Série de TD : Intégration numérique par les formules du trapèze de Simpson et de quadrature

Exercice N°1 :

1. Calculer la valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(1) \approx 0.7468$ par :
   a. La méthode des Trapèzes en prenant **1**, 4 et **8** tranches,
   b. La méthode de Simpson en prenant **2**, 6 et **8** tranches,
2. Calculer l'erreur commise par chaque méthode et discuter.

Exercice N°2 :

Soit à calculer numériquement l'intégrale suivante $I = \int_0^3 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{\ln(10)}{2} \approx 1.1513.$

1. Trouver le pas h pour que l'erreur ne dépasse pas 10^{-1} pour la méthode du trapèze et de Simpson,
2. Calculer l'intégrale par ces deux méthodes en utilisant le pas trouvé,
3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale et faite la comparaison.

Exercice N°3 :

On veut calculer $\int_1^3 (xe^x - 1)dx = 2(e^3 - 1) \approx 38.1710$ par une formule de quadrature de la forme : $\int_1^3 f(x)dx = A_0 f(1) + A_1 f(2) + A_2 f(3)$.

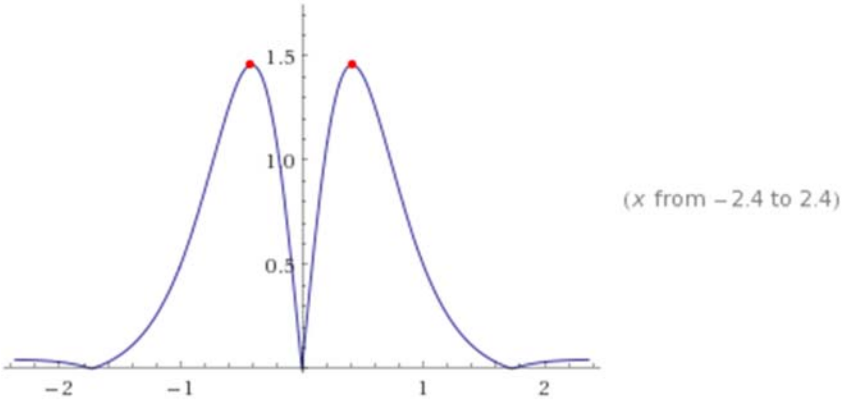
1. Ecrire le système qui donne les coefficients A_i,
2. Résoudre le système et calculer l'intégrale,
3. Evaluer l'erreur dans ce calcul,
4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale et faites la comparaison.

Exercice N°4 (A domicile) :

a) Utiliser la méthode de Simpson pour calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2) \approx 0.6932$ si on prend 2, 4, 6 et 8 tranches.
   1. Calculer l'erreur commise dans ce calcul,
   2. Trouver l'intégrale par la forme $\int_1^2 \frac{dx}{x} dx = A_0 f(1) + A_1 f\left(\frac{4}{3}\right) + A_1 f\left(\frac{5}{3}\right) + A_2 f(2)$.
   3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale et faite la comparaison.

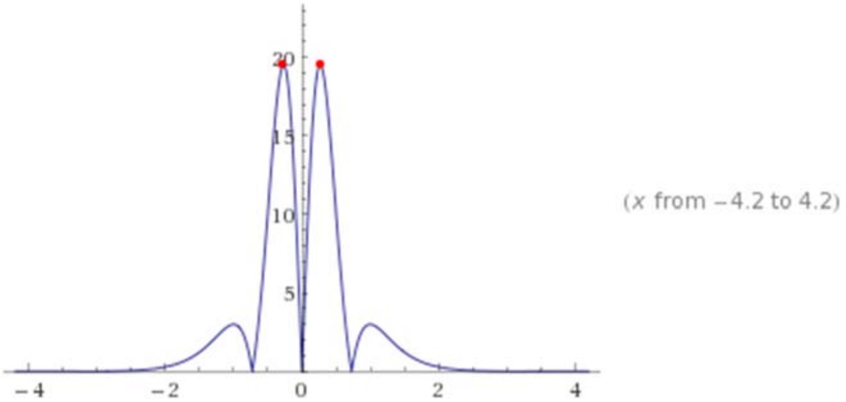
b) Soit à calculer numériquement l'intégrale $I = \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2+1} dx = 2tan^{-1}(3) = 2.4981$ par la méthode de Simpson.
   1. Trouver le pas h pour que l'erreur ne dépasse pas 0.0001,
   2. Calculer l'intégrale si on prend $h=1$,
   3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale et faite la comparaison.

Exercice 2 : Calcul et majoration de la valeur absolue de la seconde et quatrième dérivée.



$$\max\left\{\left|\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\right|\right\} \approx 1.45711 \text{ at } x \approx 0.414214$$

$$\max\left\{\left|\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\right|\right\} \approx 1.45711 \text{ at } x \approx -0.414214$$



$$\max\left\{\left|\frac{24x(x^4-10x^2+5)}{(x^2+1)^5}\right|\right\} \approx 19.4928 \text{ at } x \approx -0.267949$$

$$\max\left\{\left|\frac{24x(x^4-10x^2+5)}{(x^2+1)^5}\right|\right\} \approx 19.4928 \text{ at } x \approx 0.267949$$