Série de TD N°1 : Méthodes de résolution des équations non linéaires

Exercice 1 : (Localisation des racines d'une équation de la forme f(x)=0)
Trouver graphiquement les intervalles qui englobent les racines des équations suivantes :
$\boldsymbol{x^2 - 10x + 23 = 0}$, $\boldsymbol{e^x - x - 2 = 0}$, $\cos(x) - x + 1 = 0$ et $ln(x) - 5 + x = 0$.

Exercice 2 : (Méthode de bissection)

1. Localiser les racines des équations $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ et $\boldsymbol{x\sin(x) - 1 = 0}$.
2. Utiliser la méthode de bissection pour calculer la racine qui appartient à l'intervalle [1, 2] pour la première équation et [0,2] pour la deuxième, prenez 0.001 comme précision.

Exercice 3 : (Méthode des approximations successives)

1. Reprendre les équations **1** et **2** de l'exercice 1 et écrire toutes les formes possibles *x=g(x)*.
2. Prenez les intervalles trouvés dans l'exercice 1 et vérifier la convergence de la méthode des approximations successives pour ces formes.
3. Calculer les racines des équations 1 et 2 par la méthode des approximations successives avec une précision de *0.005*.

Exercice 4 : (Méthode de Newton-Raphson)

a) On donne l'équation $\boldsymbol{xe^x - 3 = 0}$ avec $x \in [0, 2]$.

1. Vérifier les conditions de convergence pour la méthode de Newton-Raphson.
2. Calculer la solution de l'équation avec une précision $\varepsilon = 10^{-5}$.

b) Etablir une formule de Newton-Raphson qui permet le calcul de $\frac{1}{a^m}$ et $\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}$ avec a et m >1 sans utiliser la racine et la division. Tester avec le calcul de $\frac{1}{4}$ et $\sqrt{4}$.

Exercice 5 : (A domicile, les interrogations écrites seront prises des exercices à domicile)

A) Soit à résoudre l'équation suivante : $\boldsymbol{|x|e^x - 1 = 0 \quad \text{pour } x \neq 0}$.

1. **Utiliser la méthode graphique pour trouver le nombre de racines de cette équation. Vérifier les intervalles trouvés par le calcul.**
2. **Utiliser la méthode de bissection pour trouver les racines de cette équation avec une précision de 0.01.**
3. **En déduire la racine négative de** $\boldsymbol{|x|e^{|x|} - 1 = 0 \quad \text{pour } x \neq 0}$.
4. **On veut calculer cette racine négative** $\boldsymbol{\overline{x} \in [-1, -0.25]}$ **par la méthode de Newton-Raphson.**
   - a. **Vérifier les conditions de convergence de la méthode**
   - b. **Calculer la racine si on donne** $\boldsymbol{x_0 = -0.500 \ et \ \varepsilon = 0.001}$.

B)

1. **Localiser les racines des équations 3 et 4 de l'exercice 1 et l'équation 1 de l'exercice 2.**
2. **Utiliser la méthode de bissection pour trouver les racines de ces équations avec une précision de 0.001.**
3. **Rechercher les racines par la méthode des approximations successives.**
4. **Retrouver ces racines par la méthode de Newton-Raphson.**