CHAPITRE II Minimisation Sans Contraintes

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on Pose Pose le pb suivant

$$P : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

le problème P st un Problème de minimisation Sans Contraites

1) Défs

① si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ st dite Solution optimale (ou minimum) globale de P ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x^*) \leq f(x)$.

② si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ st dite minimum locale de P ssi il existe $v \in V(x^*)$ tel que $\forall x \in v \quad f(x^*) \leq f(x)$

③ si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ st dite Solution optimale stricte (min stricte) ssi il existe $v \in V(x^*)$ $\forall x \in v(x^*)$ $f(x^*) < f(x)$ $x \neq x^*$

④ Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f st dite Propre si f ne prend pas la valeur $-\infty$ et n'st pas identiquement égale à $+\infty$

⑤ Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, f st dite Coercive si
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

Exemples

① $f(x,y) = \cos x$ Possède une infinité de min local (strict), et elle n'admet pas un min global

② $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(0,0)$ st un min local et strict et global de f. et f st une fonction Coercive Car $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = \|(x,y)\|^2 = +\infty$ et il st claire que $f(x,y)$ st Propre.

2) Résultats d'existance et d'unicité :

2-1 Existance :

Théorème Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre, continue et coercive Alors le pb (P) admet au moins une solution

Dém Comme f est propre donc f ne prend pas la valeur "$-\infty$", alors il existe une suite (x_n) la suite de minimisante de f c-à-d

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)\} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = d > -\infty .$$

et comme f non identiquement $=$ "$+\infty$" alors $d < +\infty$, on va montrer que f est bornée, supposons l'inverse c-à-d (x_n) n'est pas bornée i.e $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ et comme f est coercive alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$

Contradiction avec $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = d \Rightarrow (x_n)$ est bornée.

Donc on peut extraire une sous suite convergente, soit (x_n) sous suite converge vers x^* c-à-d $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$ et comme f est continue alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(x^*) = d = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)\}$$

Remarque

si f est strictement convexe $\Longrightarrow$ f est propre.

2-2 Unicité

Théorème si f est strictement convexe alors le pb (P) admet une seule solution (s'il est existe).

Dém Supposons que f est strictement convexe et $x_1^* \neq x_2^*$ deux solution du pb (P) alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $f(x_1^*) = f(x_2^*) = m \leq f(x)$

mais on a $f\left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x_1^* + (1-\frac{1}{2})x_2^*\right) < \frac{1}{2}\left[f(x_1^*) + f(x_2^*)\right] = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$

ceci impossible car $f(\bar{x} = \frac{x_1^* + x_2^*}{2}) < m$ et m est le min de $f \Rightarrow x_1^* = x_2^*$

Déf On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est elliptique s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x-y\|^2$.

Proposition

f est différentiable au sens de Gâteaux

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable au sens de Gâteaux

$$f \text{ est elliptique} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle \geq \alpha \|y^2\|$$

Dém :

"$\Rightarrow$" Supposons que f est elliptique, et soit $y \in \mathbb{R}^n$, notons $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \langle \nabla f(x), y \rangle$. On a :

$$\nabla^2 f(x) \cdot y = \nabla \langle \nabla f(x), y \rangle = \nabla g(\cancel{x}) \Rightarrow \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle = \langle \nabla g(x), y \rangle = \frac{\partial g}{\partial y}(x)$$

donc $\langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(x+ty) - g(x)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\langle \nabla f(x+ty), y \rangle - \langle \nabla f(x), y \rangle}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(x+ty) - \nabla f(x), ty \rangle}{t^2} \geq \lim_{t \to 0} \alpha \frac{\|ty\|^2}{t^2} \ (f \text{ elliptique})$$

$$= \alpha \|y\|^2.$$

"$\Leftarrow$" Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(z) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle \ \forall z \in \mathbb{R}^n$

On a par un simple calcul $g(x) - g(y) = \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle$

On a f deux fois différentiable au sens de Gâteau alors g est une fonction différentiable au sens de Gâteaux, donc elle est développable en série de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 et on a :

$$g(x) = g(\underbrace{y}_{x_0} + \underbrace{(x-y)}_{h}) = g(y) + \langle \nabla g(y + \theta(x-y)), x - y \rangle \quad \theta \in]0,1[$$

$g(x) - g(y) = \langle \nabla g(y + \theta(x-y)), x - y \rangle$ et d'autre part on a :

$$\nabla^2 f(z)(x-y) = \nabla \langle \nabla f(z), x - y \rangle \text{ alors } \nabla g(z) = \nabla^2 f(z)(x-y)$$

et Comme on a ;

$$\langle \nabla f(x)-\nabla f(y), x-y\rangle = g(x)-g(y) = \langle \nabla g(y+\theta(x-y)), x-y\rangle$$

$$= \langle \nabla^2 f(y+\theta(x-y))(x-y), x-y\rangle$$

$$\geq \alpha \|x-y\|^2 \Longrightarrow f \text{ est elliptique}$$

Remarque : On peut utilisé le developpement de Taylor avec reste intégrale de la fonction g qui est differentiable au sens de Gâteaux, c.à.d

$$g(y) = g(\underbrace{x}_{x_0}+\underbrace{(y-x)}_{h}) = g(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x\rangle dt.$$

3. Conditions d'optimalités :

3.1 Condition d'optimalités du Premier Ordre :

3.1.1 Condition necessaires :

Théorème : Soient $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction differentiable au sens de Gâteaux au point $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla^T f(x^*) h < 0$ (h une direction de descente), alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(x^*+\alpha h) < f(x^*)$ $\forall \alpha \in]0,\delta[$

Dém : Comme f est differentiable au sens de Gâteaux en x^* alors elle est developpable en serie de Taylor jusqu'à l'ordre "1" et on a : $\forall \alpha > 0$

$$f(x^*+\alpha h) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \alpha h\rangle + \|\alpha h\| \,\varepsilon(\alpha h, x^*)$$

$$\text{tel que } \varepsilon(\alpha h, x^*) \xrightarrow{\alpha \searrow 0} 0 \quad (\alpha h \xrightarrow{\alpha \searrow 0} 0)$$

Donc

$$f(x^*+\alpha h) = f(x^*) + \alpha \nabla^T f(x^*) h + \alpha \|h\| \,\varepsilon(\alpha h, x^*)$$

$$\frac{f(x^*+\alpha h) - f(x^*)}{\alpha} = \nabla^T f(x^*) h + \|h\| \,\varepsilon(\alpha h, x^*)$$

mais $\nabla^T f(x^*) h < 0$ et Comme $\varepsilon(\alpha h, x^*) \xrightarrow{\alpha \searrow 0} 0$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que $\nabla^T f(x^*) h + \|h\| \,\varepsilon(\alpha h, x^*) < 0$

(on peut choisir δ de sort que $\forall \alpha \in]0,\delta[$ $\varepsilon(\alpha h, x^*)$ assez petit pour verifie l'inégalité cherché)

alors $\exists \delta > 0$, $\forall \alpha \in]0,\delta[$ $f(x^*+\alpha d) < f(x^*)$

Théorème Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differentiable au sens de Gâteaux (G_D) au point $x^* \in \mathbb{R}^n$, si x^* est un minimum local de f alors $\nabla f(x^*) = 0$

Dém On va démontrer par l'absurd, c-à-d On suppose que $\nabla f(x^*) \neq 0$

donc $-\nabla f(x^*)$ est une direction de desente car $\nabla^T f(x^*)[-\nabla f(x^*)] = -\|\nabla f(x^*)\| < 0$

et en utilisant le Théorème 1, $\exists \delta > 0, \forall x \in]0, \delta[$ $f[x^* + \alpha(-\nabla f(x^*))] < f(x^*)$

Contradiction avec x^* est le min f $\left(f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \right) \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$

3-1-2 Condition suffisante

Théorème Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differentiable et convexe si $\nabla f(x^*) = 0$ alors x^* est un min globale.

Dém: Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ telque $\nabla f(x^*) = 0$, f est G-D et convexe alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq f(x^*) + \underbrace{\langle \underbrace{\nabla f(x^*)}_{=0}, x - x^* \rangle}_{=0} \quad \text{(la première caractérisation de la convexité)}$$

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^* \text{ est le min de } f$$

3-2 Conditions d'optimatité du second ordre

3-2-1 Conditions nécessaires :

Théorème: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois G-D en $x^* \in \mathbb{R}^n$, si x^* est le min de f (min local) alors $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

Dém: f est deux fois G_D en x^* alors elle est developpable en Serie de Taylor standard à l'ordre "2" et On a: $\forall \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x^* + \alpha h) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \alpha h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) \alpha h, \alpha h \rangle + \|\alpha h\|^2 \varepsilon(\alpha h, x^*)$$

tel que $\varepsilon(\alpha h, x^*) \xrightarrow{\alpha \to 0} 0$

Donc
$$f(x^* + \alpha h) = f(x^*) + \alpha h^T \nabla f(x^*) + \frac{\alpha^2}{2} h^T \nabla^2 f(x^*) h + \alpha^2 \|h\|^2 \varepsilon(\alpha h, x^*)$$

et comme x^* est le min de f d'après Théorème de la condition nécessaire du premier ordre $\nabla f(x^*) = 0$ alors

$$\frac{f(x^* + \alpha h) - f(x^*)}{\alpha^2} = \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x^*) h + \|h\|^2 \varepsilon(\alpha h, x^*)$$

et come x^* est le min de f alors $f(x^*) \leq f(x^*+\alpha h) \Rightarrow$

$$\frac{f(x^*+\alpha h)-f(x^*)}{\alpha^2} \geq 0, \ \forall \alpha > 0$$

donc

$$\frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x^*) h + \|h\|^2 \varepsilon(\alpha h, x^*) \geq 0$$

Alors il existe $\delta > 0$, $\forall \alpha \in]0, \delta[$ $h^T \nabla^2 f(x^*) h \geq 0$

c-à-d $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive.

3-2-2 Condition suffisante :

Théorème : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est G-D deux fois en $x^* \in \mathbb{R}^n$, si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) > 0$ alors x^* est un min local strict de f

Preuve : f est G.D deux fois en x^* alors elle est développable en serie de Taylor Young d'ordre 2" et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(x^* + \underbrace{x - x^*}_{h}) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla f(x^*)(x-x^*), x-x^* \rangle + \|x-x^*\|^2 \varepsilon(x-x^*)$$

$\varepsilon(x-x^*) \longrightarrow 0$

et come $\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow$ $\quad h \to 0 \Leftrightarrow x - x^* \to 0 \Leftrightarrow x \to x^*$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle \nabla f(x^*)(x-x^*), (x-x^*) \rangle + \|x-x^*\|^2 \varepsilon(x-x^*)$$

supposons que x^* n'est pas un optimum local strict, alors il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $x_k \neq x^*, \forall k \in \mathbb{N}$ et $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x^*$ et $f(x_k) \leq f(x^*)$

Prenant $x = x_k$ dans l'égalité précedante alors, on note $h_k = \frac{x - x_k}{\|x - x_k\|}$, $\forall k \geq 0$

on a $\|h_k\| = 1$, $\forall k \geq 0$ et $\quad \Rightarrow h_k^T = \frac{(x - x_k)^T}{\|x - x_k\|}$

$$\frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} = \frac{1}{2} \frac{(x - x_k)^T}{\|x - x_k\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{(x - x_k)}{\|x - x_k\|} + \varepsilon(x_k - x^*)$$

$\varepsilon(x_k - x^*) \longrightarrow 0$

et come $f(x_k) \leq f(x^*)$, $\forall k \geq 0$ $\quad x_k \to x^* \Leftarrow k \to +\infty$

Alors $\frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} \leq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} h_k^T \nabla^2 f(x^*) h_k + \varepsilon(x_k - x^*) \leq 0, \ \forall k \geq 0 \quad ---- *$$

et Comme $\|h_k\| = 1$, $\forall k \geq 0$ alors elle est bornée donc on peut extraire une sous suite convergente c.à.d, $\exists (x_k)_{k \in M \subset \mathbb{N}}$ tel que

$$h_k \underset{\substack{k \to +\infty \\ k \in M}}{\longrightarrow} \hat{h}$$

On passe à la limite lorsque $k \to +\infty$ dans l'expression * on obtient

$$\frac{1}{2} \hat{h} \nabla^2 f(x^*) \hat{h} \leq 0$$

et Comme $\hat{h} \neq 0$ $(\|\hat{h}\| = 1)$ alors $\nabla^2 f(x^*) \leq 0 \Rightarrow$ ~~$\nabla^2 f(x^*)$ est semi-definie negative~~ $\Rightarrow$ n'est pas definie positive donc on a une contradiction $\Rightarrow x^*$ est le min local strict de f.

car $\exists\, \underset{\neq 0}{\hat{h}} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\nabla^2 f(x^*)$ n'est pas definie positive

dans la définition de $\nabla^2 f(x^*) > 0$ il faut $\forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $h^T \nabla^2 f(x^*) h > 0$

et si $\hat{h} = 0$ on a $\hat{h}^T \nabla^2 f(x^*) \hat{h} = 0$ on n'a pas une contradiction

il faut $\hat{h} \neq 0$ (on a $\|\hat{h}\| = 1$)

Théorème: si f est Convexe alors tout minimum local est aussi global de plus si f est differentiable alors tout point stationnaire de f est un min globale de f

Démo: Supposons que f est convexe et x^* est un min local de f mais n'est pas global donc, $\exists z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underset{\text{n'est pas globale}}{f(z) < f(x^*)}$, Considérons le segment reliant les points z et x^* $\quad x = \lambda z + (1-\lambda) x^*$, $\lambda \in]0,1]$

f est Convexe alors

$$f(x) = f(\lambda z + (1-\lambda) x^*) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(x^*) \quad \text{----} \quad *$$

mais $\quad f(z) < f(x^*) \Rightarrow \lambda f(z) < \lambda f(x^*) \quad \lambda \neq 0$

de * $f(x) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^*) = f(x^*) \rightarrow f(x) < f(x^*)$

On remarque que le point x est au voisinage de x^*, $\forall \lambda \in]0,1]$

Car x décrit le segment qui relie les pts x^* et z

c.à.d x^* n'est pas un min local $\Rightarrow x^*$ est un min global de f

Supposons maintenant que f est G-D et $\hat{x}$ un point stationnaire de f mais n'est pas un min global de f alors $\exists z \in \mathbb{R}^n, z \neq \overset{*}{x}$ tel que $f(z) < f(x^*)$ — $*$

f est G-D en $x^* \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x^* + t(z - x^*)) - f(x^*)}{t} = \langle \nabla f(x^*), z - x^* \rangle$

$t \in]0, 1[\quad h = z - x^*$.

et f est convexe $\Rightarrow f(x^* + t(z - x^*)) = f(tz + (1-t)x^*)$

$$\leq t f(z) + (1-t) f(x^*)$$

$t > 0$

$$\frac{f(x^* + t(z - \overset{*}{x})) - f(x^*)}{t} \leq \frac{t\,[f(z) - f(x^*)] + f(x^*) - f(x^*)}{t} = f(z) - f(x^*)$$

On passe à la limite lorsque $t \to 0$, on obtient

$$\langle \nabla f(x^*), z - x^* \rangle \leq f(z) - f(x^*) < 0 \text{ d'après } *$$

$$\langle \nabla f(x^*), z - x^* \rangle < 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) \neq 0 \text{ car } z \neq x^*$$

$$\langle \nabla f(x^*), z - x^* \rangle \neq 0 \text{ et } z - x^* \neq 0$$

c-à-d x^* n'est pas un point stationnaire, ceci une contradiction. Alors x^* est un min global de f.