Série de TD N°5: Résolution directe des systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous la forme matricielle (AX=B).
2. Calculer le déterminant de la matrice A.
3. Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour la méthode de Gauss.
4. Appliquer l'algorithme de Gauss pour transformer le système AX=B en UX=Y.
5. Calculer le déterminant de U, que peut-on remarquer ?
6. Utiliser la substitution en arrière pour trouver la solution du système.

Exercice 2

On veut calculer la matrice inverse de la matrice A donnée dans l'exercice1.

1. Ecrire le système d'équations qui donne la matrice inverse.
2. Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour la méthode de Gauss.
3. Appliquer l'algorithme de Gauss avec pivotation totale pour trouver la matrice inverse.

Exercice 3

1. Ecrire les matrices de factorisation L et U de la matrice A de l'exercice 1.
2. Calculer le déterminant de la matrice A en utilisant les matrices L et U.
3. Résoudre le système de l'exercice 1 par la méthode LU.

Exercice 4

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 = 11 \end{cases}$$

1. Résoudre le système par l'algorithme de THOMAS (réécrire le système).
2. Vérifier l'applicabilité de la méthode de Cholesky.
3. Résoudre le système par la méthode de Cholesky.

Exercice 4 (Domicile) Résoudre les systèmes suivants par toutes les méthodes possibles

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$