

Chapitre IV : Flexion simple

IV.1) Généralités :

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs (fig.IV.1). Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissant, c'est-à-dire des moments dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une telle charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre.

Cette forme de sollicitation s'appelle **flexion**.

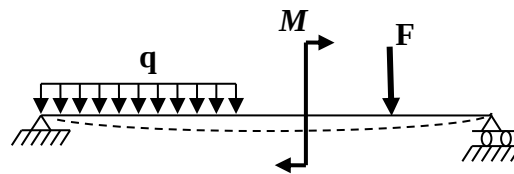


Fig. (IV.1)

- La flexion est dite **pure** si le moment fléchissant est l'unique effort intérieur que supporte la section droite de la poutre.
- La flexion est dite **simple** si les sections droites des poutres sont soumises simultanément à des moments de flexion et à des efforts tranchants.
- Si le plan du moment fléchissant (plan de force) passe par l'un des axes centraux principaux de la section droite de la barre, la flexion est dite **plane ou droite**.
- Si le plan du moment fléchissant ne coïncide pas dans la section avec l'un de ses axes principaux, on dit que la flexion est **déviée**.

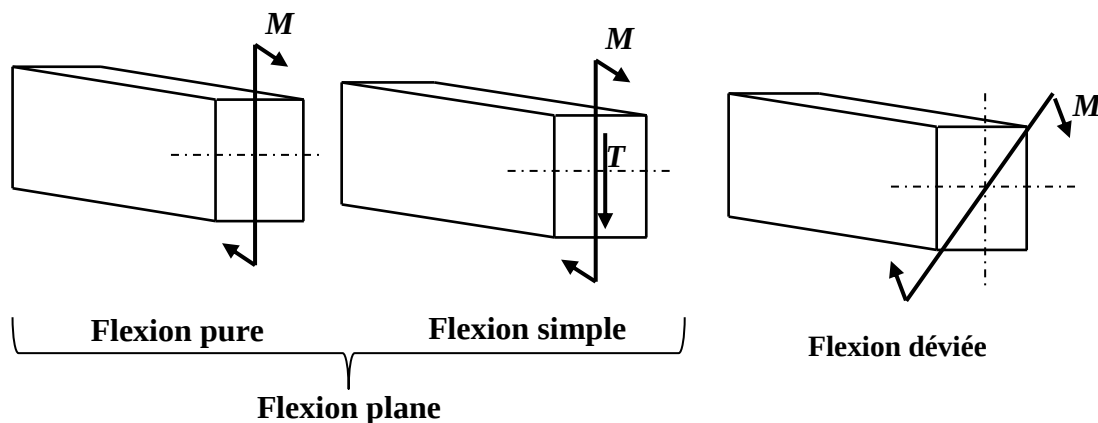


Fig. (IV.2)

IV.2) Détermination des réactions d'appui : « Voir TD »

IV.3) Détermination des efforts intérieurs en flexion simple plane :

Comme nous l'avons mentionné ci-dessous, la flexion simple plane engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs (le moment fléchissant M et l'effort tranchant T).

Pour les déterminer, appliquons la méthode des sections. A l'endroit qui nous intéresse, pratiquons en pensée la coupe à la distance x de l'appui gauche. Rejetons une partie de la poutre, par exemple celle de droite, et considérons l'équilibre de la partie gauche. Remplaçons l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs : le moment fléchissant M et l'effort tranchant T (fig.IV.3).

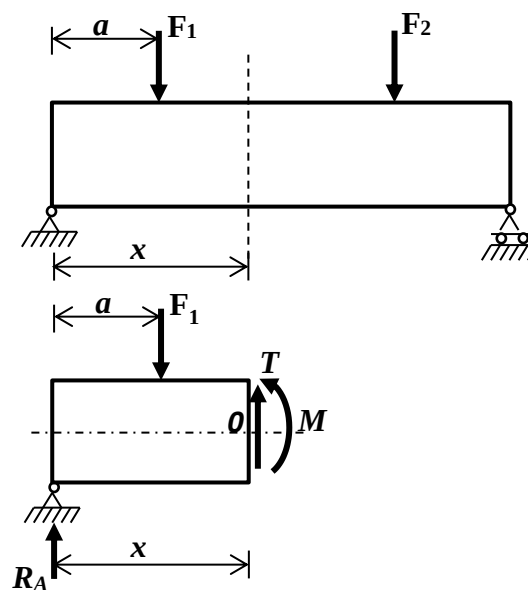


Fig. (IV.3)

Pour calculer M et T , utilisons les deux équations d'équilibre suivantes :

$$\sum Y = 0 ; R_A - F_1 + T = 0 ; T = F_1 - R_A$$

$$\sum M_0 = 0 ; R_A x - F_1(x - a) - M = 0 ; M = R_A x - F_1(x - a).$$

Ainsi, dans la section droite d'une poutre :

- L'effort tranchant T est numériquement égal à la somme algébrique des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures appliquées d'un côté de la section.
- Le moment fléchissant M est numériquement égal à la somme algébrique des moments (calculés par rapport au centre de gravité de la section) des forces extérieures appliquées d'un côté de la section considérée.

IV.4) Règles des signes des moments fléchissant et des efforts tranchants :

IV.4.1) Effort tranchant :

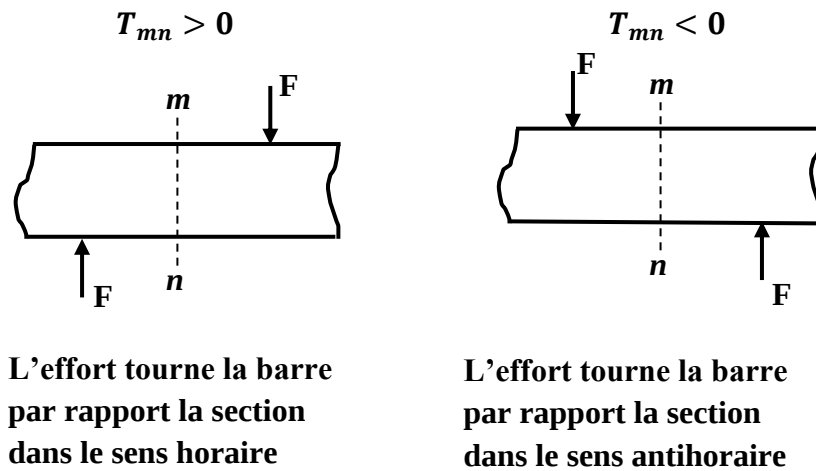


Fig. (IV.4)

IV.4.2) Moment fléchissant :

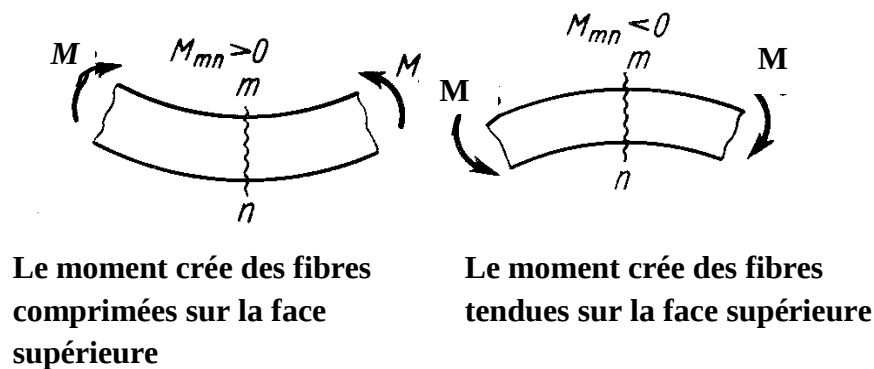


Fig. (IV.5)

IV.5) Relation entre le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'intensité de la charge répartie :

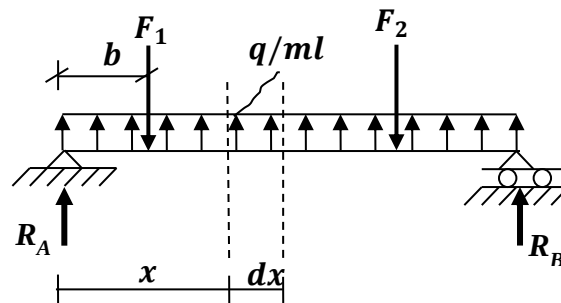


Fig. (IV.6)

L'effort tranchant de la section se trouvant à une distance x est :

$$T = R_A + qx - F_1 \quad (a)$$

L'effort tranchant de la section se trouvant à une distance $x + dx$ est :

$$T + dT = R_A + q(x + dx) - F_1 \quad (b)$$

En retranchant (a) de (b) on obtient: $dT = qdx$;

$q = \frac{dT}{dx}$

(IV.1) *La dérivée de l'effort tranchant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la distribution de la charge.*

Calculons le moment fléchissant dans la section d'abscisse x et $x + dx$

$$M = R_A x - F_1(x - b) + qx \frac{x}{2} \quad (c)$$

$$M + dM = R_A(x + dx) - F_1(x + dx - b) + q \frac{(x + dx)^2}{2} \quad (d)$$

En retranchant (c) de (d) on obtient:

$$dM = R_A dx - F_1 dx + qxdx = dx(R_A - F_1 + qx)$$

L'expression entre parenthèse est l'effort tranchant T . Donc,

$$dM = Tdx ,$$

$T = \frac{dM}{dx}$

(IV.2) *La dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale l'effort tranchant.*

Remarque :

- Si la variable x varie de droite à gauche la relation sera :

$T = -\frac{dM}{dx}$

(IV.3)

- Après le calcul de la dérivée des deux membres de l'égalité (IV.2), on obtient :

$\frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = q$

(IV.4) *La dérivée seconde du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la charge répartie.*

IV.6) Construction des diagrammes de M et de T de la poutre représentée sur la figure ci-dessous :

Exemple IV.1) :

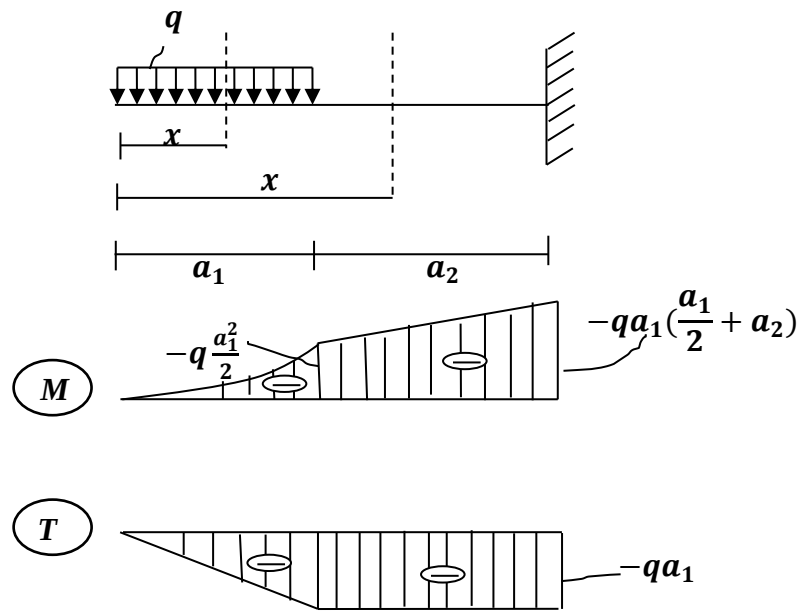


Fig. (IV.7)

$$0 \leq x \leq a_1$$

$$M(x) = -qx \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2} \begin{cases} x = 0; M(x) = 0 \\ x = a_1; M(x) = -\frac{qa_1^2}{2} \end{cases}$$

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -qx \begin{cases} x = 0; T(x) = 0 \\ x = a_1; T(x) = -qa_1 \end{cases}$$

$$a_1 \leq x \leq (a_1 + a_2)$$

$$M(x) = -qa_1 \left(x - \frac{a_1}{2} \right) \begin{cases} x = a_1; M(x) = -q \frac{a_1^2}{2} \\ x = a_1 + a_2; M(x) = -qa_1 \left(a_1 + a_2 - \frac{a_1}{2} \right); \\ M(x) = -qa_1 \left(\frac{a_1}{2} + a_2 \right) \end{cases}$$

$$T(x) = -qa_1$$

$$T(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = -qa_1 = \text{const}$$

Remarque :

1. Lorsque le moment fléchissant varie suivant une parabole (courbe du 2^{ème} ordre), le diagramme de l'effort tranchant est une droite inclinée
2. Lorsque le moment fléchissant M varie suivant une droite inclinée (loi linéaire), le diagramme de l'effort tranchant T est constant, c.-à-d. une droite horizontale.

Exemple IV.2) : Construire les diagrammes de M et T pour une poutre sur deux appuis sollicitée par une charge uniformément répartie.

$$0 \leq x \leq l$$

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2}$$

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - q\frac{x^2}{2} \begin{cases} x=0 ; M(x)=0 \\ x=l ; M(x)=0 \end{cases}$$

$$T(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\frac{M(x)}{dx} = T(x) = \frac{ql}{2} - qx \begin{cases} x=0 ; T(x) = \frac{ql}{2} \\ x=l ; T(x) = -\frac{ql}{2} \end{cases}$$

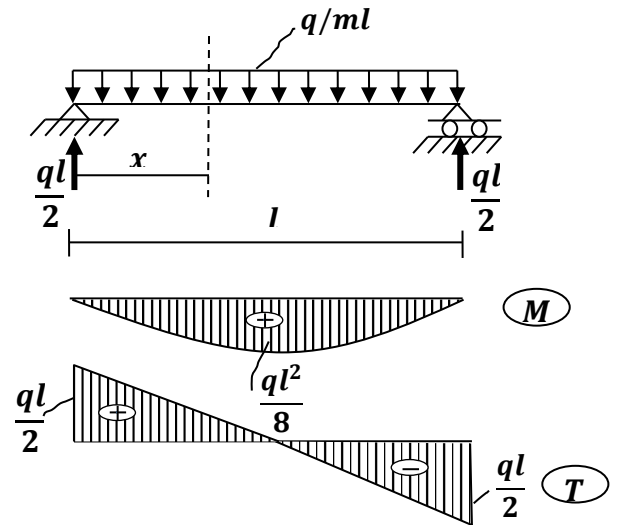


Fig. (IV.8)

Pour déterminer l'abscisse pour laquelle le moment est maximal, on met :

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 ; \frac{ql}{2} - qx = 0 ; x = \frac{l}{2}$$

$$M_{max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

Remarque : Au point où l'effort tranchant change de signe le moment fléchissant est maximum ou minimum.

Exemple IV.3) : Construire les diagrammes de M et T . (fig.IV.9)

$$0 \leq x \leq a$$

$$M(x) = 0 ; T(x) = 0$$

$$a \leq x \leq 2a$$

$$M(x) = -2M ; T(x) = 0$$

$$2a \leq x \leq 3a$$

$$M(x) = -2M + 3M = M ; T(x) = 0$$

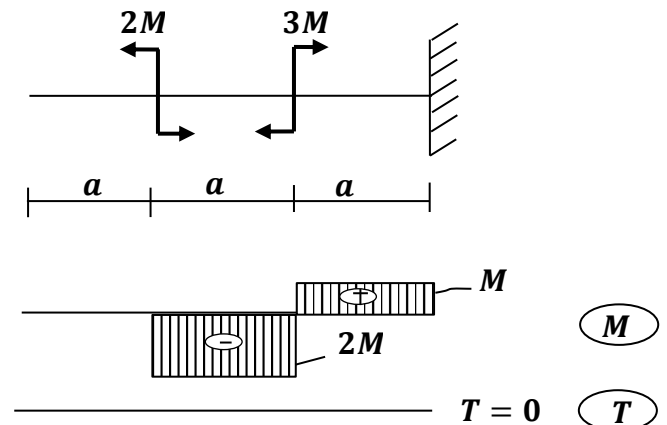


Fig. (IV.9)

Remarque :

- La valeur du moment fléchissant concentré se reflète par un saut de discontinuité de même grandeur que ce moment dans le diagramme du moment fléchissant.
- Si le diagramme du moment fléchissant est constant le diagramme de l'effort tranchant sera nul.

IV.7) Détermination des contraintes normales :

Après déformation :

- ✓ La fibre **ab** s'allonge (subit la traction)
- ✓ La fibre **ef** se raccourcit (subit la compression)
- ✓ La fibre **cd** ne subit en flexion ni la traction ni la compression est dite **neutre**.
- ✓ La ligne d'intersection de la couche neutre avec le plan de la section droite de la poutre s'appelle **axe neutre**.

b'b'' : représente l'allongement total de la fibre **ab**

$$\varepsilon = \frac{b'b''}{ab} = \frac{b'b''}{cd} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (\text{IV.5})$$

Avec ρ : Rayon de courbure de la couche neutre
(pour le moment sa valeur est inconnue).

y : Distance de l'axe neutre à la fibre considérée.

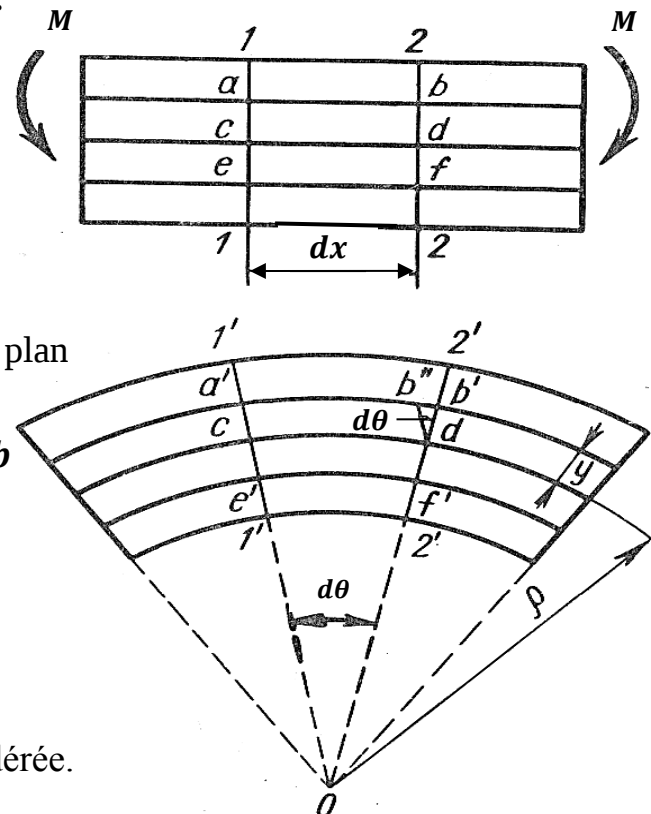


Fig. (IV.10)

D'après la loi de Hooke, on a pour un état de contrainte uni-axial :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{d'où} \quad \sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (\text{IV.6})$$

Remarque : On remarque que la variation des contraintes normales suivant la hauteur de la section droite est proportionnelle à la distance jusqu'à l'axe neutre.

Les contraintes sont donc maximales aux bords supérieur et inférieur de la section Fig. (IV.11).

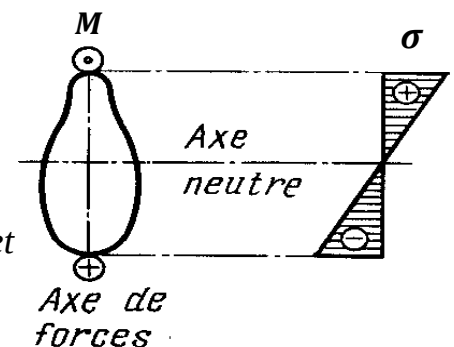


Fig. (IV.11)

Après avoir établi la loi de distribution des contraintes, on peut également déterminer leur valeur à partir des équations d'équilibre.

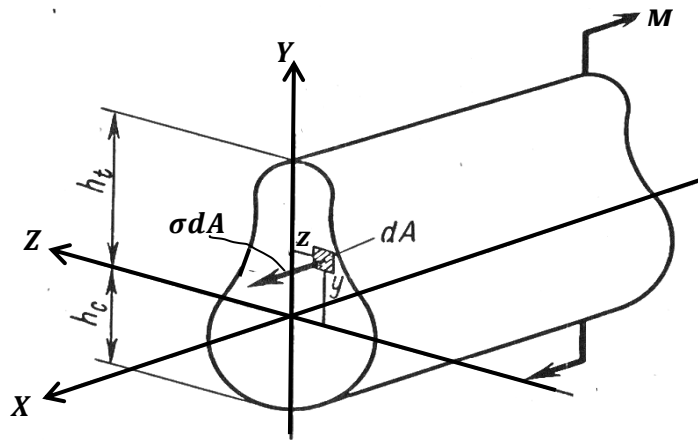


Fig. (IV.12)

$$\triangleright \sum F/x = 0 ; \int_A \sigma dA = 0 \quad ; \quad \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

Mais $\frac{E}{\rho} \neq 0$ vu que $\rho \neq \infty$, car la poutre envisagée est fléchie.

Donc $\int_A y dA = 0$ cette intégrale est le moment statique de l'aire de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre. Elle est nulle et, par conséquent, en flexion, **l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section.**

$$\triangleright \sum M/Z = 0 ; \int_A \sigma dA \cdot y - M = 0 \quad ; \quad M = \int_A \sigma y dA \text{ en remplaçant } \sigma \text{ par son expression (équation IV.6), on obtient :}$$

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

Où $I_z = \int_A y^2 dA$: est le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre z .

D'où $M = \frac{E}{\rho} I_z$; $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ (IV.7) avec $\frac{1}{\rho}$ courbure de la couche neutre de la poutre.

Remarque : En flexion, la courbure de l'axe d'une poutre est proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle à la grandeur EI_z appelée **rigidité de la poutre.**

En remplaçant l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.7), on obtient :

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I_z}} \quad (\text{IV.8})$$

IV.8) Conditions de la résistance par rapport aux contraintes normales :

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section dangereuse (section où M est maximal), il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes.

La contrainte maximum en flexion apparaît aux points les plus éloignés de la ligne neutre.

$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I_z}$$

Le rapport $\frac{I_z}{y_{max}}$ est appelé module de résistance de la section en flexion et se

désigne par : $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$

d'où

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad (IV.9)$$

➤ Pour une barre de section rectangulaire de côtés b et h :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad y_{max} = \frac{h}{2} \quad ; \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

➤ Pour une section circulaire :

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} \quad ; \quad y_{max} = \frac{D}{2} \quad ; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0.1 D^3$$

Condition de résistance :

➤ Pour les matériaux ayant la même contrainte admissible à la traction et à la compression : $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}$

Avec σ_{adm} : contrainte admissible

- Pour les matériaux dont les contraintes admissibles à la traction et à la compression sont différentes, il faut composer deux conditions de résistances :

1) Suivant les contraintes de traction maximales :

$$\sigma_t^{max} = \frac{M h_t}{I_z} = \frac{M}{W_t} \leq \sigma_{adm}^t$$

2) Suivant les contraintes de compression maximales :

$$\sigma_c^{max} = \frac{M h_c}{I_z} = \frac{M}{W_c} \leq \sigma_{adm}^c$$

Avec h_t : Plus grande distance entre l'axe neutre et la fibre la plus tendue.

h_c : Plus grande distance entre l'axe neutre et la fibre la plus comprimée.

σ_{adm}^t : Contrainte admissible à la traction.

σ_{adm}^c : Contrainte admissible à la compression.

W_t : Module de résistance des fibres tendues.

W_c : Module de résistance des fibres comprimées.

IV.9) Calcul des contraintes tangentielles :

Dans le cas général de la flexion simple les sections droites d'une poutre subissent des moments fléchissant et des efforts tranchant :

- La présence du moment fléchissant est associée à l'apparition dans les sections droites des contraintes normales qui peuvent être déterminées par la formule (IV.8).
- La présence de l'effort tranchant est due à l'apparition des contraintes tangentielles dans les sections droites et, en vertu de la loi de parité, aussi dans les sections longitudinales fig. (IV.13)

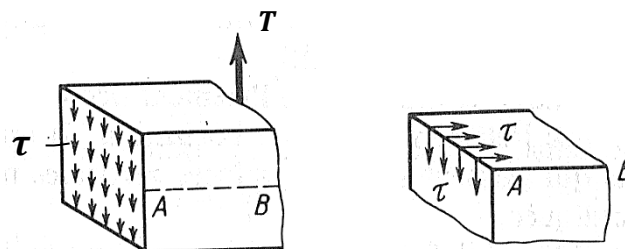


Fig. (IV.13)

Relation entre effort tranchant T et contrainte tangentielle τ :

Examinons une poutre peu large à section rectangulaire. Découpons dans la poutre un élément de longueur dx et de largeur b , égale à celle de la poutre.

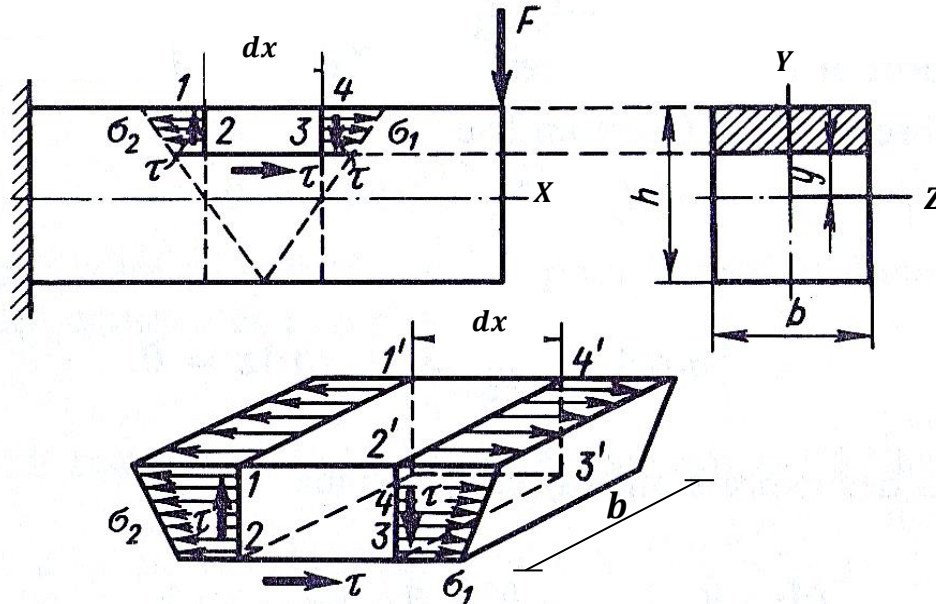


Fig. (IV.14)

Cet élément subit l'action des forces suivantes :

- La face **343'4'** est sollicitée par les contraintes normales qui valent $\sigma_1 = \frac{M_1 y}{I_z}$ Où M_1 est le moment fléchissant dans la section **343'4'**.
- D'autre part, cette même section subit des contraintes tangentielles τ pour le moment inconnues qui, compte tenu de la petite largeur de la poutre, peuvent être considérées comme uniformément réparties suivant la largeur de la section (cette hypothèse porte le nom de Jouravski).
- La face **122'1'** subit des contraintes normales $\sigma_2 = \frac{M_2 y}{I_z}$ et les contraintes tangentielles τ .
- La face **322'3'** est sollicitée seulement par des contraintes tangentielles égales, d'après la loi de parité, aux contraintes tangentielles qui interviennent dans les faces (sections) verticales.

L'élément découpé doit être en équilibre :

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -\int_{A'} \sigma_2 dA + \int_A \sigma_1 dA + \tau b dx = 0$$

En remplaçant σ_1 et σ_2 par leur valeur on obtient :

$$-\frac{M_2}{I_z} \int_{A'} y dA + \frac{M_1}{I_z} \int_{A'} y dA + \tau b dx = 0$$

L'expression $\int_{A'} y dA = S'_Z$: est le moment statique de l'aire de la partie découpée par rapport à l'axe neutre.

D'où $\frac{S'_Z}{I_z} (M_2 - M_1) = \tau b dx$

$M_2 - M_1 = dM_x$: est l'accroissement du moment fléchissant sur la longueur dx .

D'où $S'_Z \frac{dM_x}{I_z} = \tau b dx$; $\tau = S'_Z \frac{dM_x}{dx} \frac{1}{I_z b}$;

$$\tau = \frac{TS'_Z}{I_z b}$$

Cette formule a été établie pour la 1^{ère} fois par Jouravski et porte son nom

Avec : $T = \frac{dM_x}{dx}$

T : Effort tranchant dans la section considérée.

S'_Z : Moment statique par rapport à l'axe neutre de la partie de l'aire de la section située au-dessus de y où est déterminée la contrainte.

b : Largeur de l'aire de la section.

I_z : Moment d'inertie de l'aire de la section par rapport à l'axe neutre.

Exemple : Construire le diagramme des contraintes tangentielles conventionnelles perpendiculaire à l'axe neutre (d'après la formule de Jouravski).

On prendra $T = 8t$; $h = 12cm$; $h_0 = 8cm$; $b = 6cm$; $b_0 = 4cm$

Solution : On détermine les valeurs de la contrainte tangentielle aux points **1** des fibres extrêmes de la section, aux points **2** des fibres extrêmes de la cavité, aux points **3** les plus éloignés de l'axe neutre sur les parois de la cavité et aux points **4** sur l'axe neutre Z .

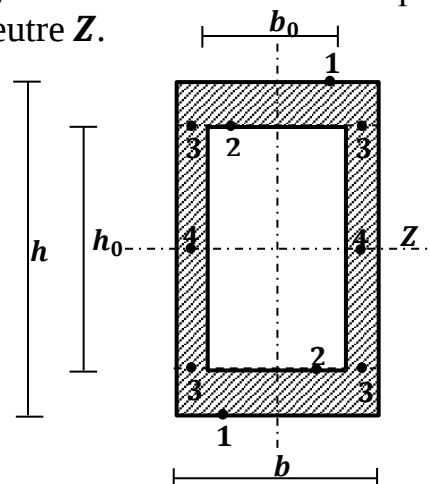


Fig. (IV.15)

Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre **Z** de l'aire de la section de la forme donnée est :

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0h_0^3}{12} = \frac{1}{12}(6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = \frac{2080}{3} \text{ cm}^4$$

➤ Pour les points 1 :

$$S_{(1)} = 0 \quad \text{Par conséquent} \quad \tau_{(1)} = 0$$

➤ Pour les points 2 :

$$S_{(2)} = b \left(\frac{h-h_0}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{h-h_0}{4} \right) = 6.2(6-1) = 60 \text{ cm}^3$$

$$\text{Par conséquent} \quad \tau_{(2)} = \frac{TS_{(2)}}{bI} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 3}{6 \cdot 2080} = 115,4 \text{ kgf/cm}^2$$

➤ Pour les points 3 : La longueur de la section aux points 3 est égale à $(b - b_0)$

$$\text{donc } \tau_{(3)} = \frac{TS_{(2)}}{bI} = \tau_{(2)} \frac{b}{b-b_0} = 115,4 \cdot \frac{6}{4} = 346,2 \text{ kgf/cm}^2.$$

➤ Pour les points 4 :

$$S_{(4)} = S_{(2)} + (b - b_0) \frac{h_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} = 60 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 76 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{(4)} = \frac{TS_{(4)}}{(b - b_0)I} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 76 \cdot 3}{2 \cdot 2080} = 438,5 \text{ kgf/cm}^2$$

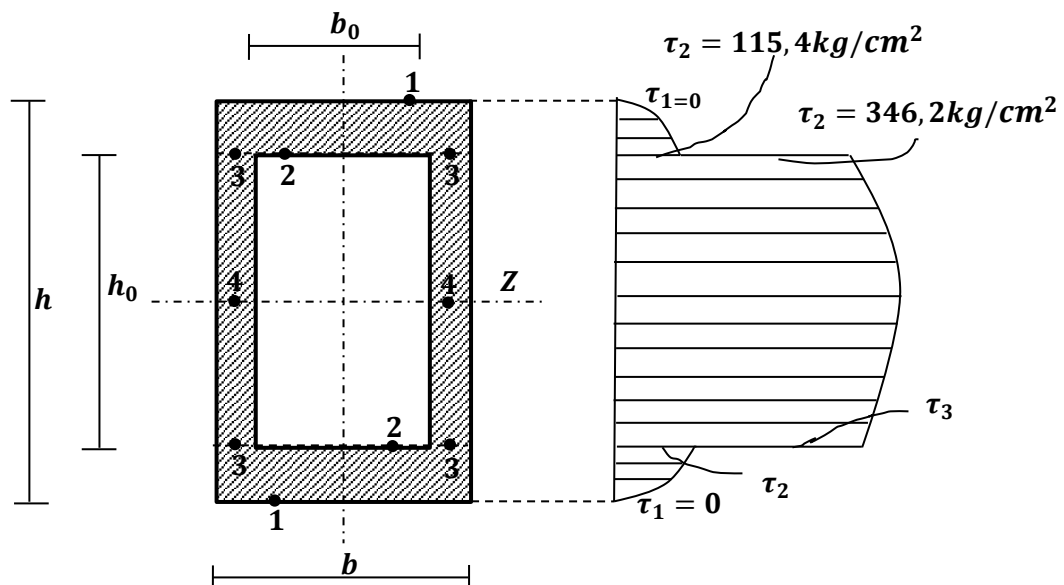


Fig. (IV.16)

IV.10) Condition de résistance par rapport aux contraintes tangentielles :

La condition de résistance s'écrit : $\tau_{max} \leq \tau_{adm}$

Où τ_{adm} est la contrainte tangentielle admissible.