Chapitre II **:** ***Sollicitations composées***

I.1) Généralités :

Nous avons examiné en **RDM1** quatre formes de sollicitation simple d'une barre que sont la traction (compression) centrale (simple), cisaillement, torsion ou la flexion plane. Les sections droites de la barre subissaient toujours sous l'action de la charge un seul effort intérieur (effort normal ou tranchant, moment de torsion ou moment fléchissant). Il n'y avait d'exception que pour le cas général de la flexion plane (simple), lorsque les sections droites de la barre sont simultanément soumises à deux efforts intérieurs, le moment fléchissant et l'effort tranchant.

Or , dans la pratique on tombe souvent sur des cas plus compliqués, lorsque la barre est sollicitée dans ses sections droites par plusieurs forces internes, et le calcul à la résistance doit rendre compte de leur action simultanée, par exemple, de celle de l'effort tranchant et du moment de torsion, ou de la combinaison de trois et plus efforts intérieurs. Ces cas s'appellent sollicitation composée.

L'ordre de résolution de tels problèmes est le suivant.

On détermine d'abord par la méthode des sections les facteurs de force intérieurs subis par la section droites.

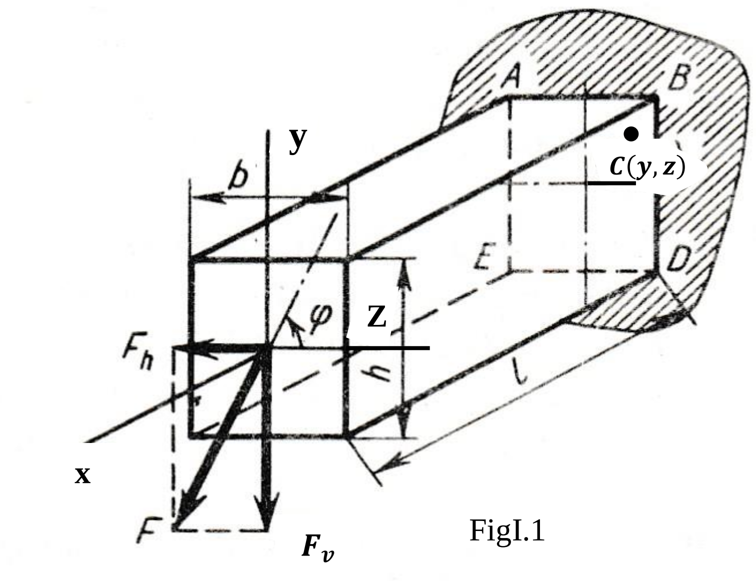
Pour une charge composée, il est recommandé de suivre les étapes suivantes :

- ❖ Construire les diagrammes des efforts intérieurs, qui permettent de déterminer la position de la section dangereuse.
- ❖ Sur la base du principe de l'indépendance de l'effet des forces, on détermine les contraintes normales et tangentielles pour chaque effort intérieur séparément, en utilisant les formules obtenues dans les chapitres précédents.
- ❖ En explorant la distribution des contraintes suivant la section on établit le point dangereux pour lequel on compose la condition de la résistance.

I.2) Flexion déviée (flexion dans deux plans) :

I.2.1) Section rectangulaire « section possédant des points angulaire »

- la flexion déviée apparaît lorsque les forces extérieures perpendiculaires à l'axe de la barre ne reposent pas dans le plan passant par l'axe principal de la section droite fig. I.1.
- Dans ce cas, le moment fléchissant engendré dans la section peut être décomposée en deux moments qui agissent dans les plans passant par les axes principaux de la section. Ainsi la flexion déviée peut être envisagée comme la combinaison de deux flexions simples dans des plans respectivement perpendiculaires.



FigI.1

Considérons, par exemple, le point $\boldsymbol{C(y,z)}$ de la section d'appui :

1) Le moment fléchissant subi par la section de la barre dans le plan vertical :

$M_z = F_v\, l = Fl \sin\varphi$

$M_y = F_h\, l = Fl \cos\varphi$

La contrainte globale au point $c(y,z)$ est : $\sigma(y,z) = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y}$

$$\boxed{\sigma(y,z) = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y}} \qquad (\mathrm{I}.1)$$

Remarque :

- Cette formule est justifiée pour toute autre section de la poutre.
- Si la section comporte des points angulaires en saillie tels que $\boldsymbol{Z_{max}}$ et $\boldsymbol{Y_{max}}$ sont atteints simultanément (rectangle, section en **H**), en ces points apparaît la contrainte maximale en valeur :

$$\boxed{\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm\frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}} \qquad (\mathrm{I.}\,2)$$

Avec : $\boldsymbol{W_z = 2I_z/h}$ est le moment résistant de la section par rapport à l'axe **Z**

$\boldsymbol{W_y = 2I_y/h}$ est le moment résistant de la section par rapport à l'axe **Y**

Les points présentant un danger sont les points angulaires de la section où sont sommées les contraintes de même signe.

$$\sigma_B = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \quad ; \quad \sigma_E = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}$$

I.2.1) Section de contour arbitraire ne possédant aucun point angulaire :

Pour déterminer $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ et $\boldsymbol{\sigma_{min}}$, on doit déterminer d'abord la position de la ligne neutre c.-à-d. l'ensemble des points de la section où les contraintes normales sont nulles. Autrement dit, on détermine la ligne de séparation des parties sollicitées à la traction et des parties subissant la compression.

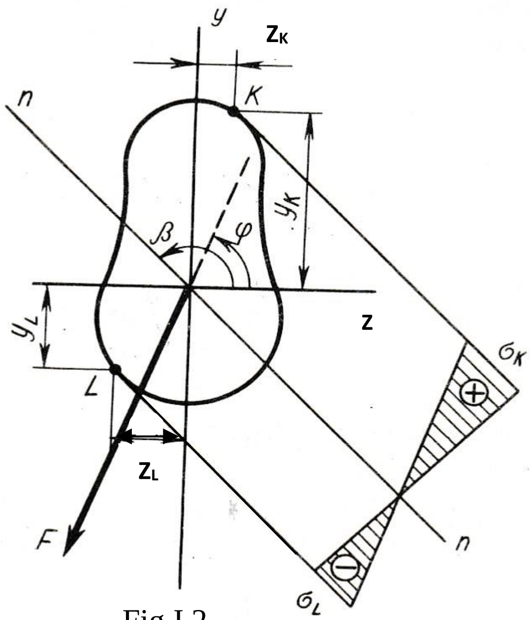


Fig.I.2

L'équation de la ligne neutre s'obtient en annulant le 1ème membre de la formule (I.1).

$$\frac{M_z y_0}{I_z} + \frac{M_y Z_0}{I_y} = 0$$

avec : y_0 et Z_0 coordonnées courantes des points de l'axe neutre

d'où $$M_Z\left(\frac{y_0}{I_Z} + K\frac{Z_0}{I_y}\right) = 0 \qquad \text{(I.3)}$$

avec : $$K = \frac{M_y}{M_Z} = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} = cotg\varphi \qquad \text{(I.4)}$$

Etant donné que $M_Z \neq 0$, il vient :

$$\frac{y_0}{I_z} + K\frac{Z_0}{I_y} = 0 \qquad \text{(I.5)}$$

Cette équation est l'équation de la ligne neutre. C'est une équation de la droite qui passe par l'origine des coordonnées. En divisant ses membres par $\boldsymbol{Z_0}$, on obtient :

$$\frac{y_0}{Z_0}\frac{1}{I_Z} + K\frac{1}{I_y} = 0 \qquad \text{(I.6)} \qquad \begin{cases} \text{équation de la ligne neutre} \\ avec\ K = \frac{M_y}{M_Z} = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} = cotg\varphi \end{cases}$$

Or, le rapport $\frac{y_0}{Z_0} = tg\beta$, tangente de l'angle d'inclinaison de la ligne neutre à l'axe **Z**, est son coefficient angulaire.

Donc, $\frac{tg\beta}{I_Z} + K\frac{1}{I_y} = 0$

D'où $$\boxed{tg\beta = -K\frac{I_Z}{I_y} = -cotg\varphi\frac{I_Z}{I_y}} \qquad (I.7)$$

$$\boxed{tg\beta = -\frac{M_y}{M_Z}\frac{I_Z}{I_y}} \qquad (I.8)$$

<u>Remarque</u> :

- L'équation (I.7) montre que pour $I_z \neq I_y$ la ligne neutre n'est pas perpendiculaire à la ligne de force, comme il en a été dans le cas de la flexion simple.
- Dans le cas particulier $I_z = I_y$ (cercle, carré……etc.), on a :

$$tg\beta = -cotg\varphi = -tg(90° - \varphi) = tg(\varphi - 90°)$$

D'où, $\beta = \varphi - 90°$

Par conséquent, la ligne neutre est perpendiculaire à la ligne de force : c'est le cas de **la flexion simple**.

I.3) Vérification de la résistance :

Après avoir déterminé la position de la ligne neutre et trouvé les points de la section droite les plus éloignés de celle-ci (points dangereux**),** on procède à la vérification de la résistance de la section :

- Si le matériau de la poutre résiste d'une façon différente à la traction et à la compression.

$$\boxed{\sigma_K = +\frac{M_Z y_K}{I_z} + \frac{M_y Z_K}{I_y} \leq \sigma_{adm}^t} \qquad (I.9)$$

$$\boxed{\sigma_L = -\frac{M_Z y_L}{I_z} - \frac{M_y Z_L}{I_y} \leq \sigma_{adm}^c} \qquad (I.10)$$

❖ Si le matériau de la poutre à la même résistance à la traction et à la compression c.-à-d. $\boldsymbol{\sigma^t_{adm}} = \boldsymbol{\sigma^c_{adm}}$

La vérification se fait pour le point le plus éloigné de la ligne neutre (pour ce cas le point K)

Remarque :

1) Le choix de la section circulaire se fait d'après la formule du moment fléchissant global en flexion simple.

$$M_{tot} = \sqrt{{M_Z}^2 + {M_y}^2}$$

du fait que pour un cercle la ligne neutre est perpendiculaire à la ligne d'action de $\boldsymbol{M_{tot}}$.

2) Pour une section rectangulaire l'aire minimale de la section correspond à la condition : $\frac{h}{b} = \frac{M_Z}{M_y}$

3) En flexion déviée, les flèches sont déterminées isolément dans chaque plan. La flèche globale se calcule comme la somme géométrique des composantes des flèches constitutives.

$$f_{tot} = \sqrt{{f_h}^2 + {f_v}^2}$$

Ou f_h et f_v sont les flèches dans les plans horizontal et vertical.

4) Les moments de flexion M_y et M_Z sont considérés positifs, s'ils engendrent des contraintes de tractions en tous points du premier quadrant de la section.

I.3) Flexion et charge axiale combinée « Flexion composée » :

I.3.1) Généralité :

Il est très fréquent que la charge longitudinale est appliquée non pas au centre de gravité de la section droite de la barre, mais en est déplacée (excentré) par rapport aux axes principaux de la section (Fig.I.3.*a*).

En réduisant la charge longitudinale au centre de gravité, on obtient un effort normal ***N*** *et* deux moments fléchissant $\boldsymbol{M_z}$ et $\boldsymbol{M_y}$ (Fig.I.3.*b*).

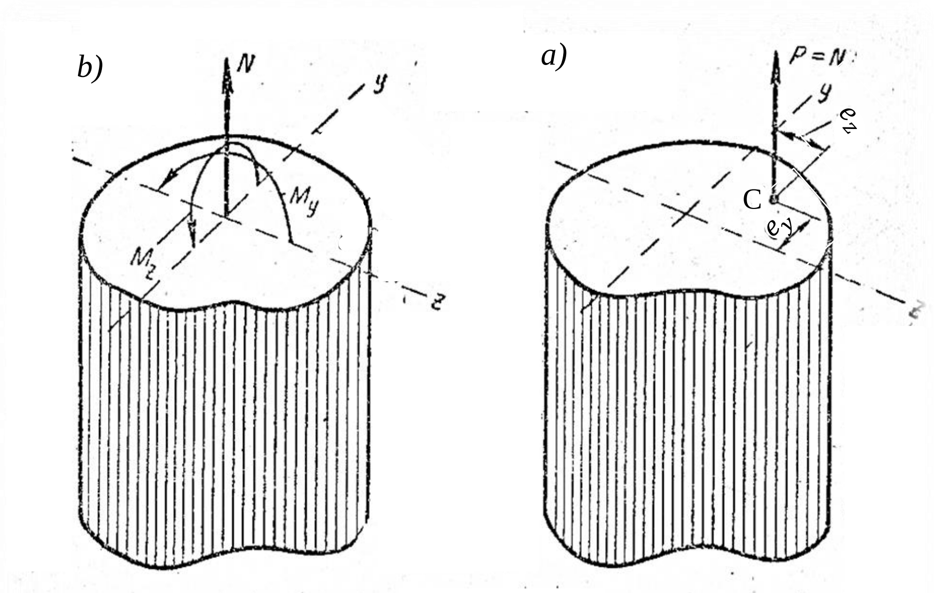


Fig.I.3

En un point quelconque de la section droite de coordonnées ***x*** et ***y***, la contrainte est déterminée, de même qu'en traction axiale avec flexion dans deux plans.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z . y}{I_z} + \frac{M_y . z}{I_y} \qquad \text{(I.11)}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N . e_y}{I_z} y + \frac{N . e_z}{I_y} z \qquad \text{(I.12)}$$

D'où $$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z\right) \qquad \text{(I.13)}$$

Avec : $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $\left\{ \begin{array}{c} \textit{ces quantités caractérisent la} \\ \textit{géométrie de la section et} \\ \textit{s'appelle rayon de giration de} \\ \textit{la section par rapport aux} \\ \textit{axes } z \textit{ et } y \end{array} \right.$

Remarque :

- L'effort normal ***N*** est positif dans le cas de la traction et négatif dans le cas de la compression.
- Les valeurs de e_y, e_z, y et z seront prises avec leur signe.

I.3.2) Position de l'axe neutre :

Pour déterminer la position des points dangereux, on doit établir la position de la ligne neutre dont l'équation s'obtient en annulant la contrainte.

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2}y + \frac{e_z}{i_y^2}z\right) = 0 \quad et\ puisque\ \ \frac{N}{A} \neq 0\ ;$$

$$\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2}y + \frac{e_z}{i_y^2}z\right) = 0 \qquad \text{(I. 14)}$$

Pour déterminer la position de la ligne neutre, déterminons l'ordonnée $\boldsymbol{y_n}$ de son point d'intersection ***B*** avec l'axe ***y*** (l'abscisse du point ***B*** est nulle) (Fig.I.4).

De l'équation (I.14), on obtient :

$$\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2}y_n + 0\right) = 0 \quad ; \qquad y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

L'abscisse du point d'intersection de l'axe neutre avec l'axe ***Z*** est $\boldsymbol{Z_n}$. En remplaçant dans l'équation (I.14) $\boldsymbol{Z = Z_n}$ et $\boldsymbol{y = 0}$ nous aurons :

$$\left(1 + \frac{e_z}{i_y^2}Z_n + 0\right) = 0 \qquad Z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}$$

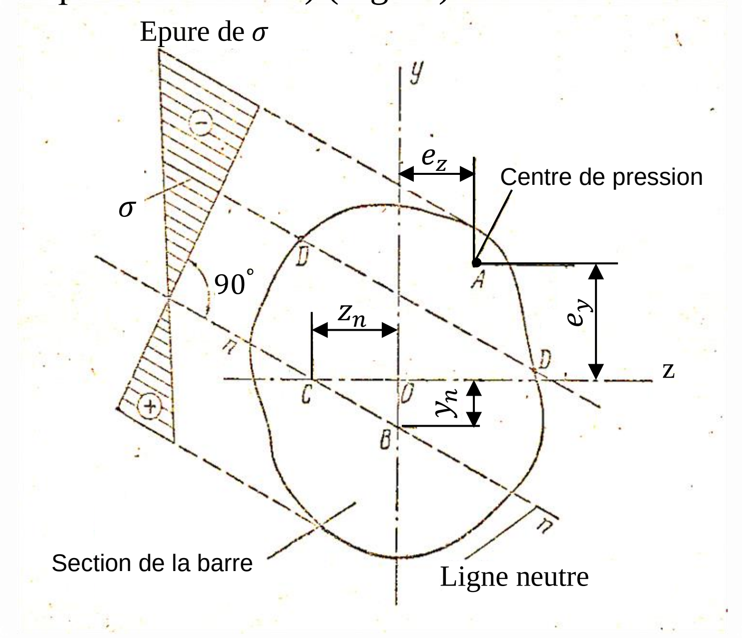


Fig.I.4

La position de l'axe neutre sera déterminée par les coordonnées: $\left.\begin{array}{l} y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} \\ Z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} \end{array}\right\} (I.16)$

Remarque :

- La position de l'axe neutre ne dépend pas du signe et de la valeur de la force $\boldsymbol{N}$.
- Le centre de pression et l'axe neutre se trouvent dans deux positions opposées.
- Si le centre de pression se trouve sur l'un des axes principaux d'inertie, l'axe neutre se trouve alors perpendiculaire à celui-ci.

I.3.3) Cas particuliers : (le centre de pression se trouve sur l'un des axes principaux)

Soit $\boldsymbol{M_y} = \mathbf{0}$ (Fig.I.9) dans ce cas selon la formule (I.11), on obtient :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_Z . y}{I_Z}$$

D'où $$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \qquad (I.17) \qquad \begin{cases} avec\ w_Z = \dfrac{I_Z}{h/2} \\ w_Z : module\ de\ résistance \end{cases}$$

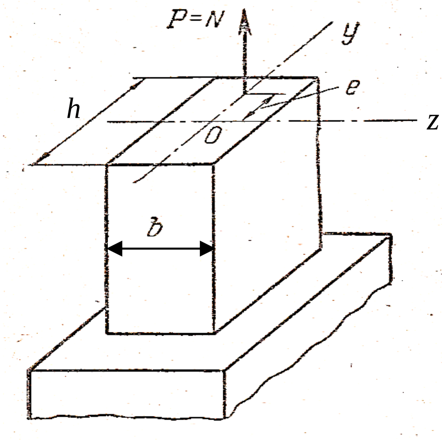


Fig.I.5

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{N.e}{\frac{bh^2}{6}} \qquad ;$$

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{bh}\left[1 \pm \frac{6e}{h}\right] \qquad (I.18)$$

Cette formule permet de construire le diagramme des contraintes.

Etudions les différents cas de valeurs de l'excentricité $\boldsymbol{e}$:

- L'excentricité $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ (Fig.I.6) :

$$\sigma_{max} = \sigma_{min} = \frac{N}{bh}\ (cas\ de\ la\ traction\ simple)$$

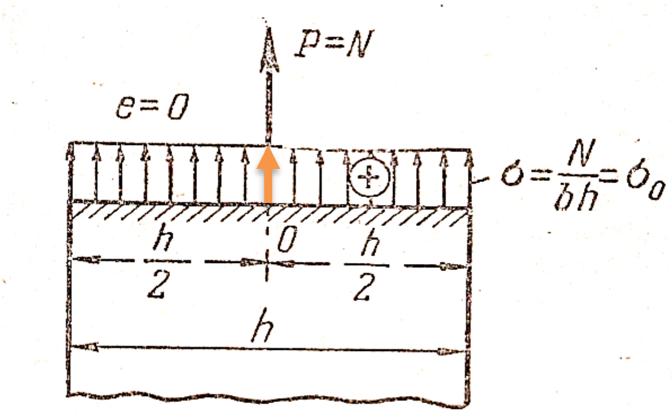


Fig.I.6

- L'excentricité $\mathbf{0} < \boldsymbol{e} < \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$ les contraintes $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ et $\boldsymbol{\sigma_{min}}$ auront le même signe (Fig.I.7).

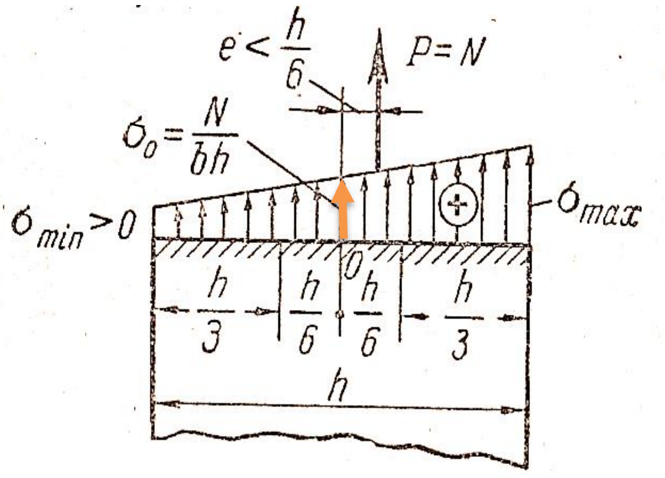


Fig.I.7

- L'excentricité $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$ dans ce cas : $\boldsymbol{\sigma_{max}} = \frac{2N}{bh}$ et $\boldsymbol{\sigma_{min}} = \mathbf{0}$ (Fig.I.8).

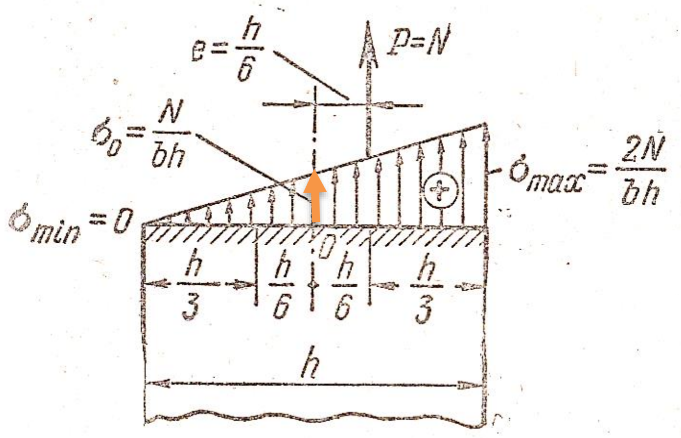


Fig.I.8

- Si l'excentricité $\boldsymbol{e} > \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{6}}$ les contraintes $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ et $\boldsymbol{\sigma_{min}}$ auront un signe différent (Fig.I.9).

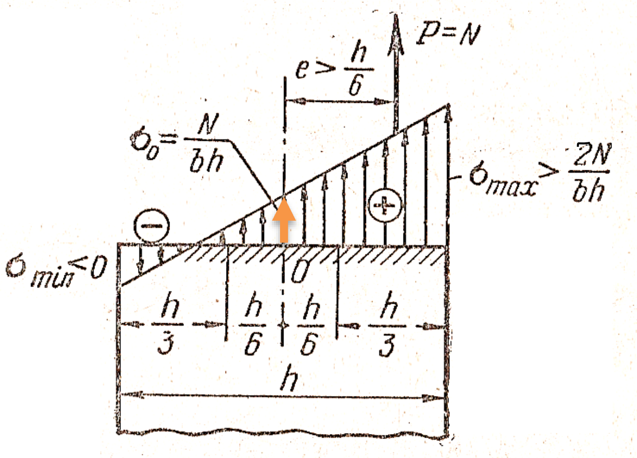


Fig.I.9

Remarque : dans tous les cas de figure ci-dessus la contrainte σ_0 au centre de gravité de la section a la même valeur que la flexion simple $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{bh}}$

I.3.4) Noyau central : est région autour du centre de gravité de la section à l'intérieur de laquelle l'application d'une charge de traction ou de compression ne produit pas des contraintes de différent signe.

Exemple : tracer le noyau central d'une section rectangulaire de dimensions **b x h**

Les coordonnées de la ligne neutre sont : $\left.\begin{aligned} y_n &= -\frac{i_z^2}{e_y} \\ Z_n &= -\frac{i_y^2}{e_z} \end{aligned}\right\}$

Soit l'axe neutre se trouve sur la droite $\overline{AB}$:

$$e_y = -\frac{i_z^2}{y_n} \quad \text{avec} \quad y_n = \frac{h}{2}, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$$

D'où $e_y = -\frac{h^2}{12}\frac{2}{h} = -\frac{h}{6}$

Soit l'axe neutre se trouve sur la droite $\overline{AD}$:

$$e_z = -\frac{i_y^2}{z_n} \quad \text{avec} \quad z_n = -\frac{b}{2}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}$$

D'où $e_z = -\frac{b^2}{12}\left(-\frac{2}{h}\right) = +\frac{b}{6}$