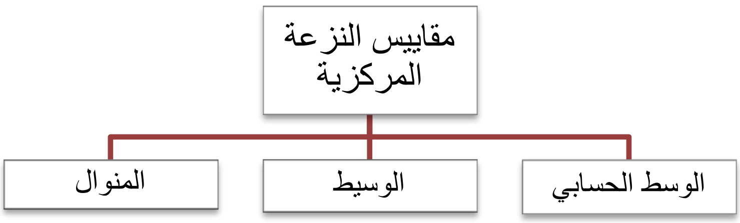
**جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي-**

كلية العلوم الاقتصادية علوم التسيير و العلوم التجارية

## إحصاء 1

# الفصل الثاني

# مقاييس النزعة المركزية




| الأساتذة المسؤولين | | | |
|---|---|---|---|
| الاسم و اللقب | الرتبة | الكلية | البريد الالكتروني |
| ويلية فريدة | أستاذ مساعد أ | العلوم الاقتصادية | |

| الفئة المستهدفة | | |
|---|---|---|
| الكلية | القسم | السنة |
| العلوم الاقتصادية | جذع المشترك | الأولى LMD |

المرجع المستخدم : السعدي رجال، الاحصاء الوصفي ، مؤسسة الرجاء للطباعة و النشر ، قسنطينة ، الجزائر، 2013.

## 1 المتوسط الحسابي $\overline{X}$

من أهم مقاييس النزعة المركزية، و اكثرها استخداما و يرمز له بالرمز $\overline{X}$ .

### 1.1 حالة بيانات غير المبوبة (متغير منفصل، متقطع)

الوسط الحسابي البسيط هو عبارة عن مجموع القيم مقسوما على عددها إذا كانت لدينا القيم (البيانات) و المتعلقة بظاهرة معينة $X_1, X_2, X_3, ........, X_n$ فإن الوسط الحسابي لهذه القيم، يعطى بالصيغة التالية :

$$\overline{X} = \frac{X1+X2+X3+\cdots Xn}{n} \qquad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Xi}{n}$$

مثال1: أحسب المتوسط الحسابي للبيانات التالية:

6; 7,25 ; 4 ; 8 ; 6,25

الحل: لحساب المتوسط الحسابي في هذه الحالة نستعمل القانون التالي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Xi}{n} = \frac{6+7,25+4+8+6,25}{5} = 6,3$$

### 1.2 حالة بيانات المبوبة (متغير متصل، مستمر)

نتبع الخطوات التالية لحساب المتوسط الحسابي:

- نجد مركز كل فئة $x_i$
- نضرب مركز كل فئة في تكراراها $n_i$
- نجمع حواصل ضرب مركز كل فئة تكرارها
- نقسم الناتج على التكرار الكلي $\sum_{i=1}^{k} xi$

وذلك وفق القانون التالي: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \text{ni Xi}}{n}$

مثال (2): لنحسب اعمار فوج من الكشافة التقينا بهم

| الفئات | التكرار ni | مراكز الفئات xi | ni xi |
|---|---|---|---|
| [5-7[ | 2 | 6 | 12 |
| [7-9[ | 5 | 8 | 40 |
| [9-11[ | 8 | 10 | 80 |
| [11-13[ | 4 | 12 | 48 |
| [13-15[ | 1 | 14 | 14 |
| **المجموع** | 20 | | 194 |

$$xi = \frac{X1+X2}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

$$\overline{X} = \frac{194}{20} = 9,7$$

#### 1.2.1 خصائص المتوسط الحسابي

- أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما.
- المتوسط الحسابي قابل للعمليات الجبرية ولا يمكن حسابه بيانيا.
- يتأثر بالقيم المتطرفة.
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.
- يأخذ في الاعتبار جميع القيم محل الدراسة.

## 2 الوسيط Me

الوسيط هو قيمة المفردة التي يسبقها عدد من المفردات يساوي عدد المفردات التي تعقبها، بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا. أي أن الوسيط هو النقطة التي تقسم التوزيع إلى قسمين بحيث يكون عدد الدرجات التي أعلى هذه النقطة يساوي عدد الدرجات التي تقع أسفل النقطة.

### 2.1 حالة بيانات غير المبوبة (متغير منفصل، متقطع)

لحساب الوسيط في البيانات الأولية اولا يجب ان نقوم بترتيب البيانات تصاعديا او تنازليا، ويعتمد حساب الوسيط على ما إذا كان عدد الدرجات فرديا أم زوجيا.

**في حالة n فردي:** اذا كان عدد البيانات فردي فان الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$، وبالتالي قيمة الوسيط هي المفردة (القيمة) التي ترتيبها يقابل رتبة الوسيط: $M_e = X_{(\frac{n+1}{2})}$

**في حالة n زوجي:** اذا كان عدد البيانات زوجي فان رتبة الوسيط هي $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)$ وبالتالي قيمة الوسيط تساوي المتوسط الحسابي للمفردتين المقابلتين لرتبة الوسيط اي:

$$M_e = \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$$

مثال: (3) اوجد الوسيط لعلامات خمس طلاب

6,25 ; 7,25 ; 4 ; 8 ; 6,25

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا  4 ; 6,25; 6,25 ; 7,25 ; 8

عدد القيم فردي N=5 و عليه فان رتبة الوسيط $= 3 = \frac{5+1}{2} = \frac{N+1}{2}$، أي قيمة الوسيط تقابل المفردة التي ترتيبها 3 ،

Me= $X\left(\frac{N+1}{2}\right) = X_{(3)} = 6{,}25$ .

مثال (4) اوجد الوسيط لعلامات طلاب

4 ; 7,25; 6 ; 7,25 ; 8 ; 6,25

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا  4 ; 6 ; 6,25; 7,25 ; 7,25 ; 8

عدد القيم زوجي N=6 و عليه فان رتبةالوسيط $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1)$ اي $(\frac{6}{2}, \frac{6}{2}+1)$ و منه الوسيط يقع بين رتبة 3 و4

قيمة الوسيط هي الوسط الحسابي المقابل للرتبتين  Me= $\frac{6{,}25 + 7{,}25}{2} = 6{,}75$

### 2.2 حالة بيانات المبوبة (متغير متصل، مستمر)

اذا كانت لدينا بيانات في صورة جدول تكراري ذي فئات ، فيمكن حساب الوسيط باحدى الطريقتين

### 2.2.1 طريقة المد الداخلي

نتبع الخطوات التالية :

- نحسب التكرار التجميعي الصاعد
- نحسب رتبة الوسيط و هي مجموع التكرارات على2 ( $\frac{\sum NI}{2}$).
- نحدد الفئة التي تكرارها التجميعي يضم الرتبة $\frac{\sum NI}{2}$ او اكبر و تسمي الفئة الوسيطية.
- نطبق القانون التالي :

$$Me= L_1 +\frac{\frac{N}{2}-Nm-1\uparrow}{Nm}\times A$$

$L_1$: الحد الأدنى للفئة الوسيطية

$\frac{N}{2}$ : رتبة الوسيط

$N_{m-1}\uparrow$ التكرار التجميعي الصاعد السابق للفئة الوسيطية

Nm تكرار للفئة الوسيطية

A طول الفئة

### 2.2.2 طريقة الرسم البياني

الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل، كما يمكن تحديده باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل فقط ويكون ذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛

تحديد رتبة الوسيط ($\frac{N}{2}$) على محور العمودي (محورY)، ثم رسم مستقيم أفقي ينطلق من رتبة الوسيط على

محور Y حتى يلامس منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛ و رسم مستقيم عمودي ينطلق من نقطة التماس السابقة وينتهي مع ملامسة المحور الأفقي (محور X)، حيث تعطي نقطة التماس مع المحور قيمة الوسيط

مثال (5) الجدول التالي يمثل اعمار فوج من الكشافة التقينا بهم

| الفئات | التكرار ni | ni↑ | |
|---|---|---|---|
| [5-7[ | 2 | 2 | 20 |
| [7-9[ | 5 | 7 | 18 |
| [9-11[ | 8 | 15 | 13 |
| [11-13[ | 4 | 19 | 5 |
| [13-15[ | 1 | 20 | 1 |
| **المجموع** | 20 | | |

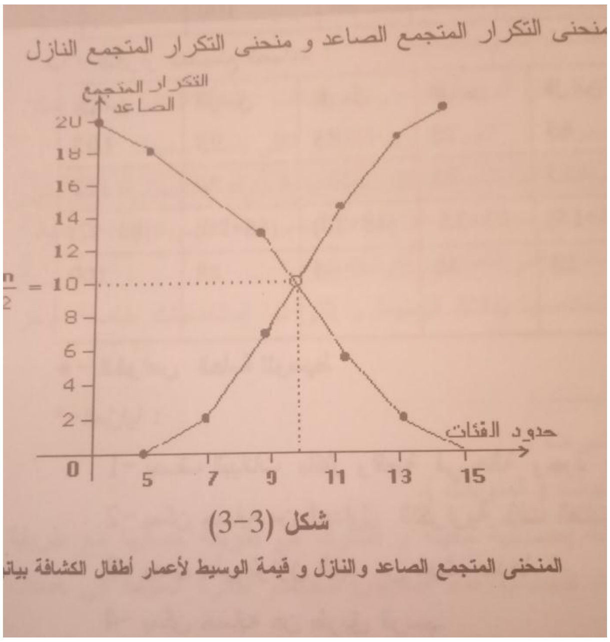
- احسب الوسيط
- طريقة المد الداخلي

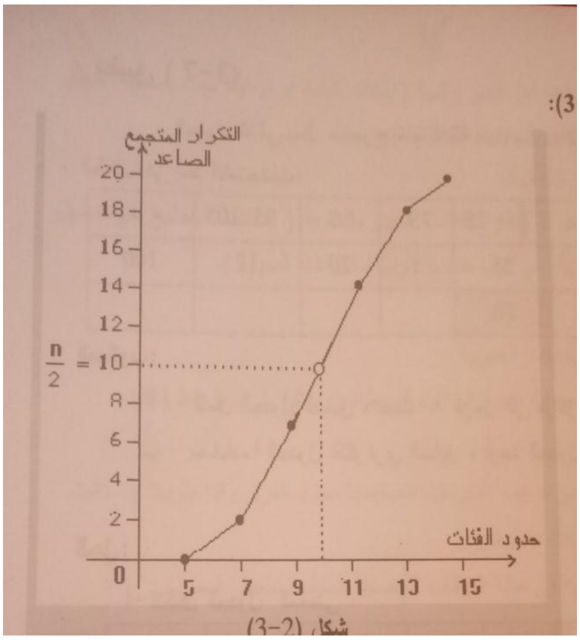
رتبة الوسيط= $\frac{N}{2}=\frac{20}{2}= 10$

الفئة الوسيطية[9-11[

$$Me= L_1 +\frac{\frac{N}{2}-Nm-1\uparrow}{Nm}\times A = 9 +\frac{10-7}{8}\times 2= 9,75$$

- طريقة الرسم البياني




**خصائص الوسيط:**

لا يتأثر بالقيم المتطرفة وبالتالي فإنه يعتبر أصلح المقاييس عند وجود مثل هذه القيم؛

يمكن إيجاد قيمته بيانيا؛

يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

### 3 المنوال MO

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها، أو القيمة الأكثر شيوعا أو انتشارا

#### 3.1 حالة بيانات غير المبوبة (متغير منفصل، متقطع)

لا يستدعي تحديد المنوال في هذه الحالة أي عمليات حسابية، بحيث يتم تحديد المفردة أو العنصر أو القيمة ذات اكبر تكرار ، و في حالة عدم وجود قيم متكررة نقول لا يوجد منوال

تطبيق (6) : اذا كانت درجات عينة من الطلاب في قسم الاقتصاد هي:

25 26 21 27 23 20 22 24

اذا كانت درجات عينة من الطلاب في قسم التجارة هي

20 21 21 27 21 20 21 25

حدد قيمة المنوال

في السلسلة 1 لا يوجد منوال

في السلسلة 2 منوال يساوي 21 =MO لانها القيمة ذات اكبر تكرار

#### 3.2 حالة بيانات المبوبة (متغير متصل، مستمر)

اذا كانت لدينا بيانات في صورة جدول تكراري ذي فئات ، فيمكن حساب المنوال باحدى الطريقتين

**3.2.1 بطريقة الفروق" بيرسون ( طريقة المد الداخلي )**

- نحدد الفئة ذات اكبر تكرار و هي الفئة المنوالية

- نطبق القانون التالي :

$$MO= L_1 + \frac{\Delta1}{\Delta1+\Delta2} xA$$

$L_1$ الحد الادني الفئة للمنوالية

$\Delta_1$ الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و الفئة السابقة لها

$\Delta_2$ الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و الفئة اللاحقة لها

A طول الفئة المنوالية

**3.2.2 طريقة الرسم البياني**

لتحديد المنوال بيانيا نتبع مجموعة من الخطوات أهمها

- تحديد الفئة المنوالية الفئة التي يقابلها أكبر تكرارا في التوزيع

- نرسم المدرج التكراري للتوزيع، أو نرسم الفئة المنوالية والفئتين السابقة واللاحقة لها، وتجدر الإشارة هنا أن المدرج التكراري في حال التوزيع غير المنتظم يتم رسمه بالتكرارات المعدلة.

- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة للفئة المنوالية.
- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة اللاحقة للفئة المنوالية.
- من تقاطع المستقمين نسقط عمودا على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع المحور الأفقي تمثل تقدير لقيمة المنوال بيانياً.

مثال(7) :

احسب المنوال حسابيا و بيانيا

نحدد الفئة المنوالية ذات اكبر تكرار و هي [65-75[

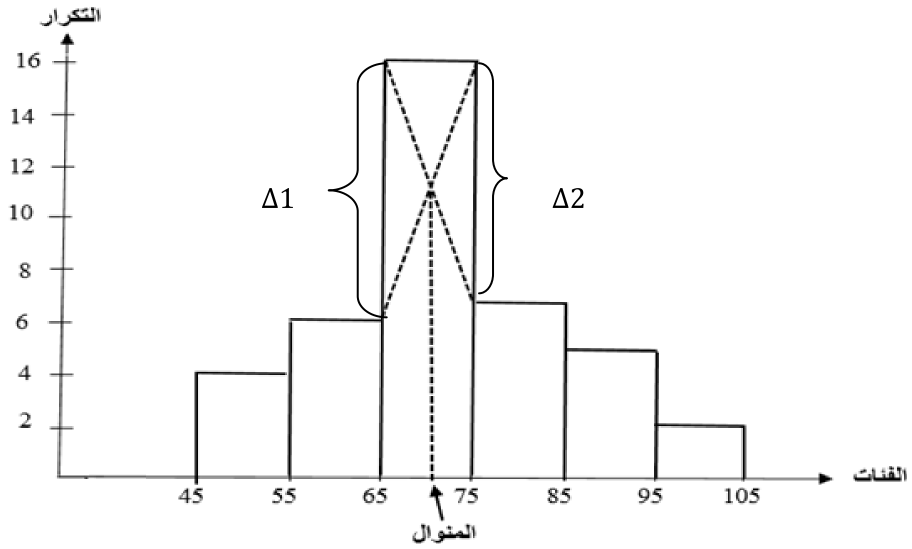
تطبق القانون

| الفئات | التكرار ni |
|---|---|
| [45-55[ | 4 |
| [55-65 [ | 6 |
| [65-75[ | 16 |
| [75-85[ | 7 |
| [85-95[ | 5 |
| [95-105[ | 2 |
| ∑ | 40 |

$$MO= L_1 + \frac{\Delta1}{\Delta1+\Delta2} xA$$

$$MO= 65 + \frac{(16-6)}{(16-6)+(16-7)} x\ 10 = 70,26$$

- ايجاد المنوال بيانيا




**خصائص المنوال:**

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة)؛
- يمكن حسابه من الجداول التكرارية ذات الفئات المفتوحة؛
- يمكن حسابه بيانيا؛
- يمكن أن يوجد أكثر من منوال لتوزيع واحد.

### 4 العلاقة بين المقاييس الثلاثة (المتوسط الحسابي ،الوسيط والمنوال):

لقد لاحظ العالم الإحصائي كارل بيرسون أنه إذا كان منحنى التوزيع قريب من التماثل فهناك علاقة شبه دائمة بين كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال كما يلي:

(الوسط الحسابي – المنوال)= 3 ( الوسط الحسابي- الوسيط)

$$(\overline{X} - Mo)=3\ (\overline{X} - Me)$$

قد يحسب الباحث إحدى المقاييس الثلاثة لتوزيع معين، ثم يحسب مقياسا آخر، ويمكن الاكتفاء بحساب أي مقياسيين من الثلاثة، واستنباط المقياس الثالث من خلال العلاقة النسبية بينهم وهي علاقة تقريبية لا تختلف إلا اختلافا ضئيلا من حالة لأخرى ويؤدي هذا إلى امكان حساب أي منهما من الاثنين الآخرين كالآتي:

$$\overline{X} = \frac{3Me-MO}{2} \qquad MO = 3Me - 2\overline{X} \qquad Me = \frac{2\overline{X}+MO}{3}$$

### 5 تحديد التواء التوزيع مباشرة من مقاييس النزعة المركزية :

يقصد بالعلاقة بين مقاييس النزعة المركزية موقع كل من المنوال، الوسيط والمتوسط في التوزيع بالنسبة لبعضهم البعض.

**5.1 المنحنى معتدل التوزيع :**

عندما يكون : $Mo = Me = \overline{X}$

**5.2 المنحنى ملتوى التواء موجب**

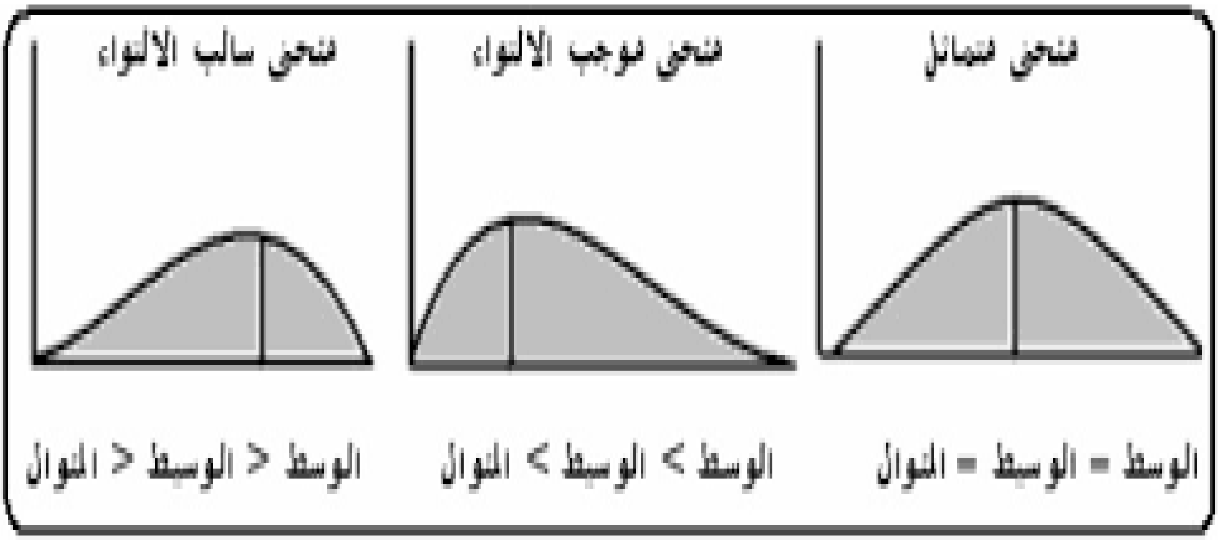
الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يكون أكبر من المنوال إذا كان التوزيع التكراري لها موجب الالتواء.

المتوسط > الوسيط >المنوال $Mo < Me < \bar{X}$

**5.3 المنحنى ملتوى التواء سالب**

أما إذا كان المتوسط الحسابي أقل من الوسيط أقل من المنوال فان التوزيع يكون ملتوياً إلى اليسار أو سالب الالتواء

المتوسط<الوسيط < المنوال. $Mo > Me > \bar{X}$




البيانات المقابلة تمثل توزيع تكراري لاعمار 100 شخص

المطلوب:

- احسب المتوسط الحسابي
- الوسيط حسابيا و بيانيا
- المنوال حسابيا و بيانيا
- بفرض أن الفئة الأخيرة مفتوحة
- حدد نوع الالتواء

| الفئات | التكرار ni |
|---|---|
| [5-15[ | 3 |
| [15-25 [ | 5 |
| [25-35[ | 12 |
| [35-45[ | 25 |
| [45-55[ | 35 |
| [55-65[ | 13 |
| [65-75[ | 7 |
| ∑ | 100 |