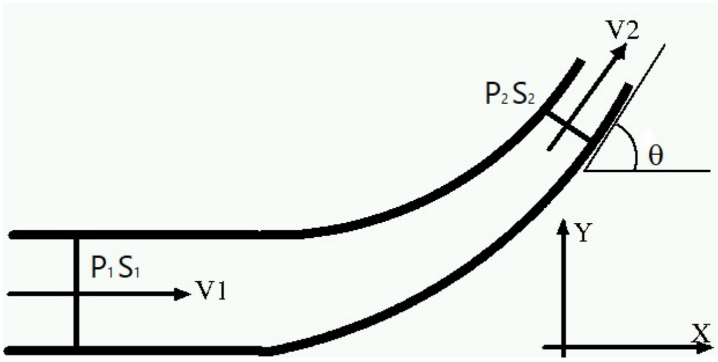
نظرية كمية الحركة أو نظرية أويلر-Euler-

هي واحدة من أهم النظريات في ميكانيكا الموائع، ويمكن تلخيصها على النحو التالي: القوة الكلية المطبقة على مائع متحرك تساوي التغير في كمية الحركة. هذه النظرية تجعل من الممكن تقدير قوة تأثير نفاثة على لوحة في حالة قطع الاجسام الصلبة مثلا أو التباين في كمية الحركة عند المرور عبر كوع في حالة السريان في القنوات. بشكل عام، فإنه يجعل من الممكن تقدير قوة عمل السائل بعد أي تغيير في الاتجاه أو مقطع المرور.

القوة المطبقة على تغيير المقطع أو الاتجاه، وفقًا لمبدأ نيوتن:

$$\boldsymbol{F = ma = m\frac{dV}{dt} = \frac{d(mV)}{dt}}$$

إذن هذه هي معادلة كمية الحركة المعروفة بمعادلة الزخم. لتطبيق هذه النظرية نأخذ سائلا يجري داخل مرفقا أو كوعًا متقاربًا مائلا بزاوية θ كما هو مبين في الشكل:



عند النقطة 1 الضغط هو P_1 و المقطع هو S_1 و كذلك عند النقطة 2. أذا طبقنا نظرية أويلر نكتب:

$$\sum \boldsymbol{F_{ext} = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{m}{\Delta t}\Delta v = \dot{m}\Delta v = \rho\dot{Q}\Delta v}$$

إذا قمنا بتسمية قوى السائل المؤثرة على الكوع ب Fx و Fy، نحصل على Fx- و Fy- كرد فعل للكوع على السائل، و هذا ما يحدث حسب نظرية أويلر. القوى الأخرى الخارجية هي قوي الضغط P_1S_1 و P_2S_2 . نقوم بالإسقاط على المحورين X و Y .

على X:

$$\boldsymbol{P_1S_1 - P_2S_2cos(\theta) - F_x = \dot{m}(V_2cos(\theta) - V_1)}$$

$$\boldsymbol{F_x = P_1S_1 - P_2S_2cos(\theta) - \dot{m}(V_2cos(\theta) - V_1)}$$

على Y:

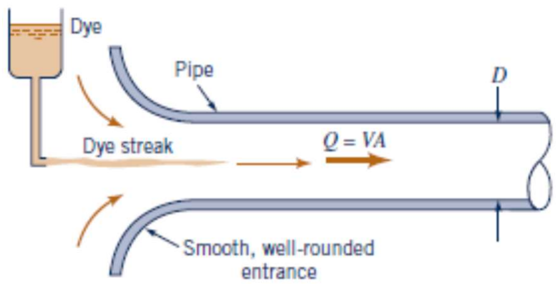
$$\boldsymbol{0 - P_2S_2sin(\theta) - F_y = \dot{m}(V_2sin(\theta) - 0)}$$

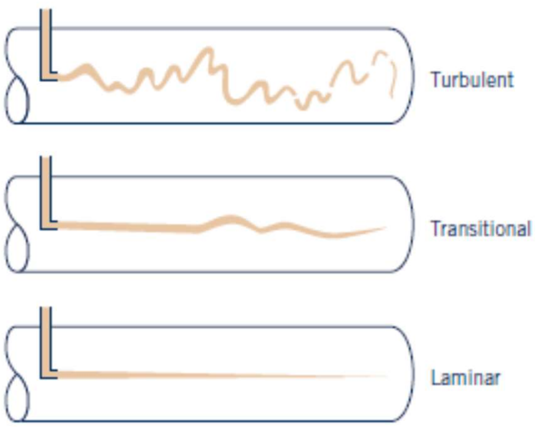
$$\boldsymbol{F_y = -P_2S_2sin(\theta) - \dot{m}V_2sin(\theta)}$$

الفصل 4: ديناميكا السوائل الحقيقية غير القابلة للضغط

1. أنماط التدفق وتجربة رينولدس-Reynolds-

هناك نوعان أساسيان من أنماط التدفق للسوائل: النمط الأول يسمى رقائقي أو صفائحي-laminaire- والنمط الثاني مضطرب-turbulent-، في النمط الأول يتدفق السائل في صفائح تنزلق فوق بعضها البعض؛ حيث يتم ملاحظة خطوط السريان بشكل واضح. من ناحية أخرى، في النظام المضطرب، تعطي خطوط السريان أشكالًا فوضوية مختلطة. كان أوزبورن رينولدز -Osborne Reynolds-(1912-1842) أول من ميز الفرق بين نظامي التدفق هذين. استخدم رينولدس تدفق الماء في أنبوب دائري بقطر D بسرعة V.حيث يحقن خط من الحبر عبر انبوب رفيع في الماء. لأحظ رينولدس انه بالنسبة للسرعات المنخفضة، يظل خط الحبر متميز للغاية مع سماكة طفيفة بسبب الانتشار في الماء. عندما يزداد التدفق (سرعة أعلى للماء)، يبدأ خط الحبر بالتذبذب في الزمان والمكان مع وجود فواصل متقطعة وغير منتظمة على طول الخط. بالنسبة للتدفقات الكبيرة، سرعان ما يصبح الخط غير واضح وينتشر بشكل عشوائي في الأنبوب. تسمى هذه الظواهر الثلاثة أنظمة: رقائقية أوصفائحية،عابرة-transitoire- ومضطربة.



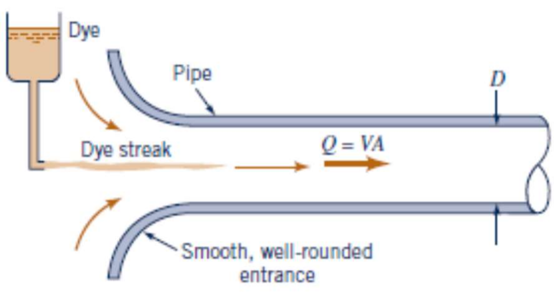


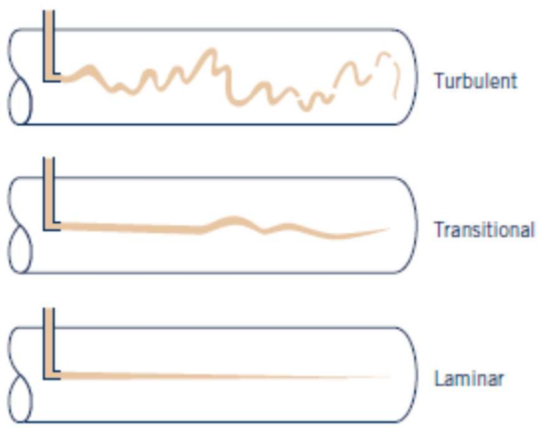
التقلبات المضطربة هي سبب تشتت الحبر في الأنبوب. في التدفق الصفحي للسرعة مكون واحد $\vec{V} = u\vec{i}$. بالنسبة إلى النمط المضطرب، الاتجاه السائد هو على طول الأنبوب مصحوبًا بالمكونات العمودية عليه $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. بعد ما أجرى رينولدس العديد من التجارب أين غير قطر الانبوب، السائل والسرعة، تمكن من ان يثبت ان العدد المهم الذي يحدد نمط التدفق في الأنبوب، والذي سماه باسمه، "عدد رينولدز" هو $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ حيث V هي متوسط السرعة في الأنبوب، لذلك يكون التدفق صفحيًا إذا كان $Re < 2100$ ، يكون مضطربًا إذا $Re > 4000$ بين الاثنين هو الانتقال.

Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles réels

1. Régimes d’écoulements et expérience de Reynolds

Il existe deux régimes d’écoulement pour les fluides : Laminaire et turbulent, Dans le premier régime le fluide s’écoule en lamelles qui glissent les unes sur les autres ; les lignes de courant sont bien définies. Par contre, dans le régime turbulent les lignes de courant se mélangeant donnant des formes chaotiques. Osborne Reynolds **(1842-1912)** est le premier à distinguer la différence entre ces deux régimes d’écoulements. Il utilise un écoulement d’eau dans une conduite circulaire de diamètre **D** avec une vitesse **V**. Reynolds injecte un filet neutre de colorant dans l’eau ; pour les petites vitesses le filet reste bien distinct avec un léger épaississement dû à la diffusion du colorant dans l’eau. Pour un débit plus important (vitesse plus grande), le filet de colorant commence à fluctuer dans le temps et dans l’espace avec des ruptures intermittentes et irrégulières le long de la conduite. Pour les grands débits, le filet devient rapidement non distinct et diffuse dans la conduite de façon aléatoire. Ces trois phénomènes sont dits régimes : laminaire, transitoire et turbulent.





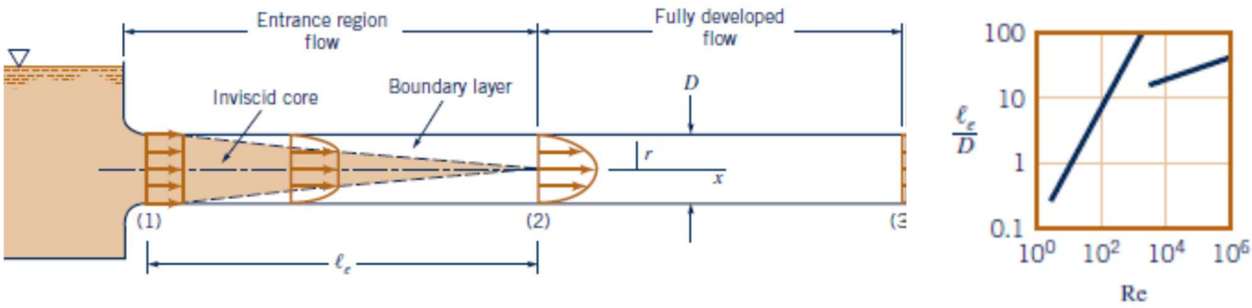
Les fluctuations turbulentes sont la cause de la dispersion du colorant dans la conduite. En écoulement laminaire la vitesse a une seule composante $\vec{V} = u\vec{i}$. Pour celui turbulent la direction prédominante est celle le long de la conduite accompagnée des composantes normales à la conduite $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. Le paramètre important qui détermine le régime d’écoulement dans la conduite est dit « nombre de Reynolds » : $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ où **V** est la vitesse moyenne dans la conduite, ainsi l'écoulement est laminaire si $Re < 2100$, il est turbulent si $Re > 4000$ entre les deux c'est la transition.

2.طول المدخل والتدفق المتطور:

يُطلق على بداية الأنبوب منطقة "المدخل"، حيث يدخل السائل بسرعة ثابتة تقريبًا (القسم (1)). أثناء حركتها، تشكل التأثيرات اللزجة طبقة بالقرب من الجدار تسمى "الطبقة الحدودية"، في هذه الطبقة تنخفض السرعة باتجاه الجدار حتى تنعدم على هذا الأخير تحت تأثير اللزوجة. عندما يعبر السائل منطقة المدخل يصبح توزيع السرعة العمودي ثابتا ابتداء من مسافة l_e من المدخل، يقال إن التدفق "متطور بالكامل".

يتم إعطاء طول المدخل للتدفق الرقائقي بواسطة: $l_e = 0.06DRe$

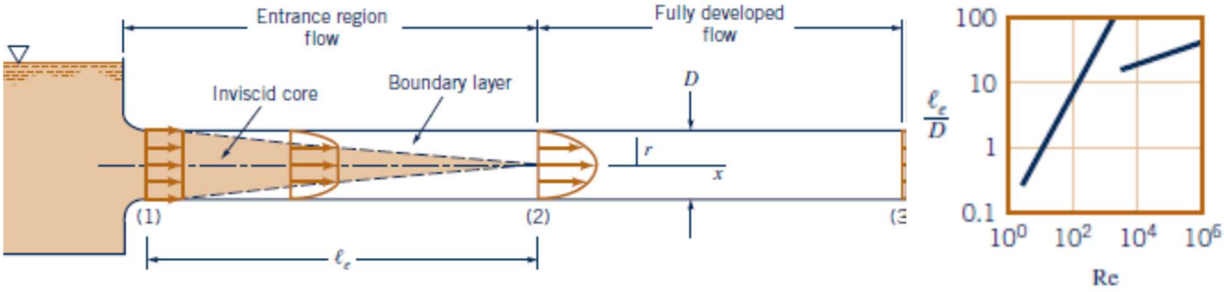
أما للتدفق المضطرب يكون: $l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}$



2. Longueur d'entrée et écoulement développé :

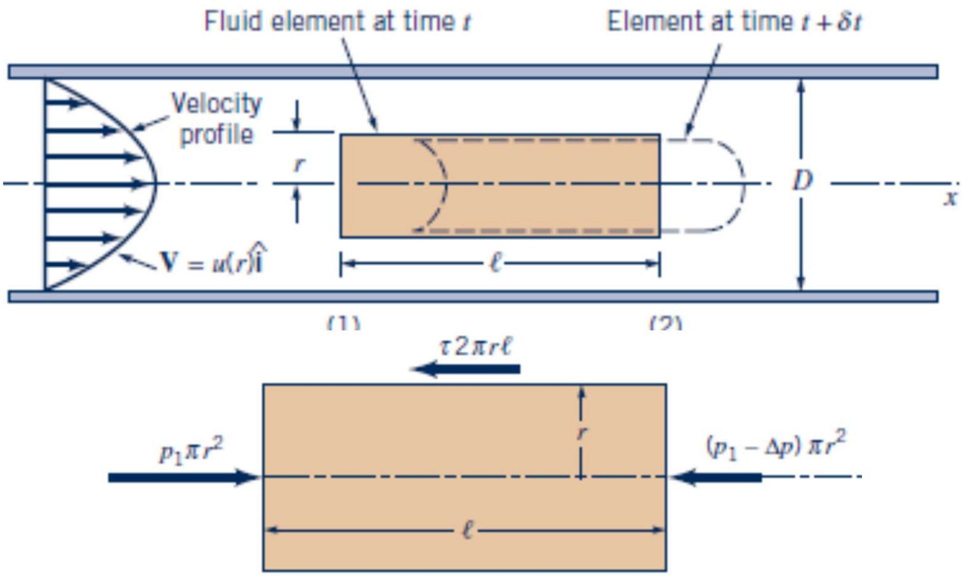
L'entrée d'une conduite est dite région « d'entrée », le fluide entre avec une vitesse presque constante (section (1)). Lors de son mouvement, les effets visqueux forment une couche près de la paroi dite « couche limite », dans cette couche la vitesse diminue vers la paroi jusqu'à s'annuler sur cette dernière sous l'effet de la viscosité. A partir d'une distance de l'entrée le profil de vitesse reste inchangé, l'écoulement est dit alors « totalement développé ». Pour un écoulement laminaire, la longueur d'entrée est donnée par **:** $l_e = 0.06DRe$

Pour l'écoulement turbulent elle est : $\boldsymbol{l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}}$



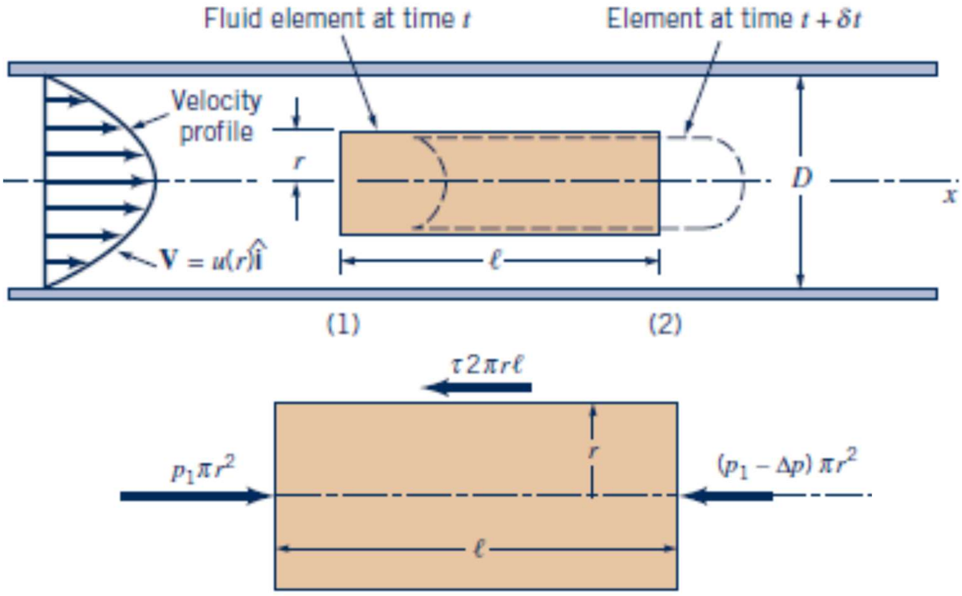
<u>**3. خسائر الضغط الخطي في الأنابيب**</u>

في هذا الجزء سوف نحسب خسائر الضغط أو الارتفاع المسمى "خسائر الضغط"، وهذا الأخير ناتج عن الاحتكاك بين جزيئات السائل والجدران الصلبة للأنابيب. سننظر في الجريان المتطور في الأنابيب، ثم نحسب انخفاض الضغط P على طول الأنبوب الناتج عن الاحتكاك بين جزيئات السائل والجدران. لهذا، نأخذ عنصرًا أسطوانيًا من السائل بطول *l* ونصف قطر r متمركز على المحور x الأفقي في أنبوب قطره D.



3. Pertes de charges linéaires dans les conduites

Dans cette partie on va calculer les pertes de pression ou de hauteur dites « pertes de charges », ces dernières sont dues aux frottements entre les particules fluides et les parois solides des conduites. On va considérer l'écoulement totalement développé dans les conduites, ensuite on calculera les pertes de charges **ΔP** le long de la conduite qui sont causés par le frottement entre les particules fluides et les parois. Pour cela prenons un élément cylindrique de fluide de longueur ***l*** et de rayon ***r*** centré à l'axe ***x*** horizontal dans une conduite de diamètre ***D***.



نمثل الأسطوانة في الأوقات t و t + Δt ؛ يتطور الجريان ثم يكون توزيع السرعة ثابتًا مما يعني أن التسارع المحلي هو صفر ($dv/dt = 0$). إذا تم إهمال تأثيرات الجاذبية ($g = 0$) ، يكون الضغط ثابتًا في المقاطع العرضية ويختلف على طول الأنبوب من قسم إلى آخر. نأخذ نقطتين (1) و (2) ، عند النقطة (1) $P = P_1$ عند النقطة (2) $P = P_2$. نظرًا لوجود خسارة في الضغط (الارتفاع) ، فإن $P_2 = P_1 - P$ مع ΔP هو انخفاض الضغط بين النقطتين (1) و (2) ($P > 0$).

نعلم ان الإجهاد اللزج متعلق بالمسافة من سطح الانبوب r، $\tau = \tau(r)$ ، نطبق قانون نيوتن الثاني $F = ma$ على الأسطوانة في اتجاه الجريان x $F_x = \Sigma ma_x$ في هذه الحالة $a_x = 0$ (تدفق متطور بالكامل) ، لذلك يصبح لدينا :

$$\boldsymbol{p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0}$$

هذا يعطي $\frac{2\tau}{r} = \frac{\Delta p}{l}$ ، و بما ان $\frac{\Delta p}{l}$ لا يتعلق ب r ، يجب ألا يتعلق $\frac{2\tau}{r}$ أيضًا بها ، أي يجب أن تكون τ مساوية لـ $\tau = cte.r$ حيث نطبق شروط الحدود لحساب هذا الثابت.

عند $r = 0$ لدينا $\tau = 0$ ، لا يوجد احتكاك ، وعند $r = D/2$ (على جدار الأنبوب) يكون الاجهاد الأقصى، ويسمى τ_p أو τ_w وبالتالي $\tau_w = cte.D/2$ الذي يعطي $cte = 2\tau_w/D$ ونحصل على الاجهاد بدلالة r : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ يتغير هذا الضغط خطيًا مع r. إذا استبدلنا τ في العلاقة:

$$p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - 4\pi \frac{\tau_w}{D} l r^2 = 0.$$

نجد :

$$\boldsymbol{\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}}$$

تعني هذه الصيغة أن قيمة معتدلة (صغيرة) لـ τ_w يمكن أن تؤدي إلى خسارة كبيرة في الضغط أو الارتفاع إذا كان الأنبوب طويلاً بما يكفي ***l/D>>1***.

On représente le cylindre aux temps ***t*** et ***t+Δt*** ; l'écoulement étant développé alors le profil de vitesse est constant ce qui veut dire que l'accélération locale est nulle (***dv/dt=0***). Si les effets de la gravité sont négligés (***g=0***), la pression est constante dans les sections transversales et varie le long de la conduite d'une section à une autre. Prenons deux points ***(1)*** et ***(2)***, au point ***(1)*** $P=P_1$ au point ***(2)*** $P=P_2$. Puisqu'il y'a perte de charge (de pression) alors $P_2= P_1- \Delta P$ avec ΔP est la chute de pression entre les points ***(1)*** et ***(2)*** ($\Delta P >0$).

La contrainte visqueuse est fonction de ***r***, $\tau=\tau(r)$, appliquons la deuxième loi de Newton ***F=ma*** au cylindre dans la direction x : $F_x=\Sigma m.a_x$ dans ce cas $a_x=0$ (écoulement totalement développé), on a donc : $\boldsymbol{p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0}$ cela donne $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$. Puisque $\frac{\Delta p}{l}$ ne dépendent pas de ***r***, il faut que $\frac{2\tau}{r}$ n'en dépendent pas aussi, c.a.d. que τ doit être égale ***τ=cte.r***. Appliquons les conditions aux limites pour calculer cette constante.

A ***r=0*** on a, ***τ=0*** pas de frottement, et à ***r=D/2*** (sur la paroi de la conduite) la contrainte est maximale, elle est notée τ_p ou τ_w donc $\tau_w= cte.D/2$ ce qui donne $cte=2\tau_w/D$ et on obtient la contrainte en fonction de ***r*** : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ cette contrainte varie linéairement en fonction de ***r***. Si on remplace τ dans la relation :

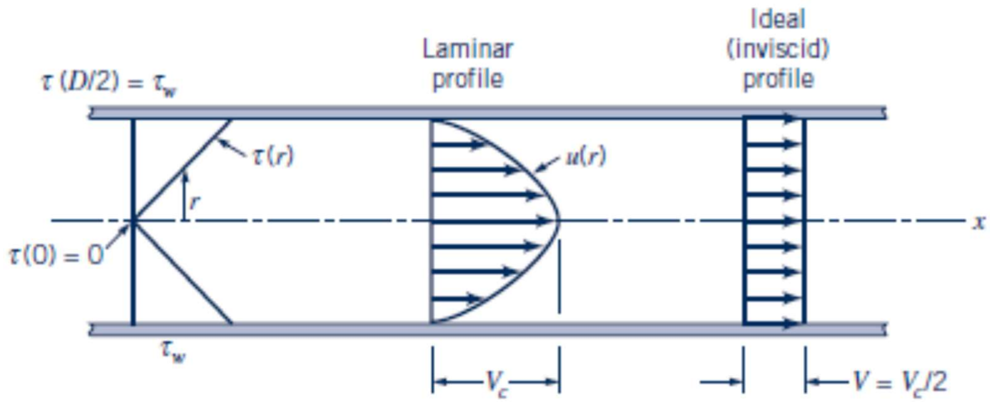
$$p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - 4\pi \frac{\tau_w}{D} l r^2 = 0.$$

On trouve : $\boldsymbol{\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}}$.

Cette formule veut dire qu'une valeur modérée (petite) de τ_w peut produire une perte de charge importante si la conduite est suffisamment longue ***l/D>>1***.

4 حساب توزيع السرعة والتدفق وفقًا لانخفاض الضغط

نأخذ جريان متطورفي أنبوب دائري كما هو موضح في الشكل.



نعلم أن إجهاد الاحتكاك في سائل نيوتن يتناسب مع تدرج السرعة: $\boldsymbol{\tau = \mu \frac{du}{dr}}$ في هذه الحالة $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$ ، يتم تضمين العلامة (-) لإعطاء $\tau>0$ لان $du / dr < 0$. من خلال دمج المعادلات: $\boldsymbol{\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}}$ و $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$ ، سيكون لدينا $\boldsymbol{\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r}$

يعطي التكامل توزيع السرعة: $\boldsymbol{\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r dr}$ حيث $\boldsymbol{u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1}$

c_1 ثابت ، لإيجاده نطبق شروط الحدود.

عند جدار الأنبوب تكون السرعة صفرًا $\boldsymbol{r = \frac{D}{2} \rightarrow u = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$

وبالتالي فإن توزيع السرعة هو:

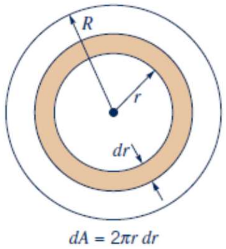
$$\boldsymbol{u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_a \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

نلاحظ أن $\boldsymbol{V_a = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$ هي السرعة على محور الأنبوب الذي نصف قطره $\boldsymbol{R = \frac{D}{2}}$.

يمكن إيجاد تعبير بديل آخر باستخدام العلاقة $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$\boldsymbol{u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

4.1 حساب التدفق الحجمي للأنبوب



يتم حساب تدفق الحجم عبر الأنبوب من خلال التكامل:

$$\dot{Q} = \int u(r)d\,A = \int_0^R u(r)2\pi r dr = 2\pi V_a \int_0^R u\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr = \frac{\pi R^2 V_a}{2}$$

حسب التعريف، متوسط السرعة هو التدفق الحجمي مقسومًا على مساحة المقطع العرضي:

$$V_m = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}$$

وبالتالي فإن التدفق الحجمي هو :

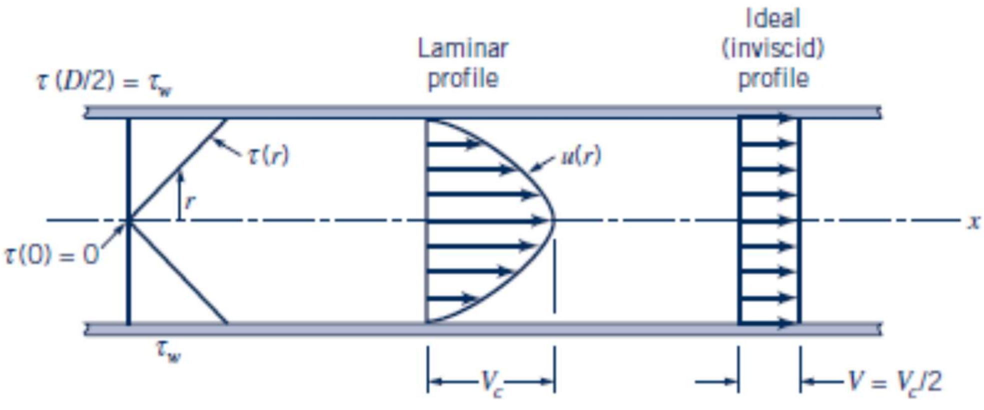
$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$$

والتي تسمى علاقة Poiseuille

توضح هذه العلاقة أنه بالنسبة للتدفق الرقائقي في أنبوب أفقي، يتناسب التدفق بشكل مباشر مع انخفاض الضغط P والقطر D للأنبوب؛ يتناسب عكسيا مع اللزوجة μ وطول الأنبوب l.

3.1 Calcul du profil de vitesse et du débit en fonction de la perte de charge

Prenons un écoulement développé dans une conduite circulaire comme le montre la figure.



On sait que la contrainte de frottement dans un fluide newtonien est proportionnelle au gradient de la vitesse : $\tau = \mu \frac{du}{dr}$ pour notre cas $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$, le signe *(-)* est inclus pour donner $\tau>0$ pour $du/dr < 0$. En combinant les équations : $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ et $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ on aura $\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r$

L'intégration donne le profil de la vitesse : $\int \boldsymbol{du} = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\int \boldsymbol{rdr}$ d'où $\boldsymbol{u(r)} = -\frac{\Delta p}{4\mu l}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{c_1}$

c_1 est constante, pour la trouver appliquons les conditions aux limites.

A la paroi de la conduite la vitesse est nulle : Pour $\boldsymbol{r} = \frac{D}{2} \rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{c_1} = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$

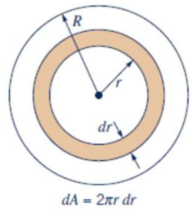
Le profil de vitesse est donc :

$$\boldsymbol{u(r)} = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = \boldsymbol{V_a}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

On note $\boldsymbol{V_a} = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$, la vitesse sur l'axe de la conduite et $\boldsymbol{R} = \frac{D}{2}$ son rayon.

Une autre expression alternative peut être trouvée en utilisant la relation $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$\boldsymbol{u(r)} = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$



Le débit volume à travers la conduite est calculé par :

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \int \boldsymbol{u(r)dA} = \int_0^R \boldsymbol{u(r)2\pi r dr} = \boldsymbol{2\pi V_a}\int_0^R \boldsymbol{u}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\boldsymbol{rdr} = \frac{\pi R^2 V_a}{2}$$

Par définition, la vitesse moyenne est le débit divisé par la section transversale :

$$\boldsymbol{V_m} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}$$

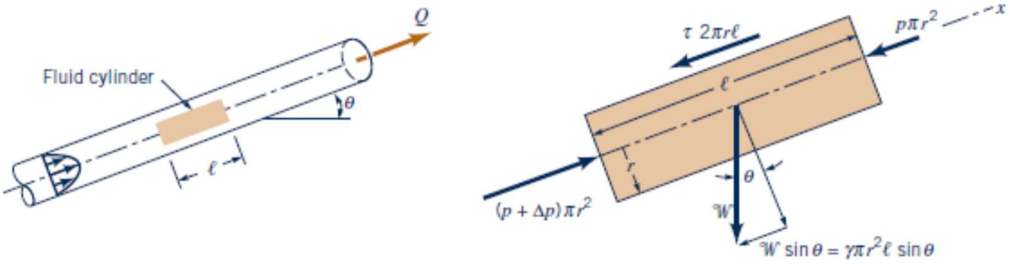
Le débit est donc

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$$ qui est dite relation de Poiseuille

Cette relation montre que pour un écoulement laminaire dans une conduite horizontale, le débit est directement proportionnel à la chute de pression $\Delta \boldsymbol{P}$ et au diamètre $\boldsymbol{D}$ de la conduite ; inversement proportionnel à la viscosité $\boldsymbol{\mu}$ et à la longueur de la conduite **l**.

4.2 حالة الأنبوب المائل

يتم تمديد الدراسة للأنابيب المائلة بأخذ أنبوب مائل بالزاوية θ بالنسبة إلى الأفق.



القوى المطبقة على العنصر المائع الأسطواني هي:

$$(p+\Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l\tau - \rho g\pi r^2 l \sin\theta = 0$$

$$\Delta p r - 2l\tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

نجد نفش شكل العبارة السابقة لذا فإن جميع نتائج الأنبوب الأفقي صحيحة بشرط أن يتم استبدال P بـ :

$\Delta p - \rho g l \sin\theta$ ، ومن ثم سيكون متوسط السرعة:

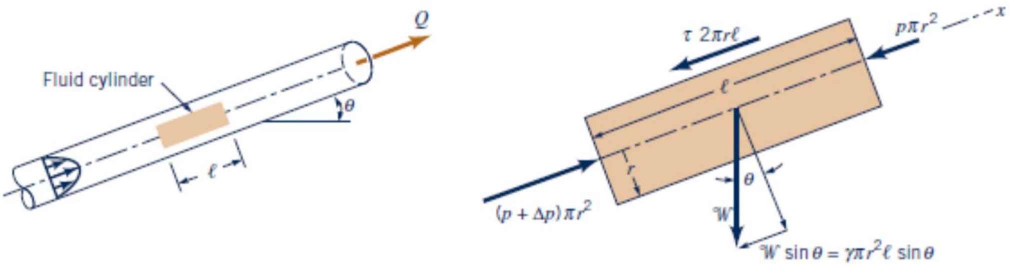
$$V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta) D^2}{32\mu l}$$

والتدفق الحجمي:

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 (\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128\mu l}$$

3.2 Cas d'une conduite inclinée

L'extension pour les conduites inclinées sera faite en prenant une conduite inclinée avec l'angle θ par rapport à l'horizontale.



Les forces appliquées sur l'élément cylindrique sont :

$$(p + \Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l\tau - \rho g\pi r^2 l \sin\theta = 0$$

$$\Delta p r - 2l\tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

Donc tous les résultats de la conduite horizontale sont valides pourvu que ΔP sera remplacée par

$\Delta p - \rho g l \sin\theta$**,** d'où la vitesse moyenne sera :

$$V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta)D^2}{32\mu l}$$

Et le débit : $$\dot{Q} = \frac{\pi D^4(\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128\mu l}$$