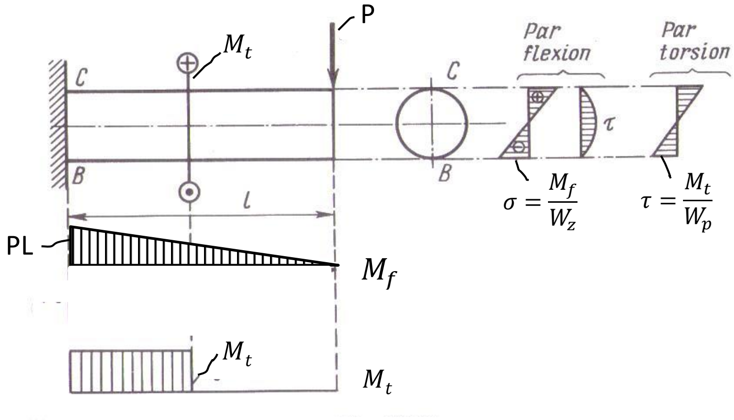
Chapitre 3 : ***Torsion avec flexion***

3.1) Contraintes :

La barre représentée sur la figure (3.1) travaille à la torsion et à la flexion.
En construction mécanique les pièces qui travaillent à la torsion et à la flexion sont très nombreuses. Leur exemple est fourni par les arbres de diverses machines.



(Fig.3.1)

En appliquant le principe de l'indépendance de l'effet des forces, on calcule, d'une part, la contrainte tangentielle engendrée dans la barre par la torsion, de l'autre part, les contraintes normales et tangentielles engendrées par la flexion simple.

En flexion les sections droites de la barre subissent :

- des contraintes normales qui atteignent les valeurs maximales dans les fibres extrêmes :

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_z} \qquad (3.1)}$$

- Et des contraintes tangentielles qui se calculent d'après la formule de Jouravski et atteignent la valeur maximale près de l'axe neutre. *Pour les sections circulaires pleines les contraintes tangentielles sont négligeables par rapport à celle dues à la torsion.*

En torsion les sections droites de la barre subissent :

- des contraintes tangentielles qui atteignent la valeur maximale sur le contour de la section

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{2W_z} \qquad (3.2)}$$

Dans le cas visualisé par la figure (Fig.3.1) la section soumise au moment fléchissant maximal se confond avec la section subissant le moment de torsion maximal : c'est la section d'encastrement. Dans cette section les points qui présentent le danger sont ***C*** et ***B***.

3.2) Etat de contraintes :

Examinons l'état de contrainte au point ***C*** figure (Fig.3.2) :

- ✓ La section droite qui passe par ce point subit les contraintes tangentielles maximales produite par la torsion $\tau = M_t/W_p$ et les contraintes normales maximales (dans notre cas, de traction) dues à la flexion $\sigma = M_f/W_z$

- ✓ La section longitudinale ne subit pas de contraintes normales, alors qu'en vertu de la loi de la parité les contraintes tangentielles ont la même valeur que dans la section droite.

L'état de contrainte étant bi-axial, pour réaliser la vérification de la résistance appliquons l'une des hypothèses de la résistance. Considérons les arbres en acier et appliquons la 3ème ou la 4ème hypothèse de résistance. A cet effet, il faut déterminer les contraintes principales de l'état de contrainte donné (Fig.3.2). Les contraintes principales se calculent d'après la formule connue

$$\boxed{\sigma_{1,3} = \sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad (3.3)}$$

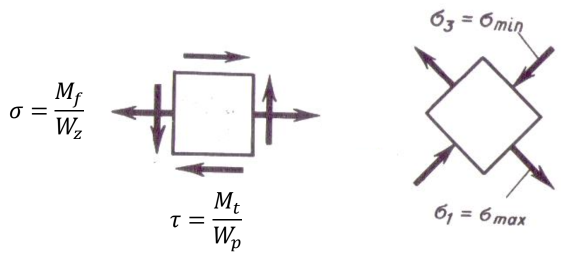


Fig.3.2

3.3) Vérification de la résistance :

3.3.1) D'après la 3ème hypothèse de la résistance (hypothèse des contraintes tangentielles maximales), pour l'état de contrainte plan la condition de résistance est de la forme :

$$\sigma_{réd} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$$

En remplaçant les valeurs de σ_1 et σ_3 d'après la formule (3.3), on aura

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Compte tenu que $\sigma = M_f/W_z$ et $\tau = M_t/2W_z$, il vient :

$$\boxed{\sigma_{réd} = \frac{\sqrt{M_f^2 + {M_t}^2}}{W_z} \leq \sigma_{adm}}$$

On en tire la relation pour le choix de la section (calcul de conception) :

$$\boxed{W_z = \sqrt{M_f^2 + {M_t}^2}/\sigma_{adm} \qquad (3.5)}$$

Rappelons que dans le cas où l'arbre subit la flexion dans deux plans perpendiculaires, il vient :

$$M_f = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

3.3.2) D'après la 4ème hypothèse de la résistance (hypothèse de l'énergie potentielle du changement de forme), pour l'état de contrainte plan la condition de résistance est de la forme :

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_{adm}$$

En remplaçant les valeurs de σ_1 et σ_3 d'après la formule (3.3), on aura :

$$\boxed{\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm} \quad (3.6)}$$

mais $\sigma = M_f/W_z \quad et \quad \tau = M_t/2W_z$ d'où $\boxed{\sigma_{réd} = \frac{\sqrt{M_f^2+0{,}75M_t{}^2}}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad (3.7)}$

On en tire pour le choix de la section : $\boxed{W_z = \frac{\sqrt{M_f^2+0{,}75M_t{}^2}}{\sigma_{adm}} \qquad (3.8)}$