Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI

3ème Année Licence Maths(S5) Module : Optimisation

Série 2

Exercice 01 :
Montrer qu'une norme est convexe.

Exercice 02 :
Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble Ω définie par

$$1_\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

est convexe si et seulement si Ω est convexe.

Exercice 03 :
Soit U une partie convexe d'un espace vectoriel V . Montrer que $f : U \subset V \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si l'ensemble suivant :

$$epi\ (f) = \{(v; \alpha) \subset U \times \mathbb{R} \ / \ \ \alpha \geq f(v)\}$$

est une partie convexe de $U \times \mathbb{R}$.

Exercice 04 :
Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. on définit la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ suivante :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \Phi(\alpha) = \frac{F(u + \alpha v) - F(u)}{\alpha}$$

Montrer que si F est convexe alors Φ est croissante.

Exercice 05 :
Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes de $U \subset V \to R$.
Demontrer que la fonction $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\sup} f_i$ est convexe.

Exercice 06 :
Montrer l'inegalité de Young : $\forall a, b > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Exercice 07 :
Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall\, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in (\mathbb{R}^n)^p \ \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \ \forall\, (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in (\mathbb{R}^n)^p ; \ \ f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f\,(x_i)$$

Exercice 08 : (caractérisation de la convexité)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $U \subset \Omega$ avec U convexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur U
2. $$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x); y - x \rangle \,; \forall x; y \in U$$

3. ∇f est monotone sur U.

Exercice 09 : (U convexe)

Soit f est de classe C^2 sur alors f est convexe sur U si et seulement si

$$\left\langle \nabla^2 f(x)(y - x); y - x \right\rangle \geq 0; \forall x; y \in U$$