Série de TD : Résolution numérique du problème de Cauchy (de la condition initiale) : méthodes d'Euler, Euler améliorée (Heun) et Runge-Kutta d'ordre 4

Exercice N°1

On donne le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{t} + t, \quad t \in [1, 1.6] \ \ et \ y \in [1,10] \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier la convergence de la méthode numérique de résolution de ce problème.
2. Résoudre l'équation par la méthode d'Euler et d'Euler améliorée (Heun) avec un pas h=0.2.
3. Refaire le calcul par la méthode d'Euler améliorée (Heun) avec un pas h=0.1.
4. Tracer et comparer les résultats avec la solution exacte.

Exercice N°2

On donne le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \cos(y) - t, \quad t, y \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier la condition de Lipschitz pour ce problème.
2. Utiliser la méthode RK4 avec un pas h=0.25 pour résoudre ce problème.
3. Tracer la solution trouvée.

Exercice N°3(A domicile)

On donne le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = y(t + y), \quad t \in [0, 1] \ \ et \ y \in [0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier la convergence de la méthode numérique de résolution de ce problème.
2. Utiliser la méthode d'Euler et d'Euler modifiée avec un pas h=0.2 pour résoudre ce problème.
3. Refaire le calcul par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
4. Tracer les solutions sur le même graphe.

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = -ty^2, \quad t \in [0, 1] \ \ et \ y \in [0.5,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier la convergence de la méthode numérique de résolution de ce problème.
2. Utiliser la méthode Runge-Kutta 4 avec un pas h=0.1 pour résoudre ce problème.
3. Comparer avec la solution exacte en chaque point de calcul.