Série N°2

Exo1 Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,1]$: On a

$N(tx+(1-t)y) \leq N(tx)+N((1-t)y)$ l'inégalité triangulaire

$= tN(x)+(1-t)N(y) \Rightarrow N$ convexe

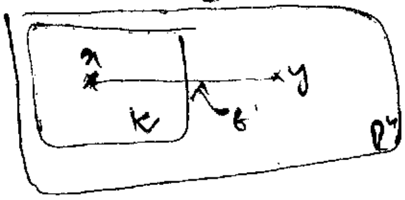
Exo2 ⇒ Supposons que K convexe et soient $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,1]$

* Si $(x,y)\in K^2$ $1_K(\underbrace{tx+(1-t)y}_{\in K\ (K \text{ convexe})}) = 0 = t1_K(x)+(1-t)1_K(y)$

* $x\in K$ et $y\in\mathbb{R}^n - K$. $1_K(x)=0$ et $1_K(y)=+\infty$.

et $1_K(\underbrace{tx+(1-t)y}_{\in\mathbb{R}^n}) = +\infty$ d'où l'égalité $\forall t\in[0,t']$

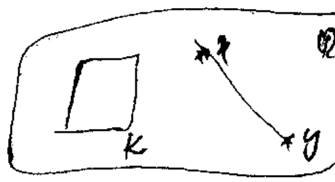
et $1_K(tx+(1-t)y)=0$ $\forall t\in[t',1]$ d'où l'inégalité stricte



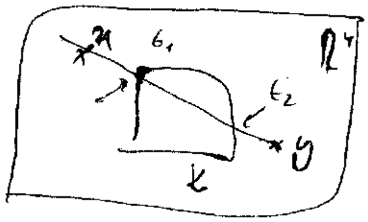
* Si $x,y\in\mathbb{R}^n-\{K\}$ On a $1_K(x)=1_K(y)=+\infty$

* $1_K(tx+(1-t)y)=0$, $\forall t\in[0,1]$ dans le cas $(1-t)y+tx\notin K$

d'où l'inégalité stricte



mais $\begin{cases} 1_K(tx+(1-t)y)=0 & \forall t\in[t_1,t_2] \\ 1_K(tx+(1-t)y)=+\infty, & \forall t\in[0,t_1[\cup]t_2,1] \end{cases}$



d'où $1_K(tx+(1-t)y)\leq t1_K(x)+(1-t)1_K(y)$

Finalement 1_K est convexe

⇐ Supposons que 1_K convexe et soient $(x,y)\in K$, $t\in[0,1]$

$0\leq 1_K(tx+(1-t)y)\leq t1_K(x)+(1-t)1_K(y)=0$.

(par définition $1_K:\mathbb{R}^n\to\{0,+\infty\}$)

d'où $1_K(tx+(1-t)y)=0 \Rightarrow tx+(1-t)y\in K \Rightarrow K$ convexe

Exo3

$\Rightarrow$ Supposons que f est convexe, soient (u,α) et $(v,\beta) \in epi(f)$ et $t \in [0,1]$

Pour montrer que $epi(f)$ est convexe il faut montrer que

$$t(u,\alpha)+(1-t)(v,\beta) \in epi \Leftrightarrow (tu+(1-t)v,\ t\alpha+(1-t)\beta) \in epi(f)$$

$$\Leftrightarrow f(tu+(1-t)v) \leq t\alpha+(1-t)\beta$$

On a $tu+(1-t)v \in U$ (U convexe) et comme f est convexe on a.

$$f(tu+(1-t)v) \leq tf(u)+(1-t)f(v) \leq t\alpha+(1-t)\beta \text{ car } (u,\alpha) \text{ et } (v,\beta)$$

deux éléments de $epi(f)$ c-à-d $f(u) \leq \alpha$ et $f(v) \leq \beta$.

"$\Leftarrow$" Supposons que $epi(f)$ est convexe et on prend $(u, \underbrace{f(u)}_{=\alpha})$ et $(v, \underbrace{f(v)}_{=\beta}) \in epi(f)$

car $\underbrace{f(u)}_{=\alpha} = f(u)$ et $f(v) = \underbrace{f(v)}_{=\beta}$ et $epi(f)$ convexe $\Rightarrow t(u,f(u))+(1-t)(v,f(v))$

un élément de $epi(f) \Leftrightarrow (tu+(1-t)v,\ tf(u)+(1-t)f(v)) \in epi(f)$

$$\Leftrightarrow f(tu+(1-t)v) \leq tf(u)+(1-t)f(v) \Rightarrow f \text{ est convexe.}$$

Exo4

Supposons que F est convexe, soient $t_2 \geq t_1 > 0$ on pose $t = \frac{t_1}{t_2} \in]0,1]$

On a $F(u+t_1v) = F(u+t\,t_2v) = F(u+tu-tu+t\,t_2v)$

$$= F((1-t)u+t(u+t_2v))$$

$$\leq (1-t)F(u)+tF(u+t_2v)$$

$$F(u+t_1v)-F(u) \leq t[F(u+t_2v)-F(u)] = \frac{t_1}{t_2}[F(u+t_2v)-F(u)]$$

$$\frac{F(u+t_1v)-F(u)}{t_1} \leq \frac{F(u+t_2v)-F(u)}{t_2} \quad t_1 \text{ et } t_2 \neq 0.$$

$$\Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2) \quad \text{si} \quad t_1 \leq t_2 \Rightarrow \phi \text{ est croissante.}$$

Exo5:

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ et supposons que f_i est convexe $\forall i \in I$

On a $f_i(x) \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_i(x) \Rightarrow tf_i(x) \leq t\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_i(x)$ $\quad \forall i \in I$

et $f_i(y) \leq \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} f_i(y) \Rightarrow (1-t)f_i(y) \leq (1-t)\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} f_i(y)$

d'où $f_i(tx+(1-t)y) \leq t f_i(x) + (1-t) f_i(y) \leq t \sup f_i(x) + (1-t) \sup f_i(y)$

f_i Convexe $\qquad \forall i \in I$

Donc $\sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \{ f_i(tx+(1-t)y) \} \leq t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_i(x) + (1-t) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} f_i(y)$

$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_i(x)$ est Convexe.

Exo6 $\quad ab = (a^p)^{1/p} (b^q)^{1/q}$ et q

$ab = e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + (1-\frac{1}{p})\ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Car exp est une fonction Convexe

Exercice 7

On va montrer que si f est convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ alors

$\forall (\lambda_i)_{i=\overline{1,p}} \in (\mathbb{R}^+)^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $\forall (x_i)_{i=\overline{1,p}} \in \mathbb{R}^{np}$, $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

* Par récurrence.

Pour $p=2$, Soit λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tq $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ et soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^n$

On a $\quad \lambda_1+\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1-\lambda_1$ avec $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_1+\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$$
$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

donc pour $p=2$ vrai.

On suppose que la proposition est vraie pour p on démontre pour $p+1$.

Soit $(\lambda_i)_{i=1,p+1} \in (\mathbb{R}^+)^{p+1}$ tq $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ et soit $(x_i)_{i=1,p+1} \in (\mathbb{R}^n)^{p+1}$.

donc $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ et soit $i_0 \in \{1,\dots,p+1\}$ tel que $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{p+1} \lambda_i \neq 0$.

posant $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{p+1} \lambda_i = \mu$ donc $\mu + \lambda_{i_0} = 1$ et $\mu > 0$ et $\lambda_{i_0} \geq 0$.

Comme $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{p+1} \lambda_i \neq 0$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ (s'appelle le barycentre de $(\lambda_i, x_i)_{i=\overline{1,p+1}, i\neq i_0}$) de sorte que $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \lambda_i x_i = \mu x$ .... *

et comme f est convexe alors

$$f(\lambda_{i_0} x_{i_0} + \mu x) \leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \mu f(x)$$ d'après il est vraie pour $p=2$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{i=1, i\neq i_0}^{p+1} \lambda_i f(x) \qquad x = \sum_{i\neq i_0}^{p+1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$$

On a $f(x) = f\left(\sum_{i\neq i_0}^{p+1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right)$ et $0 \leq \frac{\lambda_i}{\mu} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i\neq i_0}^{p+1} \lambda_i} \leq 1$ et comme

la propriété est vraie pour p et comme on a p point alors

$$f(x) = f\left(\sum \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right) \leq \sum \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i) \text{ alors}$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right) \leqslant \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \cancel{\sum_{i \neq i_0}^{p+1} \lambda_i} \sum_{i \neq i_0}^{p+1} \frac{\lambda_i}{\cancel{\mu}} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i) .$$

EXO7 ① f convexe $\Rightarrow$ $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle, \forall x,y$

On suppose que f convexe

$\forall x,y \in \Omega, \forall t \in [0,1]$

$$f(ty+(1-t)x) \leq t f(y) + (1-t) f(x).$$

$$f(x+t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y)-f(x))$$

$$\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y)-f(x).$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y)-f(x)$$

$$\langle \nabla f(x), (y-x) \rangle \leq f(y)-f(x)$$

$$f(y) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle + f(x).$$

② $\Rightarrow$ ③ c-à-d, $\forall x,y$ $f(y) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle + f(x) \Rightarrow$

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0.$$

On a : $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$, $\forall x,y \in \Omega$

et en inversant x et y.

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x-y \rangle$$

la somme

$$f(y)+f(x) \geq f(x)+f(y) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \langle \nabla f(y), y-x \rangle$$

$$= \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y-x \rangle \leq 0$$

$$\langle \nabla f(y) - f(x), y-x \rangle \geq 0.$$

③ → ①

supposons que ∇ est monotone

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq 0$$

On va démontrer que g' est monotone alors g est convexe g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On introduit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto g(t) = f(ty + (1-t)x)$$

$\mathbb{R} \xrightarrow{Z} \mathbb{R}^{2=n} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$t \mapsto tx+(1-t)y \mapsto$

$g \in C^1$

$$g'(t) = \left[f(Z(t))\right]' = Z'(t) \; \nabla f\, Z(t)$$

$$= \nabla f(ty+(1-t)x)\,(y-x)$$

$$= \langle \nabla f(ty+(1-t)x)\,(y-x) \rangle$$

Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$ ..... *

alors

$$g'(t_2) - g'(t_1) = \langle \nabla f(t_2 y + (1-t_2)x), \nabla f(t_1 y + (1-t_1)x), y-x \rangle$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \langle \nabla f(x + t_2(y-x)) - \nabla f(x + t_1(y-x)), (t_2 - t_1)(y-x) \rangle$$

$$\langle \nabla f(x+t_2(y-x)) - \nabla f(x+t_1(y-x)), x + t_2(y-x) - x - t_1(y-x)$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \langle \nabla f(x+t_2(y-x)) - \nabla f(x+t_1(y-x))$$

car ∇ est monotone d'après ③

≥ 0

donc $g'(t_2) > g'(t_1)$ $(t_2 > t_1) \Rightarrow g$ est croissante monotone

alors g est une fonction d'une seule variable $\Rightarrow g$ est convexe sur $[0,1]$

$$g(t.\overset{y}{1} + (1-t).\overset{x}{0}) \leq t g(1) + (1-t) g(0)$$

c-à-d $g(t) \leq t g(1) + (1-t) g(0)$

$\leq t g(y) + (1-t) g(x) = t f(y) + (1-t) f(x)$

alors $f(ty + (1-t)x) \leq t g(y) + (1-t) g(x)$

Remarque si en (*) on prend $t_2 > t_1$ on obtient que g' est décroissante $\Rightarrow g'$ monotone

$\Rightarrow g$ est convexe c-à-d $\forall t_1, t_2 \in [0,1] \Rightarrow g(t_2) - g(t_1) \geq$ ou $\leq$ = monotone il suffit de signe constant sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ Supposons que f est convexe $\Rightarrow$ montrons $\Rightarrow \langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x\rangle \geq 0$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ fixé et notons $g : \Omega \to \mathbb{R}$ $g(x) = \langle \nabla f(x), h\rangle$ $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

On a $\nabla^2 f(x), h = \nabla \langle \nabla f(x), h\rangle = \nabla g(x)$

donc $\langle \nabla^2 f(x) h, h\rangle = \langle \nabla g(x), h\rangle = \frac{\partial g}{\partial h}(x) = D_h g(x) = \lim_{t \to 0} \frac{g(x+th) - g(x)}{t}$

d'après dérivée directionnelle

$= \lim_{t\to 0} \frac{\langle \nabla f(x+th), h\rangle - \langle \nabla f(x), h\rangle}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(x+th) - \nabla f(x), h\rangle}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(x+th) - \nabla f(x), th\rangle}{t^2}$

Soit $x, y \in U$ arbitraires et $h = y - x$ comme U est convexe soit $t \in [0,1]$

$x + t(y-x) \in U$

$\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x), t(y-x)\rangle}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x), x+t(y-x)-x\rangle}{t^2}$

et d'après l'exercice du début f est convexe alors ∇f est monotone

donc $\frac{\langle \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x), x+t(y-x)-x\rangle}{t^2 \geq 0} \geq 0$

dans la limite aussi Alors $\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x\rangle \geq 0$

"$\Leftarrow$" Supposons que $\langle \nabla^2 f(x)(y-x), (y-x)\rangle \geq 0$ — $*$

Soient $x, y \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ — On va démontrer que ∇ est monotone

$x \longmapsto g(x) = \langle \nabla f(x), h\rangle$ — c-à-d g est monotone

$g(x) = g(y + (x-y))$

en utilisant le developpement de Taylor de $g(y+(x-y))$

au point $a=y$, $h = x-y$ et à l'ordre $p=1$

$g(x) = g(\overset{a=y}{y} + \overset{h}{(x-y)}) = g(y) + \langle \nabla g(y), x-y\rangle$

$g(x) - g(y) = \langle \nabla g(y), x-y\rangle$

$\nabla^2 f(x) h = \nabla \langle \nabla f(x), h\rangle = \nabla g(x)$.

$\langle \nabla^2 f(x) \times h, h\rangle = \langle \nabla g(x), h\rangle$

$\langle \nabla^2 f(y) h, h\rangle = \langle \nabla g(y), h\rangle$

Pour $h = x-y$ on obtient

$\langle \nabla g(y), x-y\rangle = \langle \nabla^2 f(y)(x-y), (x-y)\rangle \geq 0$ d'après $*$

$\langle \nabla g(y), x-y\rangle \geq 0$.

$\qquad \parallel$

$g(x) - g(y) \geq 0$.

$\qquad \parallel$

$\langle \nabla f(x), h\rangle - \langle \nabla f(y), h\rangle = \langle \nabla f(x) - f(y), x-y\rangle \geq 0$

donc g est monotone.

Alors ∇ est monotone $\Rightarrow$ f est convexe d'après l'exercice précédent.