Série de TD N°2 : Interpolation par les polynômes de Newton et Lagrange

Exercice 1 : Une expérience donne la distance en fonction du temps par la table suivante :

t(s)	0	2	3	5
x(m)	-1	2	9	87

On veut trouver un approximant de x(t) sur l'intervalle [0,5].

1) Calculer les coefficients polynômes de de Lagrange basés sur la table.
2) Trouver le polynôme de Lagrange qui approxime x(t).
3) Calculer la table des différences divisées de la table donnée.
4) Trouver les polynômes de Newton qui approximent x(t) au degré 1, 2 et 3.
5) Tracer sur le même graphe les polynômes trouvés y compris celui de Lagrange.

Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ x en radians.

1) Trouver le polynôme de Lagrange basé sur les nœuds (points) suivants : 0, 3 et 6.
2) On augmente le nombre de points : 0, 1.5, 3, 4.5 et 6, recalculer le polynôme de Lagrange.
3) Trouver le terme d'erreur ε(x) dans chaque cas.
4) Evaluer l'erreur lorsque on remplace f(2) par P(2) dans les deux cas.
5) Tracer sur le même graphe la fonction f et les polynômes trouvés.

Exercice 3 : Soit à calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

1. Trouver le polynôme de Newton pour la fonction f basé sur les points $0, \frac{1}{2}, et\ 1$.
2. Calculer l'intégrale I en utilisant le polynôme trouvé.
3. Evaluer l'erreur commise dans ce calcul.

Exercice 1 : (A domicile)

A) Refaire l'exercice 2 en utilisant le polynôme de Newton et l'exercice 3 par la méthode de Lagrange.

B) Soit la fonction $f(x) = |x| - \cos(x)$ avec x en radians.

1. **Calculer la table des différences divisées pour la fonction f aux points $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, et\ 1$.**
2. **Calculer les polynômes de Newton de la fonction f.**
3. **Trouver le terme d'erreur d'interpolation.**

C) Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - \cos(x)$ avec x en radians. On veut approximer *f(x)* par un polynôme d'interpolation.

1) **Calculer le polynôme de Newton de la fonction f basé sur les points -2, -1, 0, 1, et 2.**
2) **Trouver l'expression du terme d'erreur d'interpolation.**