Corrigée de Série N°3

Exo1 Soit x^* est le max de f sur $\mathbb{R}^n$ (local, global) alors

$$f(x^*) = \max\{f(x),\ x\in\mathbb{R}^n\ (\text{ou } x\in V)\}, \quad V\in \mathcal{V}(x^*)$$

$$f(x) \leq f(x^*),\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ (x\in V)$$

$$\Leftrightarrow -f(x^*) \leq -f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ (x\in V)$$

$$\Leftrightarrow -f(x^*) = \min\{-f(x),\ x\in\mathbb{R}^n\ (x\in V)\}$$

$$\Rightarrow f(x^*) = -\min\{-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ (x\in V)\}.$$

Exo2

1) On a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\end{cases} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\end{cases}$ n'est pas coercive

2) ⓐ si $a=0 \Leftrightarrow f(x) = b \not\to +\infty$ lorsque $\|x\|\to+\infty$ n'est pas coercive

ⓑ Si $a\neq 0 \Rightarrow$ il existe au moins un élément du vecteur a n'est pas nul, soit a_{i_0} cet element et on prend la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ tel que $x_k = -k a_{i_0} e_{i_0}$

c-à-d $x_k = (0,0,\dots,-k a_{i_0},0,\dots,0) \Rightarrow \|x_k\|^2 = k^2 a_{i_0}^2$

$\Rightarrow \|x_k\| = k|a_{i_0}|$ et si $k\to+\infty \Rightarrow \|x_k\|\to+\infty$. On a

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty} (a_1,\dots,a_n)(0,\dots,-k a_{i_0},\dots,0)^T + b = \lim_{k\to+\infty}\left(-k a_{i_0}^2 + b\right) = -\infty$$

donc f n'est pas coercive

③ $f(x) = a\langle x,x\rangle + b = a\|x\|^2 + b$

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = \lim_{\|x\|\to+\infty}\left(a\|x\|^2+b\right) = \begin{cases}-\infty & \text{si } a<0 \text{ n'est pas} \\ b & a=0 \text{ n'est pas} \\ +\infty & a>0 \text{ coercive.}\end{cases}$$

④ On prend la suite $x_n = (0,-n)$, $n\geq 0$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} -n-5 = -\infty$ n'est pas coercive

(5) On prend la suite $(0,-n)$, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} -2n^3+n^2 = -\infty$$ n'est pas coercive.

(6) On a $(x_1+2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2+4x+4 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq -x_1^2-4 \Rightarrow 2x_1 \geq -\frac{1}{2}x_1^2-2$

$$\Rightarrow x_1^2+2x_1+x_2^2 \geq \frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-2 \geq \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-2 = \frac{1}{2}\|(x_1,x_2)\|^2-2.$$

Alors $\lim\limits_{\|(x_1,x_2)\|\to+\infty} f(x) \geq \lim\limits_{\|(x_1,x_2)\|\to+\infty} \frac{1}{2}\|(x_1,x_2)\|^2-2 = +\infty \Rightarrow f$ est coercive.

(7) On a $(3-x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow 9-6x_2+x_2^2 \geq 0 \Rightarrow -6x_2 \geq -x_2^2-9$

$$\Rightarrow -3x_2 \geq -\frac{1}{2}x_2^2-\frac{9}{2} \Rightarrow x_1^2+x_2^2-3x_2-5 \geq x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{9}{2}-5 \geq \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{9}{2}-5$$

Alors $\lim\limits_{\|(x_1,x_2)\|\to+\infty} f(x) \geq \lim\limits_{\|(x_1,x_2)\|\to+\infty} \frac{1}{2}\|(x_1,x_2)\|^2-\frac{9}{5}-5 = +\infty \Rightarrow f$ est coercive

(8) $f(x) = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$. On a

$(a_i+x_i)^2 \geq 0 \; \forall i \Rightarrow a_i^2+2a_ix_i+x_i^2 \geq 0 \; \forall i \Rightarrow 2a_ix_i \geq -x_i^2-a_i^2 \quad \forall i=\overline{1,n}$

$a_ix_i \geq -\frac{1}{2}x_i^2-\frac{a_i^2}{2}, \; \forall i=\overline{1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i \geq -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = -\frac{1}{2}\|x\|^2-\frac{1}{2}\|a\|^2$

$f(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2-\frac{1}{2}\|a\|^2+b \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow f$ est coercive

Exo3 On a $(x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+2xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ --- * $\forall x,y$

$f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy \geq x^4+y^4-4x^2-4y^2$ --- (1)

car d'après * $4xy \geq -2(x^2+y^2) = -2x^2-2y^2$

et on a $\forall (x,\varepsilon)\in\mathbb{R}^2 \quad (x^2+\varepsilon)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4+\varepsilon^2-2\varepsilon x^2 \geq 0$ — (2)

et $\forall (y,\varepsilon)\in\mathbb{R}^2 \quad (y^2+\varepsilon)^2 \geq 0 \Rightarrow y^4+\varepsilon^2-2\varepsilon y^2 \geq 0$ — (3)

En utilisant ① et ② et ③, on obtient :

$$f(x,y) \geq x^4+y^4-4x^2-4y^2-x^4-\varepsilon^2+2\varepsilon x^2-y^4-\varepsilon^2-2\varepsilon y^2 = (2\varepsilon-4)x^2+(2\varepsilon-4)y^2$$

par exemple pour $\varepsilon = 3$ on obtient

$$f(x,y) \geq 2(x^2+y^2) - 18 = 2\|(x,y)\|^2 - 18 \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$$

donc f est coercive.

* il est clair que la fonction f est continue (polynome de $\mathbb{R}^2$) et elle est propre et coercive $\Rightarrow$ le pb (P) admet au moins une solution

2) f est convexe $\Leftrightarrow$ sa matrice hessienne est semi-definie positive (caractérisation du second ordre de la convexité)

$$\nabla^2 f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = 4\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda(\lambda+8) = 0$$

$\nabla^2 f(0,0)$ possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -8 \Rightarrow \nabla^2 f(0,0)$ n'est semi-definie positive en un point $\Rightarrow f$ n'est pas convexe.

3) $$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x^3-4(x-y) \\ 4y^4+4(x-y) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3-(x-y) = 0 \\ y^4+(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ y^3+x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ y^3 = -x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-2x = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \\ y = 0 \vee y = -\sqrt{2} \text{ ou } y = \sqrt{2} \end{cases}$$

On pose $A = (0,0)$, $B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

* en A On a $\det \nabla^2 f(0,0) = 0$ on peut pas conclure.

$f(x,x) = x^4 + x^4 = 2x^4 > 0$ si $x \in V(0)$ $x \neq 0$

et $f(x,-x) = x^4 + x^4 - 2(2x)^2 = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - 2x^2) < 0$ si $x \in V(0)$

c-à-d $(0,0)$ est un point selle.

* en B $\det \nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 384 > 0$ et $r = 20 > 0 \Rightarrow$ On a un min f

* en C $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(B) = f(C) = -8$.

Exo4

1) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x+a \\ 2y+b \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\left\langle \nabla^2 f(x,y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = (u,v) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2u^2 + 2v^2$

$= 2\|(u,v)\|^2 \geq \alpha \|(u,v)\|^2$ tel que $\alpha \in]0,2]$

alors f est elliptique $\Rightarrow$ le pb (P) admet une seule solution

2) Comme f est elliptique $\Rightarrow$ f est strictement convexe et coercive

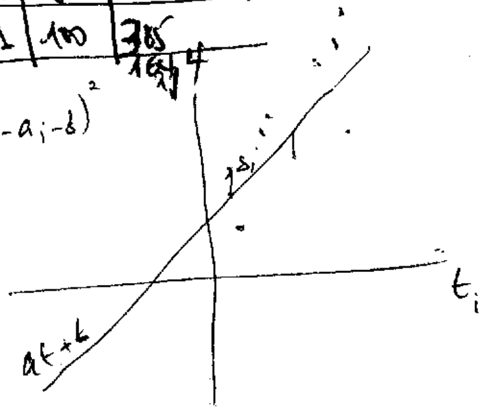
$\Rightarrow$ tout point critique est un min global de f

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+a \\ 2y+b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.

Exo 8

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
x_i	0	-3	6	-3	6	3,8	5	-2	1,4	8	22,2
t_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	385

$(x_i - a_i - b)^2$



$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{10} \left(x_i - [at_i + b]\right)^2$$

$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{10} \left(x_i^2 + a^2 t_i^2 + b^2 + 2ab t_i - 2a x_i t_i - 2b x_i\right)$$

$$= X^2 + a^2 T^2 + b^2 + 2abT - 2aXT - 2bX$$

$$= a^2T^2 + b^2 + 2abT - 2aXT - 2bX + X^2$$

* J elle est diff

$$\frac{\partial J(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{10} -2(x_i - at_i - b)t_i = 2a\sum_{i=1}^{10} t_i^2 + 2\sum_{i=1}^{10} t_i b - 2\sum_{i=1}^{10} x_i t_i$$

$$= 2aT^2 + 2bT - 2XT$$

$$\frac{\partial J(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{10} 2(at_i + b - x_i) = 2aT + 20b - 2X$$

J est deux fois diff

$$\frac{\partial^2 J(a,b)}{\partial a^2} = 2T^2 \qquad \frac{\partial^2 J(a,b)}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 J(a,b)}{\partial b \partial a} = 2T.$$

$$\frac{\partial^2 J(a,b)}{\partial b^2} = 20$$

* Il est clair que J est deux fois diff (polynome en a et b)
* $\nabla^2 J(a,b) \begin{vmatrix} 2T^2 & 2T \\ 2T & 20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} T^2 & T \\ T & 10 \end{vmatrix} = 10T^2 - T.T = \begin{vmatrix} 770 & 110 \\ 110 & 20 \end{vmatrix} = 3300 > 0$

$T^2 = \sum t_i^2$

$T.T = (\sum t_i)^2$

$\frac{\partial^2}{\partial a^2} = 770 > 0$

La matrice hessienne est semi definie positive car $2T^2 \geq 0$.
~~donc~~ (les valeurs propres positives) $\Rightarrow$ J est strictement convexe (convexe)
alors la solution est unique (globale.

Donc f est diff et convexe alors tout point stationnaire est un min globale $\Rightarrow$ le pb admet une seule solution

$$\nabla J(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2aT^2 + 2bT - 2xT = 0 \\ 2aT + 20b - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}T^2 a + \cancel{2}Tb = \cancel{2}xT \\ \cancel{2}Ta + \cancel{20}b = \cancel{2}x \end{cases}$$

le système admet une solution unique ssi $\begin{vmatrix} T^2 & T \\ T & 10 \end{vmatrix} = 10T^2 - TT \neq 0$

$T^2 = \sum t_i^2$

$T.T = \left(\sum t_i\right)^2$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} T & xT \\ 10 & x \end{vmatrix}}{10T^2 - TT} = \frac{TX - 10xT}{\Delta}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} T^2 & xT \\ T & x \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{xT^2 - xT.T}{\Delta}$$

donc le cas général si $\Delta \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe

$\Rightarrow$ le pb admet une solution

Exo 5

1) Soit $x, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq v$ et $t \in]0,1[$

c) $J(tu+(1-t)v) - tJ(u)-(1-t)J(v) = \frac{t(t-1)}{2} \langle A(u-v), u-v \rangle > 0$

$\frac{t(t-1)}{2} < 0$; A est définie positive

$\Rightarrow$ J est strictement convexe

b) A est symétrique il existe une base orthonormée $(u_i)_{1 \le i \le n}$
et A définie positive donc les valeurs propres associées sont toutes strictement positives donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ $\quad x_i = \langle x, u_i \rangle$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i u_i .$$

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{j,i=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \min(\lambda_i) \sum x_i^2$$

$\langle Ax, x \rangle \geq \lambda \|x\|^2 \quad \lambda > 0$

$J(x) \geq \lambda \|x\|^2$

$|\langle b, v \rangle| \leq \|b\| \|v\| \quad -\|b\|\|v\| \leq \langle b, v \rangle \leq \|b\| \|v\|$

$-\langle b, v \rangle \leq \|b\| \|v\|$

$J(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \geq \lambda \|x\|^2 + \|b\| \|x\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty \quad \left(\begin{array}{c} ax^2 + bx \\ x = \|x\| \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ J est coercive.

d) J est différentiable.

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\langle A(x+th), x+th \rangle - \langle b, x+th \rangle - \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle}{t}$$

$\langle Ax, h \rangle = \langle Ah, x \rangle$ A symétrique

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{\langle Ax, x \rangle} + t\langle Ax, h \rangle + t \langle Ah, x \rangle + t^2 \langle h, h \rangle - \cancel{\langle b, x \rangle} - t\langle b, h \rangle - \cancel{\langle Ax, x \rangle} + \cancel{\langle b, x \rangle}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} 2\langle Ax, h \rangle - \langle b, h \rangle + t \langle h, h \rangle = \langle \underbrace{2Ax + b}_{\nabla J(x)}, h \rangle$$

On a $\langle \nabla^2 J(x) h, h \rangle = \langle \nabla \langle \nabla J(x), h \rangle, h \rangle$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla J(x+th), h \rangle - \langle \nabla J(x), h \rangle}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{\nabla J(x+th) - \nabla J(x)}{t}, h \right\rangle \quad \text{tel que } \nabla J(x) = 2Ax + b$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{2A(x+th) + b - 2Ax - b}{t}, h \right\rangle$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{2Ax + t2Ah - 2Ax}{t}, h \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{t\langle 2Ah, h\rangle}{t}$$

$$= \langle 2Ah, h\rangle = \langle \nabla^2 J(x)h, h\rangle \Leftrightarrow \nabla^2 J(x) = 2A .$$

* J est strictement convexe et coercive

alors le pb admet une seule solution

$$\nabla J(x) = 0 \Leftrightarrow \Big\{ \; Ax - b = 0$$

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b .$$

A^{-1} existe car A est définie positive $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ existe.

(A^{-1} existe $\Leftrightarrow$ 0 n'est pas une valeur propre de A

et A définie positive $\Leftrightarrow$ tous les valeurs propres non nulle

$\Rightarrow$ 0 n'est pas une V.P

même si A définie négative $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ 0 n'est pas V.P

$\Rightarrow A^{-1}$ existe .)