REPUBLIQUE ALGERIENNE DMOCRATIQUE ET POPULAIR

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARETEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Support de cours

Pour

1ère année master mathématiques

Option: ***Mathématiques Appliquées***

Équations aux dérivées partielles

Présenté par **:** OUSSAEIF Taki eddine

Année universitaire 2018-2019

Table des matières

Introduction

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.
Les EDPs ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l' équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrodinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité. Un pas de géant à été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à L. Hormander pour la mise au point du calcul pseudo différentiel (au début des années 1970).
Aussi, les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et de Laplace..., au fil de cette dernière quarantaine d'années beaucoup de phénomènes et de problèmes modernes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques ont été modéliser par des équations aux dérivées partielles (EDPs), elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique :

– Mécanique des fluides : équations de Navier-Stockes.
– Electromagnétisme : équations de Maxwell.
– Thermique : équation de la chaleur
– Mécanique quantique : équation de Schrodinger...

Contrairement aux équations différentielles ordinaires (EDOs), les conditions initiales ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution. Il faut également fournir des conditions aux limites, où la condition aux limites est appliquée en tout point de la frontière du domaine sur lequel on souhaite résoudre les équations (et non en un point unique). Il n'est pas possible de déterminer la solution en partant simplement d'un seul point de la limite du domaine et en progressant à l'intérieur de celui-ci, car la solution est également conditionnée par sa valeur en tous les autres points de la frontière.

Ce cours décrit quelques outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires, ces outils sont utilisés pour obtenir des solutions analytiques explicites pour quelques exemples et modèles de problèmes d'EDPs de diverses natures (elliptique, parabolique ou hyperbolique) linéaires avec des conditions initiales et aux limites.

Chapitre 1

Outils pour la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles

Le présent chapitre est consacré aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1- Inégalité de Cauchy avec ε :

Qu'on appelle aussi ε-inégalité

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|y|^2, \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } x, y \text{ arbitraires (des réels).}$$

2- Lemme de Gronwall :

Si a, b sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0, T)$, comme la fonction b soit non-décroissante sur $(0, T)$, et $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda > 0$, il s'ensuit à partir de :

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) \cdot a(s)\, ds, \tag{1.1}$$

alors

$$a(t) \leq b(t) \cdot \exp(\Lambda(t)),$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds.$$

Preuve. On met

$$k(t) = \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation

$$\frac{\partial}{\partial t} k(t) = \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \left(a(t) - \int_0^t \lambda(s) a(s) \, ds \right) \leqslant \lambda(t) b(t) \exp(-\Lambda(t)),$$

résulte de (1.1) et $\lambda(t) > 0$. Avec $k(0) = 0$ par définition, l'intégration sur t conduit à

$$k(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) \, ds.$$

Encore, pour une autre fois on utilise (1.1),

$$\exp(-\Lambda(t)) (a(t) - b(t)) \leqslant \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s) a(s) \, ds = k(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) \, ds.$$

Donc, on trouve

$$a(t) - b(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) \, ds, \tag{1.2}$$

si b est non-décroissante sur $(0, T)$, de (1.2) et en vertu de $\lambda(t) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
a(t) &\leqslant b(t) + \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) \, ds \\
&\leqslant b(t) \left[1 + \int_0^t \lambda(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) \, ds \right] \\
&\leqslant b(t) \left[1 + \exp(\Lambda(t)) \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} [-\exp(-\Lambda(s))] \, ds \right] \\
&\leqslant b(t) [1 + \exp(\Lambda(t)) [-\exp(-\Lambda(t)) + 1]] \\
&\leqslant b(t) \exp(\Lambda(t)).
\end{aligned}$$

Qui prouve le lemme. ■

Proposition 1.1 *Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $T \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Supposons que*

$$T_j \longrightarrow T \quad \text{dans } L^p(\Omega).$$

Alors,

$$T_j \longrightarrow T \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

En particulier, soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_n)_n$ converge au sens des distributions vers f.

Preuve. L'inégalité de Holder montre que pour toute fonction test ϕ, on a

$$|\langle T_{f_n}, \phi \rangle - \langle T_f, \phi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)| |\phi(x)| \, dx \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme (f_n) converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\langle T_{f_n},\phi\rangle=\langle T_f,\phi\rangle.$$

■

On a aussi

Proposition 1.2 *L'opérateur de dérivation D^α, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, est continu sur $D'(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$T_j\longrightarrow T\quad \text{dans } D'(\Omega)\implies D^\alpha T_j\longrightarrow D^\alpha T\quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Ceci découle immédiatement du fait que

$$\langle D^\alpha T_j,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T_j,D^\alpha\varphi\rangle\longrightarrow(-1)^{|\alpha|}\langle T,D^\alpha\varphi\rangle=\langle D^\alpha T,\varphi\rangle,$$

puisque $D^\alpha\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$ et tout $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

1.1 Les séries de Fourier

Soit $f(x)$, une fonction définie dans l'intervalle $[-l,l]$ et déterminée a l'exterieure de cet intervalle par $f(x+2l)=f(x)$, c-à-d que $f(x)$ présente une période $2l$, la série de F on le développement de F qui correspond à $f(x)$ et définie par :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x),\tag{1.3}$$

où les coéfficients de F, a_n et b_n soit :

$$a_n=\tfrac{2}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\tfrac{n\pi}{l}xdx,$$
$$b_n=\tfrac{2}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\tfrac{n\pi}{l}xdx.$$

1.1.1 L'identité de Parseval

L'égalité de Parseval dite parfois théorème de Parseval est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier. On la doit au mathématicien français Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836). Elle est également appelée identité de Rayleigh du nom du physicien John William Strutt Rayleigh, prix Nobel de physique 1904.

Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces de Hilbert.

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques. Cette formule aura deux types d'applications, des calculs de série (comme Dirichlet), mais aussi des applications physiques (car la norme de f correspond à la valeur efficace du signal et elle est liée à l'énergie du systéme).

Théorème 1.1 *Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = 2l$, alors on a :*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{1.4}$$

Définition 1.1 *Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité).*

Théorème 1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :*

- ***D 1)** Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.*
- ***D 2)** f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

  Alors la série de Fourier associée à f est coverge vers :

$$\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \text{ est un point de continuté} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si} \quad x \text{ est un point de discontinutée.} \end{cases}$$

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

1.1.2 Série de Fourier de deux variables

On peut par exemple dévellopper $f(x, y)$ en une double de série de Fourier en sinuse :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l_2}y,$$

ou

$$B_{mn} = \frac{4}{l_2 l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(x,y)\cdot\sin\frac{n\pi}{l_1}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l_2}ydxdy.$$

Des résultats identiques peuvent étre obtenues dans le cas de développement en cosinus ou en sinus contenant à la fois des terms en sinus et en cosinus formules élémentaires de trigonométrie

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)],$$
$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

1.2 Fonctions orthogonales_

1.2.1 Fonctions orthogonales et ensembles orthonormées

Définition 1.2 *Deux vecteur A et B sont dits orthogonaux (perpendiculaire) si*

$$A \cdot B = 0,$$

on peut définir deux fonctions $A(x)$ et $B(x)$ comme orthogonale dans $[a,b]$ si

$$\langle A(x), B(x)\rangle = \int_a^b A(x) \cdot B(x) dx = 0.$$

On dit que $A(x)$ est normalisée dans $[a,b]$ si

$$\int_a^b (A(x))^2 \, dx = 1,$$

par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (\cos\frac{n\pi}{l}x)^2 dx &= 1, \\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (\sin\frac{n\pi}{l}x)^2 dx &= 1. \end{aligned}$$

Exemple 1.1 *Les fonctions suivantes sont orthogonaux*

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x dx &= 0, \quad \text{si } n \neq m \\ \int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x dx &= 0. \quad \text{si } n \neq m \end{aligned}$$

Définition 1.3 *Un ensemble de fonctions $\{\phi_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3...$ présentant ces propriétés :*

$$\begin{array}{ll} \int_a^b \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) dx = 0, & n \neq m \\ \int_a^b (\phi_m(x))^2 \, dx = 1, & m = 1, 2, ... \end{array}$$

"chacune des fonctions de cet ensemble est orthogonale à toutes les autres fonctions de l'ensemble" est dite ensemble orthonormé dans $[a,b]$ (base orthonormée dans $L^2 [a,b]$).

1.2.2 Orthogonalité par rapport a une fonction poids

Définition 1.4 *Un ensemble de fonctions $\{\phi_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3...$ présentant ces propriétés :*

$$\begin{aligned} & \int_a^b \psi_m(x) \cdot \psi_n(x) \cdot w(x) dx \\ = \; & \delta_{mn} \\ = \; & \begin{cases} 0 & \text{si } \; n \neq m \\ 1 & \text{si } \quad n = m \end{cases} \quad \text{où } w(x) \geq 0. \end{aligned}$$

est orthonormale par rapport à la fonction densité $w(x)$ *dans ce cas l'ensemble* $m = 1, 2, ...$ *est un ensemble orthonormé dans* $[a, b]$.

1.2.3 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Proposition 1.3 *Soit* M *un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert* F. *Alors* M *est dense dans* F *si et seulement si,* $M^{\perp} = \{0\}$.

Preuve. Supposons d'abord que M est dense dans F. Soit $f \in M^{\perp} \subset F$, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M qui converge vers f. On a $\langle f, f_n \rangle_F = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclue que $f = 0$, ce qui donne $M^{\perp} = \{0\}$.
Réciproquement, supposons que $M^{\perp} = \{0\}$. Alors on a $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $\left(\overline{M}\right)^{\perp} \subset M^{\perp}$, et donc $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \subset \left(\left(\overline{M}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$, alors $\left(\left(\overline{M}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M}$, alors on trouve $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \subset \overline{M} \Longrightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. ■

1.2.4 Develppement de fonction en séries orthonormées

De même qu'un vecteur r à trois dimensions peut être développé en un ensemble de vecteur orthogonaux sous la forme :

$$r = C_1 i + C_2 j + C_3 k.$$

On peut imaginer de développer la fonction $f(x)$ en un ensemble de fonctions ortonormées :

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} C_n \cdot \phi_n(x), \qquad a \leq x \leq b$$

de telles séries appelées séries orthonormées sont des généralisation des séries de Fourier puis multiplions les deux membres précédents par $\phi_m(x)$ et intégrons sur $[a, b]$ on obtient :

$$\int_a^b f(x).\phi_m(x) dx = C_n,$$

qui sont appelés coefficients de Fourier.

1.3 Problèmes de Strum-Liouville

En mathématiques, la théorie de Sturm-Liouville étudie le cas particulier de problème des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \quad a \leqslant x \leqslant b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}, \tag{1.5}$$

où $p(x), q(x)$ et $r(x)$ des fonctions données appartiennent à $C^1(a, b)$ où λ est un paramètre réel indépendant de x, est appelé un problème de valeurs aux limites de Sturm-Liouville.
En pratique de tels systèmes apparaissent quand on résout des EDPs par la méthode de séparation des variable et dans ce cas λ est la constante de séparation.
Une solution non-trivial du système n'existe en général que pour un ensemble particulier de valeurs du paramêtre, ces valeurs sont dites caractéristique en valeurs propres du système, en chaque valeur propre correspond une fonction propre.

Remarque 1.1 *Si $p(x), q(x)$ sont des réeles alors les valeurs propres sont réelles. De plus les fonctions propres forment un ensemble orthonormé par rapport à la fonction de densité $r(x)$ qui est généralement prise non-négative c-à-d $r(x) \geqslant 0$.*

1.3.1 Problèmes de Sturm-Liouville réguliers, périodiques et singuliers

Dans les trois problèmes énumérés ci-dessous, on formule les hypothèses suivantes. On suppose que les fonctions $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont continues sur l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, et que $p(x) > 0$ et $r(x) > 0$ sur l'intervalle borné $a \leqslant x \leqslant b$.

Un problème de Sturm-Liouville régulier sur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

On suppose en outre que $p(x) > 0$ et $r(x) > 0$ au niveau des extrémités de l'intervalle.
Trouver des nombres λ pour lesquels il existe une solution non triviale de l'EDO

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))\, y(x) = 0 \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

avec les conditions aux limites régulières

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

Exemple 1.2 $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = y(\pi), \ y'(-\pi) = y'(\pi).$

Dans ce cas, le problème de Sturm-Liouville peut être résolu, avec les résultats suivants :

– Les valeurs propres λ_n, $n \in \mathbb{N}$ associées aux fonctions propres $y_n(x)$ solutions de l'équation différentielles sont réelles et peuvent être ordonnées

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_n < \ ... \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \ +\infty.$$

– Les fonctions propres $y_n(x)$ sont orthogonales par rapport à la fonction du poids $r(x)$, et peuvent être normalisées à l'unités pour former une base de Hilbert de l'espace $L^2[a, b]$.
– Chaque fonction propre $y_n(x)$ possède exactement n zéros sur l'intervalle $[a, b]$.

Un problème Sturm-Liouville périodique sur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

On suppose en plus que $p(a) = p(b)$.
Trouver des nombres λ pour lesquels il existe une solution non triviale de l'EDO

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))\, y(x) = 0 \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

avec les conditions aux limites régulières

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b), \\ y'(a) &= y'(b). \end{aligned}$$

Exemple 1.3 $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

Un problème Sturm-Liouville singulier sur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Un problème de S-L est dite singulier si sur un intervalle fini, au moins une des propriétés de régularité échouante ou sur un intervalle infini $(-\infty, \ +\infty)$, $(a, \ +\infty)$ et $(-\infty, \ b)$.
Aussi un problème SL singulier est trouver des nombres λ pour lesquels il existe une solution non triviale de l'ODE

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))\, y(x) = 0 \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

avec l'un des trois types de conditions aux limites suivants :

– **Type 1 :** $p(a) = 0$ et $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$
– **Type 2 :** $p(b) = 0$ et $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0.$
– **Type 3 :** $p(a) = p(b) = 0$. Ensuite, il n'y a pas de conditions aux limites spécifiées, mais les solutions doivent être des fonctions bornées sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.4 (de type 3) *L'équation différentielle ordinaire de Legendre*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 - x^2\right) y'(x)\right) + \lambda y\,(x) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

avec $\lambda = n\,(n+1)\,, n = 1, 2, ...$

Théorème 1.3 *Soit $\{\varphi_n : n \in N\}$ l'ensemble de toutes les fonctions propres d'un problème régulier de Sturm-Liouville* (1.5)*, normalisées par*

$$\int_a^b (\varphi_n(x))^2 \, dx = 1,$$

Soit $f \in C^2[a,b]$ une fonction qui satisfait les conditions aux limites de (1.5)*. Alors*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} D_n \cdot \varphi_n(x), \qquad a \leq x \leq b$$

avec

$$D_n = \int_a^b f(x).\phi_m(x)dx,$$

et la série converge normalement sur $[a,b]$.

1.4 Les fonctions de Bessel et Legendre

1.4.1 Les fonctions de Bessel

Définition 1.5 *Soit $\upsilon \in \mathbb{R}, \upsilon \geq 0$, on appelle équation de Bessel d'indice υ l'équation suivante sur $]0,\infty[$:*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \upsilon^2)y = 0. \tag{1.6}$$

On appelle fonction de Bessel de première espèce d'indice υ, la fonction J_υ définie par la série suivante (convergente) :

$$\begin{aligned} J_\upsilon(x) &= \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\upsilon \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\upsilon+1)} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(\upsilon+2)} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{2!\Gamma(\upsilon+3)} + \\ \ldots + (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p+\upsilon+1)} + \ldots \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Aussi, on définit $J_{-\upsilon}$ par

$$J_{-\upsilon}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\upsilon} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(1-\upsilon)} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(2-\upsilon)} + \\ \ldots + (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-\upsilon+1)} + \ldots. \end{array} \right]$$

Définition 1.6 *On appelle fonction de Bessel de second espèce d'indice υ, la fonction Y_υ définie par :*

$$Y_\upsilon(x) = \lim_{\alpha \to \upsilon} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Théorème 1.4 *Si υ est entier toutes solution de l'équation différentielle de Bessel suivante :*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

est de la forme (les fonctions de Bessel d'ordre υ) :

$$y(x) = a\ J_n(x) + b\ y_n(x), \quad n \geq 0.$$

Si υ n'est pas entier toutes solution de (1.6) *est de la forme*

$$y(x) = a\ J_\upsilon(x) + b\ J_{-\upsilon}(x).$$

1.4.2 Les fonctions de Legendre

Définition 1.7 *L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables suivante :*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{1.7}$$

*est connue sous le nom " **équation de Legendre** ". Ses solutions sont appelées " **fonctions de Legendre** ".*

*Si n est nul ou entier positif, ces fonctions sont appelées " **polynômes de Legendre** ".*

Définition 1.8 *La solution générale de* (1.6) *dans le cas particulier où le paramètre $n \in \mathbb{N}$ est un entier est donnée par les polynômes de Legendre*

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] : \textit{Formule de Rodrigues}$$

qui sont définis uniquement pour $x \in [-1, 1]$ puisque les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de cette équation différentielle (1.6).

Définition 1.9 *La solution générale de* (1.6) *est donnée par*

$$y(x) = C_1P_n(x) + C_2Q_n(x),$$

où $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont respectivement les fonctions de Legendre de 1 ére et de 2 ème espèces de degré n. Les $\varphi_n(x)$ ne sont pas bornés en $x = \pm 1$ et donnée par :

Si $|x| \prec 1$ et $n > 1$ paire :

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\ 2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1)}\begin{bmatrix} x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 \\ +\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \ldots \end{bmatrix}.$$

Si $n > 2$ impaire :

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\ 2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n)}\begin{bmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 \\ +\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \ldots \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.2 *L'équation* (1.6) *est obtenue par exemple à partir de l'équation de Laplace* $\Delta u = 0$ *exprimée en coordonnées sphériques* (ρ, θ, ϕ) *quand on suppose que* u *est indépendant de* ϕ.

Théorème 1.5 *Une propriété importante des polynômes de Legendre est leur orthogonalité. Il est possible de montrer, pour tout* m, n *entiers, que :*

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot P_m(x) \, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \textit{si } n = m \\ 0 \quad \textit{si} & n \neq m \end{cases} .$$

Chapitre 2

Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires

2.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?

On peut difficilement étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P) dans une totale généralité comme on peut le faire pour les équation différentielles ordinaires (E.D.O), car le domaine étant trop vaste. Heureusement, les équations aux dérivées partielles les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes :
• **Le transport :** convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère ...
• **La diffusion :** diffusion de la chaleur dans un solide ...
• **Les vibrations :** son dans l'air, vibration des structures ...
• **L'équilibre :** calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces ...
On verrait qu'à chacun de ces phénomènes correspond a une catégorie d'équations aux dérivées partielles. L'étude est restreinte aux équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre inférieur ou égal à 2.

Définition 2.1 *Soit $u = u(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini. Une équation aux dérivées partielles pour la fonction u est une relation qui lie :*
** Les variables indépendantes $(x, y, ...)$.*
** La fonction "inconnue" u (variable dépendante).*
** Un nombre fini de dérivées partielles de u.*

$$\Rightarrow F\left(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, ...\right) = 0. \quad (2.1)$$

L'´equation (2.1) *est considérée dans un domaine* Ω *de* IR^n. *Les solutions de l'´equation aux dérivées partielles* (2.1) *sont les fonctions qui vérifient cette équation dans* Ω.

Définition 2.2 *Ordre d'une EDP est défini exactement de la même façon que pour une EDO, c'est l'ordre le plus élevé parmi toutes les dérivées partielles de l'EDP.*

Exemple 2.1 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *d'ordre 1.*

Définition 2.3 ***EDP linéaire :*** *Si* u *et ses dérivées partielles apparaissent séparément et " à la puissance* 1" *dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.*

Définition 2.4 ***EDP non-linéaire :*** *Si l'une des dérivées intervient comme argument d'une fonction non-linéaire ou la relation entre les dérivées partielles est non-linéaire. Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution.*

Définition 2.5 ***EDP semi-linéaire :*** *est une EDP non-linéaires mais dont la partie principale est linéaire par rapport à* u

Définition 2.6 ***EDP quasi-linéaire :*** *est une EDP linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction* u.

Exemple 2.2 *On s'intéresse ici aux EDPs quasi-linéaires du premier et du second ordre, donc du type*

$$au_x + bu_y + c = 0,$$

ou bien

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0.$$

Le terme quasi-linéaires signifie que les équations sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, ce qui veut dire que a, b *et* c *sont dans le premier cas des fonctions des variables indépendantes* x, y *et de la fonction inconnue* u, *et dans le deuxième cas que* a, b, c *et* d *sont des fonctions de* x, y, u *et des dérivées partielles premières* u_x *et* u_y.

Exemple 2.3 *Soit* $u = u(x, y)$;
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *d'ordre 1 est linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ *d'ordre 1 est semi-linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \exp x = 0$ *d'ordre 2 est linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *d'ordre 2 est quasi-linéaire.*
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = \ln x$ *d'ordre 3 est non-linéaire.*

- $(1-xy)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(\ln x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ *d'ordre 2 est linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2(\exp x)=0$ *d'ordre 2 est semi-linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+\sin u=0$ *d'ordre 2 est quasi-linéaire.*
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\ln\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ *d'ordre 3 est semi-linéaire.*

2.2 Classification des équations

Définition 2.7 *a, b, c étant trois fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$, on appelle **équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre**, d'inconnue f, une équation de la forme*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2.2}$$

Définition 2.8 *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0,$$

*est dite **hyperbolique** dans ce domaine.*

Exemple 2.4 *c étant un réel strictement positif, l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

est une équation aux dérivées partielles hyperbolique.

Définition 2.9 *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x,y)=a(x,y)c(x,y),$$

*est dite **parabolique** dans ce domaine.*

Exemple 2.5 *α étant un réel strictement positif, l'équation de diffusion*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=0,$$

est une équation aux dérivées partielles parabolique.

Définition 2.10 *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x,y)<a(x,y)c(x,y),$$

*est dite **elliptique** dans ce domaine.*

Exemple 2.6 *L'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

est une équation aux dérivées partielles elliptique.

2.3 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy

Définition 2.11 *On appelle* ***courbes caractéristique*** *de (ε) les courbes régulières de $\mathbb{R}^2$, dont une représentation paramétrique est*

$$x = x_c(t)\ ,\ y = y_c(t),$$

et telles que :

$$(x_c'(t))^2 c(x_c(t), y_c(t)) - 2x_c'(t)y_c'(t)b(x_c(t), y_c(t)) + (y_c'(t))^2 a(x_c(t), y_c(t)) = 0.$$

Les courbes caractéristiques sont donc celles sur lequelles il n'est pas possible de faire porter les conditions initiales d'un problème de Cauchy.

Définition 2.12 *Une courbe N_0 de $\mathbb{R}^2$, dont une représentation paramétrique est $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, n'est pas caractéristique en aucun point si, pour tout t de son domaine de définition*

$$(x_0'(t))^2 c(x_0(t), y_0(t)) - 2x_0'(t)y_0'(t)b(x_0(t), y_0(t)) + (y_0'(t))^2 a(x_0(t), y_0(t)) \neq 0.$$

2.3.1 Calcul pratique

Théorème 2.1 *Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (ε) sont les solutions de l'équation*

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0.$$

Théorème 2.2 *Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (ε) sont les solutions de l'équation*

$$c(x,y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dx}{dy} + a(x,y) = 0.$$

Théorème 2.3 *Si les fonctions a et c ne sont pas identiquement nulles, les courbes caractéristiques de (ε) sont les droites $x =$ Constante, $y =$Constante.*

Preuve. Soit $C : x = x_c(t), y = y_c(t)$ une courbes caractéristique de (ε). On considère un paramêtre t_0 tel que, au voisinage V_{t_0} de t_0 :

$$a(x_c(t), y_c(t)) \neq 0.$$

Si x_c' s'annulait dans V_{t_0}, alors, d'après la définition 2.9. d'une courbe caractéristique, on devrait avoir

$$a(x_c(t_0), y_c(t_0))(y_c'(t_0))^2 = 0$$

et donc $y_c'(t_0) = 0$, ce qui entre contraduction avec la régularité de la courbe caractéristique.
Par suite, dans un domaine où a ne s'annule pas on a :
La tangente à C n'est pas verticale : C peut étre assimilée la courbe représentative d'une fonction

$$y = g(x) : \begin{cases} x = x = x_c(t) \\ y = g(x) = y_c(t) \end{cases}.$$

Par suite :

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y_c'(t)}{x_c'(t)}. \tag{2.3}$$

En divisant la relation (R) membre à membre par $(x_c'(t))^2$, on obtient :

$$a(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0. \tag{2.4}$$

On démontre de même les deux autres théorèmes.
On voit que la recherche de caractéristiques (dans les cas non triviaux, i.e.$a = 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\dfrac{dy}{dx}$.
L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $b^2 - ac$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.
Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristique réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique deux caractéristiques copmlexes conjuguées :

$$\text{pour } a \neq 0, \quad \begin{cases} b^2 - ac > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ b^2 - ac = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \\ b^2 - ac < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \end{cases}. \tag{2.5}$$

Exemple 2.7 *On considère l'équation :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C,$$

où C est une constante réelle.

Cette équation est hyperbolique dans $\mathbb{R}^2$ tout entier.
Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dx} = -1.$$

Ce sont donc les droites

$$y = \pm x + \text{Constante}.$$

■

Exemple 2.8 *On consière l'équation :*

$$y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C,$$

où C est une constante réelle.
Pour cette équation :

$$b^2 - ac = x^2 y^2.$$

Cette équation est donc hyperbolique en dehors des axes de coordonnées.
Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2.$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

ou encore :

$$xdx = \pm ydy.$$

Ce sont donc les courbes

$$x^2 \pm y^2 = \text{ Constante}.$$

Exemple 2.9 *On considère l'équation suivante :*

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

comme on a

$$b^2 - ac = (xy)^2 - x^2y^2 = 0,$$

l'équation est donc paarabolique sur $\mathbb{R}^2$.
La courbe caractéristique est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \textit{Constante.}$$

Exemple 2.10 *On considère l'équation :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{df}{dx} + f = 0.$$

On identifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a(x,y) = 1 \\ b(x,y) = 0 \\ c(x,y) = -1 \\ \Rightarrow b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 1 > 0 \end{cases}.$$

L'équation donnée est hyperbolique.
Les courbes caractéristiques sont données par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 &= 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + \textit{ Constante.} \end{aligned}$$

2.3.2 Equations de dimension supérieure

Dans le cas d'équation aux dérivées partielles impliquant 3 variables (mais toujours d'ordre 2), la démarche est similaire lorsque les termes d'ordre deux sont de la forme :

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2E\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + F\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

où (A, B, C, D, E, F) sont des fonctions de (x, y, z).
On étudie les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

Dans un domaine où toutes les valeurs propres sont du même signe on parle de **problème elliptique**.

Dans un domaine où une valeur propre est nulle et les autres de même signe, on parle de **problème parabolique**.
Dans un domaine où au moins deux valeurs propres sont de signe opposés, on parle de **problème hyperbolique**.

Chapitre 3

Problèmes paraboliques

3.1 Modélisation d'équation de la chaleur avec des conditions aux limites : "Conduction thermique"

3.1.1 Le phénomène

On considère une barre mince de longueur L, constituée d'un matériau homogène (fer, cuivre, aluminium, béton, verre ...) et isolée thermiquement sur toute sa longueur et à l'extrémité droite. On traitera d'abord le cas d'une barre de fer. On cherche donc l'évolution au cours du temps de la température u dans cette barre.
Au temps initial ($t = 0$), la barre est à température ambiante de T_a. L'extrémité gauche "x_0" est chauffée à certain température T_c pendant une durée de temps déterminée t_c.
On veut connaître la répartition de la température dans la barre en fonction du temps.

3.1.2 Modélisation mathématique

On suppose que du fait de l'isolation, la température est la même dans toute la section de la barre. La fonction $u(x, t)$ donne la température au point x à l'instant t. On note aussi le temps de fin de mesure par t_f. Si la barre a une conductivité thermique homogène et en absence de sources de chaleur, u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in]0, L[\,,\ t > 0,$$

où

$$k = \frac{\kappa}{\rho c},$$

avec κ le coefficient de conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la chaleur spécifique du matériau considéré.
Le premier terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ et le terme d'évolution qui traduit le fait que la température à l'instant t dépend des températures aux instants précédents. Le second terme $-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est le terme de diffusion ou de conduction de la chaleur qui traduit le fait que la température en un point dépend de celle des points voisins.
À L'extrémité gauche "x_0" la condition au limite est une condition de Dirichlet

$$u(0,t) = g\left(t\right)$$

avec

$$g\left(t\right) = \left(T_c - T_a\right) 1_{]0,t_c]} + T_a.$$

Alors qu'à L'extrémité droite "x_L" on a une condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(L,t\right) = 0 \text{ pour } t > 0,$$

qui traduit l'isolation de cette extrémité (le gradient de température est nul au point isolé).
La condition initiale s'écrit

$$u(x,0) = T_a, \quad \forall x \in \left[0,L\right].$$

3.1.3 Position du problème

On cherche donc une fonction qui soit une solution unique du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \left]0,L\right[, \; t \in \left]0,t_f\right[, \\ u(x,0) = T_a, & \forall x \in \left[0,L\right], \\ u(0,t) = g\left(t\right), & \forall t \in \left]0,t_f\right[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(L,t\right) = 0, & \forall t \in \left]0,t_f\right[, \end{cases}$$

3.2 La méthode de séparation des variables

Fourier a découvert une méthode pour résoudre les problème initiales et aux valeurs limites Sa solution l'a amené à proposer l'idée audacieuse selon laquelle toute fonction réelle définie sur un intervalle fermé peut être représentée par une série de fonctions trigonométriques. C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la série de Fourier. D'Alembert et le mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) avaient en fait proposé une idée similaire avant Fourier. Ils ont affirmé que les vibrations d'une corde finie peuvent être formellement représentées comme une série infinie impliquant des fonctions sinusoïdales. Ils ont toutefois omis de voir la généralité de leur observation.

La méthode de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur fournit une méthode pratique qui peut être appliquée à de nombreux autres problèmes linéaires importants. La méthode nous permet également de déduire plusieurs propriétés des solutions, telles que le comportement asymptotique, la régularité et bien posée. Historiquement, l'idée de Fourier était une percée qui a ouvert la voie à de nouveaux développements scientifiques et technologiques. Par exemple, l'analyse de Fourier a trouvé de nombreuses applications en mathématiques pures (théorie des nombres, théorie de l'approximation, etc.). Plusieurs théories fondamentales en physique (la mécanique quantique en particulier) sont fortement basées sur l'idée de Fourier, et toute la théorie du traitement du signal est basée sur la méthode de Fouriers et ses généralisations.

Néanmoins, la méthode de Fourier ne peut pas toujours être appliquée à la résolution de problèmes différentiels linéaires. La méthode est applicable uniquement pour les problèmes avec une symétrie appropriée. De plus, l'équation et le domaine doivent partager la même symétrie et, dans la plupart des cas, le domaine doit être borné. Un autre inconvénient découle de la représentation de la solution en une série infinie. Dans de nombreux cas, il n'est pas facile de prouver que la solution formelle donnée par cette méthode est bien une solution appropriée.

Enfin, même dans le cas où on peut prouver que la série converge vers une solution classique, il peut arriver que le taux de convergence soit très lent. Par conséquent, une telle représentation de la solution peut ne pas toujours être pratique.

La méthode de Fourier pour résoudre les EDPs linéaires est basée sur la technique de séparation des variables. Laissez-nous décrire les principales étapes de cette technique.

Nous cherchons d'abord des solutions d'EDPs homogène appelées solutions de produit (ou solutions séparées). Ces solutions ont la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,,$$

et en général, ils devraient remplir certaines conditions supplémentaires. Dans de nombreux cas, ces conditions supplémentaires ne sont que des conditions aux limites homogènes. Il se trouve que X et T devraient être des solutions d'EDOs linéaires qui sont facilement dérivés de l'EDP donnée. Dans la deuxième étape, nous utilisons une généralisation du principe de superposition pour générer, à partir des solutions séparées, une solution plus générale de l'EDP, sous la forme d'une série infinie de solutions produits. Dans la dernière étape, nous calculons les coefficients de cette série.

Puisque la méthode de séparation des variables repose sur des idées profondes et implique également plusieurs étapes techniques, on présente dans le présent chapitre la technique pour résoudre plusieurs problèmes relativement simples sans grande justification théorique. Comme la méthode de Fourier repose sur la construction de solutions d'un type spécifique, nous introduisons vers la fin du chapitre la méthode de l'énergie, qui sert à prouver que les solutions que on a construites sont vraiment uniques.

3.3 Etude du problème de Dirichlet homogène pour une équation de la chaleur

Considérons le problème de conduction thermique suivant dans un intervalle fini

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, \quad 0 < x < L, t > 0, && (3.1)\\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, && (3.2)\\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L. && (3.3) \end{aligned}$$

où f est une condition initiale donnée et k est une constante positive. Pour rendre (3.2) cohérent avec (3.3), nous supposons la condition de compatibilité

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Le problème défini ci-dessus correspond à l'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermoconductrice unidimensionnelle homogène de longueur L (c'est-à-dire que la tige est étroite et isolée latéralement) dont la température initiale (au temps $t = 0$) est connu et est tel que ses deux extrémités sont immergées dans un bain à température nulle.

Nous supposons qu'aucune source interne ne chauffe (ou ne refroidit) le système. Notez que le problème $(3.1) - (3.3)$ est un problème initial de valeur de calcul linéaire et homogène. Rappelons également que la condition limite (3.2) est appelée condition de Dirichlet, à la fin de la présente section, nous aborderons également d'autres conditions aux limites.

Nous commençons par rechercher des solutions de l'EDP (3.1) qui répondent aux conditions aux limites (3.2) et ont la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.4}$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t, respectivement. A cette étape, nous ne prenons pas en compte la condition initiale (3.3). Evidemment, la solution zéro ne nous intéresse pas $u(x,t) = 0$. Nous cherchons donc des fonctions X et T qui ne disparaissent pas à l'identique.

Différencier la solution séparée (3.4) une fois par rapport à t et deux fois par rapport à x et substituer ces dérivés dans l'EDP. On obtient alors

$$XT_t = kX_{xx}T. \tag{3.5}$$

Nous procédons maintenant à une étape simple mais décisive-la séparation des variables-. Nous déplaçons d'un côté de l'EDP toutes les fonctions uniquement sur x et de l'autre les fonctions qui ne dépendent que de t. Nous écrivons donc

$$\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}. \tag{3.6}$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, différencier (3.6) par rapport à t implique qu'il existe une constante dénotée par λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda. \tag{3.7}$$

L'équation (3.7) conduit le système d'EDO suivant

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X \quad 0 < x < L, \tag{3.8}$$
$$\frac{dT}{dt} = -\lambda kT \quad t > 0, \tag{3.9}$$

qui ne sont couplés que par la constante de séparation.λ. La fonction u vérifie les conditions aux limites (3.2) si et seulement si

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

et

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0.$$

Puisque u n'est pas la solution triviale $u = 0$, il s'ensuit que

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Par conséquent, la fonction X devrait être une solution du problème des valeurs limites

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad 0 < x < L, \tag{3.10}$$
$$X(0) = X(L) = 0. \tag{3.11}$$

Considérons le système $(3.10) - (3.11)$. Une solution non triviale de ce système s'appelle une fonction propre du problème avec une valeur propre.

Le problème $(3.10) - (3.11)$ est appelé un problème de valeur propre. La condition aux limites (3.11) est appelée (comme dans le cas EDP) la condition aux limites de Dirichlet.

Notez que le problème $(3.10) - (3.11)$ n'est pas un problème de valeur initial pour un EDO (pour lequel on sait qu'il existe une solution unique). Il s'agit plutôt d'un problème de valeur limite pour un EDO. Il n'est pas clair a priori qu'il existe une solution pour toute valeur de λ. D'autre part, si

nous pouvons écrire la solution générale de l'EDO pour toute λ, il suffit de vérifier pour quelle λ il existe une solution qui satisfait également les conditions aux limites.
Heureusement, (3.11) est assez élémentaire. C'est une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants, et sa solution générale (qui dépend de λ) a la forme suivante
1. Si $\lambda < 0$, alors
$$X(x) = \alpha \exp\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \beta \exp -\left(\sqrt{-\lambda}x\right),$$
2. Si $\lambda = 0$, alors
$$X(x) = \alpha + \beta x,$$
3. Si $\lambda > 0$, alors
$$X(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$
où α, β sont des nombres réels arbitraires.
Nous supposons implicitement que λ est réelle et nous ne considérons pas le cas complexe (bien que ce cas puisse en fait être traité de la même manière), donc on a :
Valeur propre negative $(\lambda < 0)$ La solution générale peut être écrite sous une forme plus commode : au lieu de choisir les deux fonctions exponentielles comme système fondamental de solutions, nous utilisons la base $\left\{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right), \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right\}$.
Sur cette base, la solution générale pour $\lambda < 0$ a la forme
$$X(x) = \widetilde{\alpha} \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \widetilde{\beta} \sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right). \tag{3.12}$$
La fonction $\sinh s$ a une racine unique à $s = 0$, alors que $\cosh s$ est une fonction strictement positive. Puisque $X(x)$ devrait satisfaire $X(0) = 0$. il en résulte $\widetilde{\alpha} = 0$. La deuxième condition aux limites $X(L) = 0$ implique que $\widetilde{\beta} = 0$. Par conséquent, $X(x) = 0$ est la solution triviale. Autrement dit, le système $(3.10) - (3.11)$ n'admet pas de valeur propre négative.
Valeur propre nulle $(\lambda = 0)$ Nous affirmons que $\lambda = 0$ n'est pas non plus une valeur propre. En effet, dans ce cas, la solution générale est une fonction linéaire
$$X(x) = \alpha + \beta x,$$
qui (dans le cas non trivial $X \neq 0$) disparaît au plus en un point, il ne peut donc pas satisfaire aux conditions aux limites (3.11).
Valeur propre positive $(\lambda > 0)$ La solution générale pour $\lambda > 0$ est
$$X(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right). \tag{3.13}$$
En substituant cette solution à la condition aux limites $X(0) = 0$, on obtient $\alpha = 0$. La condition aux limites $X(L) = 0$ implique
$$\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0.$$

Donc

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi,$$

où n un entier positif. Nous n'avons pas à examiner le cas $n < 0$, puisqu'il correspond au même ensemble de valeurs propres et de fonctions propres. Par conséquent, λ est une valeur propre si et seulement si

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3...$$

Les fonctions propres correspondantes sont

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3...$$

Rappelons de l'algèbre linéaire qu'une valeur propre a une multiplicité m si l'espace constitué de ses vecteurs propres est m-dimensionnel. Une valeur propre avec la multiplicité 1 s'appelle simple. En utilisant la même terminologie, nous voyons que les valeurs propres λ_n pour le problème des valeurs propres $(3.10) - (3.11)$ sont toutes simples.

Parlons maintenant de l'EDO (3.9). La solution générale a la forme

$$T(t) = B\exp\left(-k\lambda t\right).$$

Remplaçant λ_n, on obtient

$$T_n(t) = B_n \exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad n = 1, 2, 3... \tag{3.14}$$

Du point de vue physique, il est clair que la solution de (3.9) doit se désintégrer dans le temps, il faut donc avoir $\lambda > 0$. On aurait donc pu deviner a priori que le problème $(3.10) - (3.11)$ admettrait seulement des valeurs propres positives.

Nous avons ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)t, \quad n = 1, 2, 3... \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \tag{3.16}$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet.

Considérons maintenant la condition initiale, supposons qu'il ait la forme

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 1} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres, ensuite, une solution au problème de chaleur $(3.1) - (3.3)$ est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n \geqslant 1} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

Nous sommes donc en mesure de résoudre le problème pour une certaine famille de conditions initiales, il est naturel de demander maintenant comment résoudre des conditions initiales plus générales.

L'idée brillante (bien que pas tout à fait justifiée à ce moment-là) de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (3.2) comme une «combinaison linéaire» infinie unique des fonctions propres $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Autrement dit, il est possible de trouver des constantes B_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{3.17}$$

Une telle série est appelée une série (généralisée) de Fourier (ou série) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et B_n, $n = 1, 2...$ sont appelés les coefficients de Fourier (généralisés) de la série.

Le dernier ingrédient nécessaire à la résolution du problème est le principe de superposition généralisée. Nous généralisons le principe de superposition et l'appliquons également à une série infinie de solutions séparées. Nous appelons une telle série une solution généralisée d'EDP si la série converge uniformément dans chaque sous-angle contenu dans le domaine où la solution est définie.

Dans notre cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \tag{3.18}$$

est un candidat naturel pour une solution généralisée du problème $(3.1) - (3.3)$. Par «solution formelle», nous entendons que si nous ignorons les questions de convergence, de continuité et de fluidité et si nous procédons à des différenciations et des substitutions terme par terme, nous voyons que toutes les conditions requises du problème $(3.1) - (3.3)$ sont satisfaits.

Avant de prouver que, dans certaines conditions (3.18) est effectivement une solution, nous devons expliquer comment représenter une fonction «arbitraire» f sous la forme d'une série de

Fourier. Autrement dit, nous avons besoin d'une méthode pour trouver les coefficients de Fourier d'une fonction donnée f. De manière surprenante, on peut facilement répondre à cette question en supposant que la série de Fourier de f converge uniformément, fixons $m \in \mathbb{N}$, multiplier l'extension de Fourier (3.17) par la fonction propre $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, puis intégrez l'équation terme par terme sur $[0, L]$. On a

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{3.19}$$

Il est facile de vérifier que

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}. \tag{3.20}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} f(x)dx}{\int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{L}dx} \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} f(x)dx, \quad m = 1, 2... \end{aligned} \tag{3.21}$$

Il s'ensuit en particulier que les coefficients de Fourier et série de Fourier de f sont uniquement déterminés. Par conséquent, (3.18) avec (3.21) fournit une formule explicite pour une solution (formelle) du problème de chaleur. Notez que nous avons développé un outil puissant ! Pour une condition initiale donnée f, il suffit de calculer les coefficients de Fourier correspondants pour obtenir une solution explicite.

Exemple 3.1 *Considérez le problème :*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < L, t > 0, &(3.22)\\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0, &(3.23)\\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases} &(3.24) \end{aligned}$$

La solution formelle est

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mx \exp\left(-m^2 t\right), \tag{3.25}$$

où

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin mx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin mx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos mx}{m} + \frac{\sin mx}{m^2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-(\pi - x)\cos mx}{m} - \frac{\sin mx}{m^2}\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi m^2}\sin\frac{m\pi}{2}, \end{aligned}$$

or

$$\sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & m = 2n, \\ (-1)^{n+1} & m = 2n-1 \end{cases}, \tag{3.26}$$

où $n = 1, 2, \ldots$*Par conséquent, la solution formelle est*

$$\begin{aligned} & u(x,t) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ =& \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\left[(2n-1)x\right]\exp\left(-(2n-1)^2 t\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nous affirmons que, en supposant que la série de Fourier converge vers f*, la série* (3.27) *est bien une solution classique. Pour vérifier cette affirmation, supposons*

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\left[(2n-1)x\right]. \tag{3.28}$$

Les fonctions obtenues en additionnant uniquement de nombreux termes de la série de Fourier. Puisque

$$\begin{aligned} & |u(x,t)| \\ =& \frac{4}{\pi}\left|\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\left[(2n-1)x\right]\exp-(2n-1)^2 t\right| \\ \leq& \frac{4}{\pi(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

il résulte du M-test de Weierstrass que la série (3.27) *converge uniformément vers une fonction continue dans la région*

$$\{(x,t) \mid 0 \leq x \leq \pi, t > 0\}.$$

En substituant u *dans les conditions initiales et aux limites, et en supposant que le développement de* f *de Fourier converge vers* f, *nous obtenons que ces conditions sont bien satisfaites.*
Reste à montrer que la série (3.27) *est différentiables par rapport à* t, *deux fois différentiables par rapport à* x, *et satisfait l'équation de la chaleur dans le domaine.*

$$D := \{(x,t)\,|0 < x < \pi, t > 0\}\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. *Nous montrons d'abord que la série* (3.27) *est différentiables par rapport à* t, *deux fois différentiables par rapport à* x *et satisfait l'équation de la chaleur dans le sous-domaine*

$$D_\varepsilon := \{(x,t)\,|0 < x < \pi, t > \varepsilon\}\,.$$

Par exemple, nous montrons que (3.27) *peut être différencié par rapport à t pour* $t > \varepsilon$. *En effet, en différenciant* $u_n\,(x,t)$ *par rapport à* t, *on obtient que*

$$\begin{aligned} & \left|(u_n(x,t))_t\right| \\ = & \left|\frac{4\,(2n-1)^2}{\pi\,(2n-1)^2}\sin\left[(2n-1)\,x\right]\exp-(2n-1)^2\,t\right| \\ \leq & \frac{4}{\pi}\exp-(2n-1)^2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Depuis la série

$$\frac{4}{\pi}\exp-(2n-1)^2\,\varepsilon,$$

converge, il en résulte par le M-test de Weierstrass que pour chaque $\varepsilon > 0$ *la série* $\sum (u_n(x,t))_t$ *converge vres* u_t *uniformément dans* D_ε. *De même, on peut montrer que* u *a une dérivée continue du second ordre par rapport à* x *obtenue par différenciation terme par terme. Par conséquent*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty}(u_n)_t - \sum_{n=1}^{\infty}(u_n)_{xx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(u_n)_t - (u_n)_{xx}\right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé la propriété que chaque solution séparée $u_n(x,t)$ *est une solution de l'équation de la chaleur. Ainsi,* u *est une solution de la EDP dans* D_ε. *Puisque* ε *est un nombre positif arbitraire, il en résulte que* u *est une solution de l'équation de la chaleur dans le domaine* D.
Comme le terme général u_n *décroît de façon exponentielle dans* D_ε, *il est possible de différencier* (3.27) *terme par terme en un ordre quelconque relatif à* x *et* t. *La série correspondante converge*

uniformément dans D_ε vers le dérivé approprié. Notez que k les différenciations par rapport à x et ℓ les différenciations par rapport à t contribuent au facteur général de la série à un facteur d'ordre $O\left(n^{k+2l}\right)$, mais en raison du terme exponentiel, la série correspondante est convergente.
La conclusion importante est que, même pour la condition initiale non lisse f, la solution contient finalement beaucoup de dérivés vis-à-vis de x et t et qu'elle est lisse dans la bande D. Le manque de régularité des données initiales disparaît immédiatement, cet effet de lissage est également connu pour les problèmes paraboliques plus généraux, contrairement au cas hyperbolique, où les singularités se propagent le long de caractéristiques et persistent en général dans le temps.
Un autre résultat qualitatif que nous pouvons déduire de notre représentation concerne le comportement de la solution dans le temps (c'est-à-dire le comportement dans la limite $t \longrightarrow +\infty$). Ce comportement est directement influencé par les conditions aux limites, en particulier, cela dépend de la valeur propre minimale du problème de valeur propre correspondant. Dans notre cas, toutes les valeurs propres sont strictement positives, et de (3.18) *et la convergence uniforme dans D_ε il s'ensuit que*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} u(x,t) = 0, \qquad \forall\, 0 \le x \le L.$$

Par conséquent, la température le long de la tige converge vers la température imposée aux extrémités.

3.4 Résoudre un problème de Dirichlet non homogène pour une équation de la chaleur

Soit l'équation de la chaleur non homogène suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x) \tag{3.29}$$

$$u(a,t) = A,\ u(b,t) = B \tag{3.30}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{3.31}$$

Pour résoudre ce problème il faut mettre la solution u comme de somme du deux solutions comme suit

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x),$$

où w est la solution du problème suivant

$$\beta w''(x) + p(x) = 0, \quad w(a) = A,\ w(b) = B,$$

et v est la solution du problème suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. && (3.32)\\
v(a,t) &= 0,\ v(b,t)=0, && (3.33)\\
v(x,0) &= f(x)-w(x). && (3.34)
\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *Pour voir pourquoi il suffit de substituer u par $v+w$ dans le problème $(3.29)-(3.31)$, on trouve*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (v+w)}{\partial t} &= \beta\frac{\partial^2 (v+w)}{\partial x^2}+p(x). && (3.35)\\
v(a,t)+w(a) &= A,\ v(b,t)+w(b)=B, && (3.36)\\
v(x,0)+w(x) &= f(x). && (3.37)
\end{aligned}$$

ce qui imlique

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t} &= \beta\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+p(x). && (3.38)\\
v(a,t)+w(a) &= A,\ v(b,t)+w(b)=B, && (3.39)\\
v(x,0)+w(x) &= f(x). && (3.40)
\end{aligned}$$

Maintenant, comme $w=w(x)$ est indépendant de$t$, On a $\frac{\partial w}{\partial t}=0$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=w''(x)$. Donc, ce qui précède réduit à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{w}''(\mathbf{x})+\mathbf{p}(\mathbf{x}). && (3.41)\\
v(a,t) &= \mathbf{A}-\mathbf{w}(\mathbf{a}),\ v(b,t)=\mathbf{B}-\mathbf{w}(\mathbf{b}), && (3.42)\\
v(x,0)+w(x) &= f(x)-w(x). && (3.43)
\end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que pour être capable de résoudre pour v en utilisant la séparation standard des variables, tous les termes en gras doivent être 0. Ainsi, w résout

$$\beta w''(x)+p(x)=0,\ w(a)=A, w(b)=B. \qquad (3.44)$$

Remarque 3.2 *On note que w peut être résolu comme suit :*

$$\begin{aligned}
\beta w''(x)+p(x) &= 0 && (3.45)\\
&\Rightarrow\ w''(x)=-\frac{p(x)}{\beta}\\
&\Rightarrow\ w(x)=-\frac{1}{\beta}\int\int p(x)+C_1x+C_2.
\end{aligned}$$

Maintenant, On peut utiliser

$$w(a)=A,\ w(b)=B \qquad (3.46)$$

pour decider C_1 et C_2.

Exemple 3.2 *Resoudre le problème suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathbf{x}, \ \ 0 < x < \pi, \quad t > 0 && (3.47) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, t > 0 && (3.48) \\ u(x,0) &= \sin x, \ \ 0 < x < \pi. && (3.49) \end{aligned}$$

Solution 3.1 *Premièrement on trouve que $w(x)$ satisfait*

$$3w'' + x = 0, \quad w(0) = w(\pi) = 0. \tag{3.50}$$

La solution générale est donnée comme suit :

$$w = -\frac{x^3}{18} + C_1 x + C_2. \tag{3.51}$$

Posons

$$w(0) = w(\pi) = 0,$$

on obtient

$$C_2 = 0, C_1 = \frac{\pi^2}{18}.$$

Alors

$$w = -\frac{x}{18}(x^2 - \pi^2). \tag{3.52}$$

Maintenant on pose $v = u - w$ on a besoin de résoudre

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= 3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, && (3.53) \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0, && (3.54) \\ u(x,0) &= \sin x + \frac{x}{18}(x^2 - \pi^2). && (3.55) \end{aligned}$$

On obtient

$$K_n = -n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.56}$$

et besoin d'élargir

$$\sin x + \frac{x}{18}(x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \tag{3.57}$$

De toute évidence, tout ce que on doit faire est

$$\frac{x}{18}(x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b_n} \sin(nx). \tag{3.58}$$

Après ça, b_n peut être obtenu par

$$b_n = \widetilde{b_n} + \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}. \tag{3.59}$$

On calcule

$$
\begin{aligned}
\widetilde{b_n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{18}(x^2-\pi^2)\sin(nx)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \frac{x}{18}(x^2-\pi^2)d\cos(nx) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{x}{18}(x^2-\pi^2)\cos(nx)\mid_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx)\left(\frac{x^2}{6}-\frac{\pi^2}{18}\right)dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[0-0-\int_0^\pi \cos(nx)\left(\frac{x^2}{6}-\frac{\pi^2}{18}\right)dx\right] \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{6}-\frac{\pi^2}{18}\right)d\sin(nx) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{6}-\frac{\pi^2}{18}\right)d\sin(nx) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[\left(\frac{x^2}{6}-\frac{\pi^2}{18}\right)\sin(nx)\mid_0^\pi -\frac{1}{3}\int_0^\pi x\sin(nx)dx\right] \\
&= \frac{2}{3n^3\pi}\int_0^\pi xd\cos(nx) \\
&= \frac{2}{3n^3\pi}\left[x\cos(nx)\mid_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx)dx\right] \\
&= \frac{2}{3n^3\pi}\left[\pi(-1)^n - 0 - \frac{1}{n}\sin(nx)\mid_0^\pi\right] \\
&= \frac{2(-1)^n}{3n^3} = \begin{cases} \frac{2}{3n^3}n, & \textit{pair} \\ -\frac{2}{3n^3}n, & \textit{impair} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

Donc

$$
b_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{2}{3n^3}, & n \textit{ pair} \\ -\frac{2}{3n^3}, & n \textit{ impair} \end{cases}. \tag{3.61}
$$

Résoudre

$$
\begin{aligned}
T_n' + 3n^2T_n &= 0, \\
T_n(0) &= \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{2}{3n^3}, & n \textit{ pair} \\ -\frac{2}{3n^3}, & n \textit{ impair} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

on a

$$
T_n(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{2}{3n^3}e^{-3n^2t}, & n \textit{ pair} \\ -\frac{2}{3n^3}e^{-3n^2t}, & n \textit{ impair} \end{cases}. \tag{3.63}
$$

Finallement

$$\begin{aligned}
& v(x,t) \\
= \;& e^{-3t}\sin(x) + \sum_{n \text{ pair}} \frac{2}{3n^3} e^{-3n^2 t}\sin(nx) \\
& - \sum_{n \text{ impair}} \frac{2}{3n^3} e^{-3n^2 t}\sin(nx) \\
= \;& e^{-3t}\sin(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3(2k)^3} e^{-3(2k)^2 t}\sin(2kx) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3(2k-1)^3} e^{-3(2k-1)^2 t}\sin((2k-1)x) \\
= \;& e^{-3t}\sin(x) + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4k^3} e^{-12k^2 t}\sin(2kx) \\ -\frac{2}{(2k-1)^3} e^{-3(2k-1)^2 t}\sin((2k-1)x) \end{array} \right]. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Retour à u

$$\begin{aligned}
& u(x,t) \qquad (3.65) \\
= \;& e^{-3t}\sin(x) \\
& + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4k^3} e^{-12k^2 t}\sin(2kx) \\ -\frac{2}{(2k-1)^3} e^{-3(2k-1)^2 t}\sin((2k-1)x) \end{array} \right] \\
& + \frac{x}{6}(x^2 - \pi^2).
\end{aligned}$$

Exemple 3.3 *Résoudre le problème suivant*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathbf{5}, \;\; 0 < x < \pi, \quad t > 0 \qquad (3.66) \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 1, t > 0 \qquad (3.67) \\
u(x,0) &= 1, \;\; 0 < x < \pi. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Solution 3.2 *Premièrement on trouve que $w(x)$ tel que*

$$3w'' + 5 = 0, \quad w(0) = w(\pi) = 1. \qquad (3.69)$$

La solution général est

$$w(x) = -\frac{5}{6}x^2 + C_1 x + C_2. \qquad (3.70)$$

Posons

$$w(0) = w(\pi) = 1,$$

on obtient

$$C_2 = 1, C_1 = \frac{5\pi}{6},$$

alors

$$w(x) = -\frac{5\pi}{6}(\pi - x) + 1. \tag{3.71}$$

On pose

$$v = u - w,$$

on résout

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= 3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, \quad t > 0 & (3.72)\\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0, t > 0 & (3.73)\\ v(x,0) &= 1 - \left[\frac{5x}{6}(\pi - x) + 1\right] = \frac{5x}{6}(x - \pi), 0 < x < \pi, & (3.74) \end{aligned}$$

on obtient

$$K_n = -n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.75}$$

et on développe

$$\frac{5x}{6}(x - \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \tag{3.76}$$

Par des calcules, on trouve

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{5x}{6}(x - \pi)\right] \sin(nx)dx \\ &= -\frac{5}{3n\pi}\int_0^{\pi} x(x - \pi)d\cos(nx) \\ &= -\frac{5}{3n\pi}\left[x(x - \pi)\cos(nx) \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(nx)d[x(x - \pi)]\right] \\ &= -\frac{5}{3n\pi}\left[0 - 0 - \int_0^{\pi} (2x - \pi)\cos(nx)\right] \\ &= \frac{5}{3n\pi}\int_0^{\pi} (2x - \pi)\cos(nx)dx \\ &= \frac{5}{3n\pi}\left[(2x - \pi)\cos(nx) \mid_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \cos(nx)dx\right] \\ &= \frac{5}{3n\pi}\left[\pi(-1)^n - (-\pi) - \frac{2}{n}\sin(nx) \mid_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{5}{3n\pi}[(-1)^n + 1] = \begin{cases} \frac{10}{3n} & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair} \end{cases}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Maintenant on résout

$$T_n' + 3n^2 T_n = 0, \quad T_n(0) = \begin{cases} \frac{10}{3n}, & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair} \end{cases} \tag{3.78}$$

on a

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{10}{3n} e^{-3n^2 t}, & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair} \end{cases} . \tag{3.79}$$

Cela mène à

$$v(x,t) = \sum_{n \text{ pair}} \frac{10}{3n} e^{-3n^2 t} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3k} e^{-12k^2 t} \sin(2kx). \tag{3.80}$$

Alors

$$u(x,t) = v + w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3k} e^{-12k^2 t} \sin(2kx) + \frac{5x}{6}(\pi - x) + 1. \tag{3.81}$$

3.5 La méthode de l'énergie et l'unicité

La méthode de l'énergie est un outil fondamental dans la théorie des EDPs. L'une de ses principales applications est de prouver le caractère unique de la solution des problèmes initiaux de valeur limite. La méthode est basée sur le principe physique de la conservation de l'énergie, bien que dans certaines applications, l'objet que nous appelons mathématiquement «l'énergie» ne soit pas nécessairement l'énergie réelle d'un système physique.

Rappelons que pour prouver le caractère unique des solutions à un problème différentiel linéaire, il suffit de montrer que la solution de l'EDP homogène correspondante avec des conditions initiales et aux limites homogènes est nécessairement la solution zéro. Laissez-nous décrire la méthode de l'énergie. Pour certains problèmes homogènes, il est possible de définir une intégrale d'énergie non négative et fonction non croissante du temps t. De plus, pour $t = 0$, l'énergie est nulle et, par conséquent, l'énergie est nulle pour tout $t \geq 0$. En raison de la positivité de l'énergie et des conditions initiales et limites nulles, il en résultera que la solution est nulle.

Nous démontrons la méthode énergétique pour les problèmes qui ont été étudiés dans la présente section.

Exemple 3.4 *Considérons le problème de Neumann pour la corde vibrante*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= F(x,t) \quad && 0 < x < L,\ t > 0, && (3.82)\\ u_x(0,t) &= a(t) && t \geq 0, && (3.83)\\ u_x(L,t) &= b(t) && t \geq 0, && (3.84)\\ u(x,0) &= f(x) && 0 \leq x \leq L, && (3.85)\\ u_t(x,0) &= g(x) && 0 \leq x \leq L. && (3.86) \end{aligned}$$

Soit u_1, u_2 deux solutions au problème. Par le principe de superposition, la fonction $w := u_1 - u_2$ est une solution du problème

$$\begin{aligned}
w_{tt} - c^2 w_{xx} &= 0 \quad 0 < x < L,\ t > 0, && (3.87)\\
w_x(0,t) &= 0 \qquad t \geq 0, && (3.88)\\
w_x(L,t) &= 0 \qquad t \geq 0, && (3.89)\\
w(x,0) &= 0 \qquad 0 \leq x \leq L, && (3.90)\\
w_t(x,0) &= 0 \qquad 0 \leq x \leq L. && (3.91)
\end{aligned}$$

Définir l'énergie totale de la solution w au temps t comme

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left(w_t^2 + c^2 w_x^2\right) dx. \tag{3.92}$$

Le premier terme représente l'énergie cinétique totale de la chaîne, tandis que le second terme représente l'énergie potentielle totale. Clairement, E est donné par

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^L \left(w_t^2 + c^2 w_x^2\right) dx\right]\\
&= \int_0^L \left(w_t w_{tt} + c^2 w_x w_{xt}\right) dx. && (3.93)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
c^2 w_x w_{xt} &= c^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t) - w_{xx} w_t\right]\\
&= c^2 \frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t) - w_{tt} w_t.
\end{aligned}$$

En substituant cette identité à (3.93), nous avons

$$\begin{aligned}
E'(t) &= c^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(w_x w_t)\, dx\\
&= c^2 \left(w_x w_t\right)\Big|_0^L. && (3.94)
\end{aligned}$$

La condition aux limites $(3.88) - (3.89)$ implique que $E'(t) = 0$, donc $E(t) =$ constante, et l'énergie est conservée.

Par contre, puisque pour $t = 0$ nous avons $w(x,0) = 0$, il en résulte que $w_x(x,0) = 0$. De plus, nous avons aussi $w_t(x,0) = 0$. Par conséquent, l'énergie au temps $t = 0$ est nulle. Ainsi, $E(t) = 0$.

Depuis $e(x,t) := w_t^2 + c^2 w_x^2 \geq 0$, *et puisque son intégrale sur* $[0, L]$ *est nulle, il s'ensuit que* $w_t^2 + c^2 w_x^2 \equiv 0$, *ce qui implique que* $w_t(x,t) = w_x(x,t) \equiv 0$. *Par conséquent,* $w(x,t) \equiv$ *constante. Par les conditions initiales* $w(x,0) = 0$, *on a* $w(x,t) \equiv 0$. *Ceci complète la preuve de l'unicité du problème* (3.82)-(3.86).

Exemple 3.5 *Modifions un peu le problème précédent et, au lieu du problème de Neumann (non homogène), considérons les conditions aux limites de Dirichlet. :*

$$u(0,t) = a(t),\ u(L,t) = b(t) \quad t \geq 0.$$

Nous utilisons la même intégrale d'énergie et suivons les mêmes étapes. On obtient pour la fonction w

$$E'(t) = c^2 \left(w_x w_t\right)\Big|_0^L . \tag{3.95}$$

Puisque

$$w(0,t) = w(L,t) = 0,$$

il s'ensuit que

$$w_t(0,t) = w_t(L,t) = 0,$$

donc,

$$E'(t) = 0,$$

et aussi dans ce cas l'énergie est conservée. le reste de la preuve est exactement le même que dans l'exemple précédent.

Exemple 3.6 *La méthode de l'énergie peut également être appliquée aux problèmes de conduction thermique. Considérons le problème de Dirichlet*

$$\begin{aligned}
u_t - k u_{xx} &= F(x,t) \qquad 0 < x < L,\ t > 0, && (3.96)\\
u(0,t) &= a(t) \qquad t \geq 0, && (3.97)\\
u(L,t) &= b(t) \qquad t \geq 0, && (3.98)\\
u(x,0) &= f(x) \qquad 0 \leq x \leq L, && (3.99)
\end{aligned}$$

Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous devons prouver que si w *est une solution du problème homogène à zéro conditions initiales et aux limites, alors* $w = 0$. *Dans le cas présent, nous définissons l'énergie comme suit :*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L w^2 dx. \tag{3.100}$$

La dérivée temporelle E' est donnée par

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L w^2 dx\right] \\
&= \int_0^L w w_t dx \\
&= \int_0^L k w w_{xx} dx.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

en intégrant par parties et en remplaçant les conditions aux limites, nous avons

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= k\, w w_x|_0^L - \int_0^L K w_x^2 dx \\
&= -\int_0^L K w_x^2 dx \leq 0,
\end{aligned}
$$

par conséquent, l'énergie n'augmente pas. Puisque $E\,(0) = 0$ et $E(t) \geq 0$, il s'ensuit que $E \equiv 0$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, nous avons $w(.,t) \equiv 0$ et l'unicité est prouvée. La même preuve peut également être utilisée pour le problème de Neumann et même pour la condition limite du troisième type :

$$
\begin{aligned}
u(0,t) - \alpha u_x(0,t) &= a(t), \\
u(L,t) + \beta u_x(L,t) &= b(t),
\end{aligned}
$$

pour tout $t \geq 0$, à condition que $\alpha, \beta \geq 0$.

3.6 L'existence et l'unicité de la solution pour un problème de Dirichlet pour une équation de la chaleur par la méthode d'inégalité d'énergie

3.6.1 Introduction

L'objectif de cette section est l'étude d'un problème de Dirichlet pour une équation parabolique (équation de la Chaleur). On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité d'énergie et sur la densité de l'ensemble de l'image de l'opérateur engendré par le problème étudié dans l'espace d'arrivée F.

3.6.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire $Q_T = (0,1) \times (0,T)$, avec $T < \infty$. On va considérer l'équation de la chaleur. On cherche donc une solution au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \quad \text{dans } Q_T \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T] \end{cases} \tag{P}$$

telle que

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{3.102}$$

avec la condition initiale

$$\ell u = u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \tag{3.103}$$

la condition au limite de Dirichlet

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t \in [0,T] \tag{3.104}$$

où φ, f sont des fonctions connues.

3.6.3 Estimation a priori

Dans cette sous section, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.102) – (3.104). La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème (P). Le problème (P) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{3.105}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec un domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L^2(Q_T)$, telles que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(Q_T)$ et u satisfait les conditions de limite dans (P), l'opérateur L est considéré de B dans F, où B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q_T)$ et dont la norme :

$$\|u\|_B^2 = \|u_x\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|u\|_{L^2(0,1)}^2,$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ dont la norme :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2,$$

est finie.

Théorème 3.1 *Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation*

$$\|u\|_B \leq m \|Lu\|_F , \tag{3.106}$$

où m est une constante positive indépendante de u tell que :

$$m = \sqrt{\frac{\max_{x\in[0,1]} \left(\frac{\varepsilon}{2}, \max\left(\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2}\right)\right)}{\min(\frac{1}{2}, 1)} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}T}}.$$

Preuve. Multipliant l'équation (3.102) par le multiplicateur Mu suivant :

$$Mu = u,$$

et en intégrant sur le domaine $Q_\tau = (0,1) \times (0,\tau)$, où $\tau \in [0,T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} (\partial_t u - \Delta u) \cdot Mudxdt \\
&= \int_{Q_\tau} \partial_t u(x,t) \cdot u(x,t)dxdt - \int_{Q_\tau} \Delta u(x,t) \cdot u(x,t)dxdt \\
&= \int_{Q_\tau} f(x,t) \cdot u(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_{Q_\tau} \partial_t u(x,t) \cdot u(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u^2(x,t)\Big|_{t=0}^{t=\tau} \right) dx.$$

D'après la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

et

$$\int f'(x) \cdot f^n(x)dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1},$$

on trouve :

$$\int_{Q_\tau} \partial_t u(x,t) \cdot u(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2(x)dx,$$

et

$$\begin{aligned}
&- \int_{Q_\tau} u_{xx}(x,t) \cdot u(x,t)dxdt \\
&= \int_0^\tau \left(-u(x,t)(u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} \right) dt - \int_0^\tau \int_0^1 \left(-(u_x(x,t))^2 \right) dxdt.
\end{aligned}$$

D'après la condition au limite de Dirichlet, on a :

$$-\int_{Q_\tau} u_{xx}(x,t)\cdot u(x,t)dxdt = \int_0^\tau\int_0^1 (u_x(x,t))^2 dxdt,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} (\partial_t u\cdot u - \Delta u\cdot u)dxdt \\
=&\int_{Q_\tau} \partial_t u\cdot udxdt - \int_{Q_\tau} \Delta u\cdot udxdt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2(x)dx + \int_0^\tau\int_0^1 (u_x(x,t))^2dxdt \\
=&\int_{Q_\tau} f(x,t)\cdot u(x,t)dxdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ &\int_0^\tau\int_0^1 (u_x(x,t))^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,\tau)dx \\
=\ &\int_{Q_\tau} f(x,t)\cdot u(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2(x)dx,
\end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε, on trouve (i.e : $\mid ab \mid\leq \frac{\varepsilon}{2}\mid a\mid^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\mid b\mid^2$; $\forall\varepsilon > 0$; $\forall a, b$ et

$$\int_0^\tau\int_0^1 (u_x)^2dxd\tau = \|u_x\|^2_{L^2(Q_\tau)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|u_x\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,1)} \\
\leq\ &\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall (i.e $c_1f_1 + c_2f_2 \leq c_3f_3 + c_4\int_0^\tau f_2(t)dt \Longleftrightarrow f_1 + f_2 \leq cf_3$) avec

$$c = \frac{\max(c_3, c_4)}{\min(c_1, c_2)}\cdot e^{c_4T},$$

dans ce cas $f_2 = \int\limits_0^1 u^2 dx$, d'où

$$\|u_x\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u\|^2_{L^2(0,1)} \leq c\left(\|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}\right),$$

avec

$$c = \frac{\max_{x\in[0,1]}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \max\left(\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2}\right)\right)}{\min(\frac{1}{2}, 1)} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}T}.$$

ce qui équivalent

$$\|u\|^2_E \leq c\,\|\mathcal{F}\|^2_F\,,$$

alors

$$\|u\|_B \leq m\,\|\mathcal{F}\|_F \quad \text{avec } m = \sqrt{c},$$

d'où l'unicité de la solution. ■

Remarque 3.3 *L'inégalité* (3.106) *donne l'unicité de la solution comme suit : soit* u_1 , u_2 *deux solutions alors*

$$\begin{cases} Lu_1 = \mathcal{F} \\ Lu_2 = \mathcal{F} \end{cases} \Longrightarrow L(u_1 - u_2) = 0,$$

donc

$$\|u_1 - u_2\|_B \leq c\,\|0\|_F \Longrightarrow \|u_1 - u_2\|_E \leq 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

Ce qui donne l'unicité de la solution.

3.6.4 Etude de l'existence de la solution

Montrons maintenant l'existence de la solution

Proposition 3.1 *L'opérateur* L *de* B *dans* F *est fermable.*

Preuve. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D(L)$ une suite telle que :

$$u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } B, \tag{3.107}$$

et

$$Lu_n \longrightarrow (f;\varphi) \text{ dans } F, \tag{3.108}$$

il faut démontrer que

$$f \equiv 0 \text{ et } \varphi \equiv 0.$$

La convergence de u_n vers 0 dans B entraîne :

$$u_n \longrightarrow 0 \ \text{ dans } D^{'}(Q_T). \tag{3.109}$$

D'après la continuité de la dérivation de $D^{'}(Q_T)$ dans $D^{'}(Q_T)$, (3.109) implique :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow 0 \ \text{ dans } D^{'}(Q_T). \tag{3.110}$$

Par ailleurs, la convergence de Lu_n vers f dans $L^2(Q_T)$ engendre :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow f \ \text{ dans } D^{'}(Q_T). \tag{3.111}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D^{'}(Q_T)$, on conclut de (3.110) et (3.111) que $f = 0$. Ensuite, il s'engendre de (3.108) :

$$\ell u_n \longrightarrow \varphi \ \text{ dans } L^2(0,1). \tag{3.112}$$

D'un autre coté, d'après :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_B^2 &= \|(u_n)_x\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|u_n\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geq \|u_n\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geq \|u_n(x,0)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geq \|\varphi(x)\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

puisque $u_n \longrightarrow 0$ dans B alors $\|u_n\|_B^2 \longrightarrow 0$ dans B on obtient alors :

$$\|\varphi(x)\| \leq 0,$$

on conclut que

$$\varphi = 0.$$

■

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L, et $D(\overline{L})$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition 3.1 *La solution de l'équation*

$$\overline{L}u = \mathcal{F},$$

est dite solution forte du problème (P).

théoerème 3.1 est valide pour une solution forte, i.e. ; on a l'inégalité :

$$\|u\|_B \leq m \left\|\overline{L}u\right\|_F \forall u \in D(\overline{L}). \tag{3.113}$$

Par conséquent, cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants :

Corollaire 3.1 *La solution du problème* $(3.102) - (3.104)$ *si elle existe, elle est unique et dépend continûment de* $\mathcal{F} \in F$.

Corollaire 3.2 *L'ensemble des valeurs* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égale à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$.

Preuve. Soit $z \in \overline{R(L)}$, alors il existe une suite de Cauchy $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z.$$

Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(L)$ telle que

$$Lu_n = z_n.$$

De l'estimation (3.106), on obtient :

$$\|u_p - u_q\|_B \leq m \|Lu_p - Lu_q\|_F \to 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans B, ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ dans } B.$$

En vertu de la définition de $\overline{L}$ ($\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ dans B, si $\lim_{n\to+\infty} Lu_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = z$, alors $\lim_{n\to+\infty} \overline{L}u_n = z$ et comme $\overline{L}$ est fermé donc $\overline{L}u = z$), la fonction u vérifie que :

$$u \in D(\overline{L}),\ \overline{L}u = z.$$

Ainsi $z \in R(\overline{L})$, alors

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L}).$$

Aussi on conclut ici que $R(\overline{L})$ est fermé parce qu'il est complet (tout sous-espace complet d'un espace métrique (non nécessairement complet) est fermé).
Il reste à démontrer l'inclusion inverse.
Soit $z \in R(\overline{L})$, alors il existe une suite de Cauchy $\{z_n\}_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(\overline{L})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z,$$

où $z \in R(\overline{L})$, car $R(\overline{L})$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet F, donc $R(\overline{L})$ est complet.
Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(\overline{L})$ telle que

$$\overline{L}u_n = z_n.$$

De l'estimation (3.113) , on obtient :

$$\|u_p - u_q\|_B \leq m \left\|\overline{L}u_p - \overline{L}u_q\right\|_F \to 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans B, ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ dans } B.$$

Une fois encore, il existe une suite correspondante $\{L(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in R(L)$ telle que

$$Lu_n = \overline{L}u_n \text{ sur } R(L).\ \forall n.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} Lu_n = z.$$

En conséquence $z \in \overline{R(L)}$, et alors on conclut que

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}.$$

■

Pour démontrer l'existence de la solutions, on doit prouver que $R(L)$ est dense dans F pour tout $u \in B$ et pour tout arbitraire $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$.

Théorème 3.2 *Pour chaque $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, le problème $(3.102) - (3.104)$ admet une solution forte unique $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F}$.*

Preuve. En vertu de l'inégalité (3.113), il s'ensuit que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$ et comme l'ensemble $R(\overline{L})$ est fermé (En raison du corollaire 3.2), d'ou il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $R(L)$ dans l'espace F pour le cas particulier où $D(L) \equiv B$ est réduite à $D_0(L)$, où $D_0(L) = \{u,\ u \in D(L) : \ell u = 0\}$. Dans ce but, on démontre la proposition suivante :

■

Proposition 3.2 *Si, pour $\omega \in L^2(Q_T)$ et pour tout $u \in D_0(L)$, on a*

$$\int_{Q_T} \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt = 0, \tag{3.114}$$

alors ω s'annule presque partout dans Q_T.

Preuve. Le produit scalaire de F est défini par :

$$(Lu, \omega)_F = \int_{Q_T} \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt + \int_0^1 (\ell u)(\omega_0)\, dx. \tag{3.115}$$

L'égalité (3.115) peut s'écrit comme suit :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \omega dxdt - \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \omega dxdt = 0, \tag{3.116}$$

où $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega)$, avec u satisfait les conditions aux limites de (P). De (3.116), on obtient l'égalité :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \omega dxdt = \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \omega dxdt. \tag{3.117}$$

On met

$$u(x,t) = \int_0^t z(x,\tau)d\tau,$$

d'après (3.117) on a l'égalité

$$\int_{Q_T} z \cdot \omega dxdt = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 (\int_0^t z(x,\tau)d\tau)}{\partial x^2} \right) \cdot \omega dxdt. \tag{3.118}$$

Au cours de l'établissement de la fonction ω,et à partir de l'égalité (3.118), on donne la fonction ω en terme de la fonction z comme suit :

$$\omega = z(x,t). \tag{3.119}$$

Donc, $\omega \in L^2(\Omega)$. Et z satisfait aux mêmes conditions que la fonction u dans (P).
Remplaçant ω dans (3.118) par sa représentation (3.119), par l'intégration par parties avec l'utilisation de conditions de la fonction z, on obtient :

$$\int_{Q_T} z(x,t) \cdot z(x,t) dxdt = \left(\frac{\partial^2 (\int_0^t z(x,\tau)d\tau)}{\partial x^2} \right) \cdot z(x,t) dxdt, \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} z^2(x,t)\,dxdt \qquad (3.121)\\
&= \int_0^T \left(\frac{\partial(\int_0^t z(x,\tau)d\tau)}{\partial x} \cdot z(x,t) \Bigg|_{x=0}^{x=1} \right) dt\\
&\quad - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial(\int_0^t z(x,\tau)d\tau)}{\partial x} \cdot \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{Q_T} z^2(x,t)\,dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^T \frac{\partial z(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right)^2 dx,$$

donc

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t z(x,\tau)d\tau \right)^2 dx \leq 0.$$

Il devient, donc $z = 0$ dans Q_T, qui donne $\omega = 0$ dans Q_T. Cela fait la preuve de la proposition. ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.2.

On considère une fonction $W = (\omega, \omega_0) \in R(L)^{\perp}$ et pour tout $u \in D(L) \equiv B$, alors W vérifie l'égalité :

$$\begin{aligned}
&(Lu, \omega)_F\\
&= \int_Q \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt + \int_0^1 (\ell u)(\omega_0)\,dx \qquad (3.122)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puis. On doit prouver que $W = 0$. On suppose $u \in D_0(L)$ dans (3.122), on obtient :

$$\int_\Omega \mathcal{L}u \cdot \omega\; dxdt = 0,\;\; u \in D_0(L).$$

De la proposition 3.2, on déduit que $\omega = 0$. Ainsi (3.122) prend la forme :

$$\int_0^1 (\ell u)(\omega_0)\,dx = 0, u \in D(L). \qquad (3.123)$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur ℓ est dense partout dans l'espace de Hilbert F avec la norme

$$\left(\int_0^1 \left[(\ell u)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'égalité (3.123) implique que $\omega_0 = 0$. Donc $W = 0$ implique $\overline{R(L)} = F$.
Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

Chapitre 4

Problèmes elliptiques

4.1 L'équation de Laplace sur un rectangle (2D)

Le problème considéré est le suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant M,\ 0 \leqslant y \leqslant N \\ u(x,0) = f_1(x),\, u(x,N) = f_2(x) & 0 \leqslant x \leqslant M \\ u(0,y) = g_1(y),\, u(M,y) = g_2(y) & 0 \leqslant y \leqslant N \end{cases} . \tag{4.1}$$

Nous allons couper ce problème en quatre problèmes ayant chacun une seule condition non-homogène :

$$(P_1) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u_1(x,0) = f_1(x),\ u_1(x,N) = 0 \\ u_1(0,y) = 0,\ u_1(M,y) = 0 \end{cases} ;$$

$$(P_2) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u_2(x,0) = 0,\ u_2(x,N) = f_2(x) \\ u_2(0,y) = 0,\ u_2(M,y) = 0 \end{cases} ;$$

$$(P_3) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u_3(x,0) = 0,\ u_3(x,N) = 0 \\ u_3(0,y) = g_1(y),\ u_3(M,y) = 0 \end{cases} ;$$

$$(P_4) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u_3(x,0) = 0,\ u_3(x,N) = 0 \\ u_3(0,y) = 0,\ u_3(M,y) = g_2(y) \end{cases} .$$

Si u_i , $i = 1,2,3,4$ est une solution de problème (P_i) alors $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ est une solution du problème (4.1).

On va ullustrer la méthode de séparation des variables pour résoudre (P_1).
Le même type d'analyse peut être fait pour les trois autres problèmes. Alors, pour résoudre le problème (P_1), posons

$$u_1(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0,$$

il vient

$$X''Y + XY'' = 0,$$

où

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2.$$

Donc on obtient

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \text{ et } Y'' - \lambda^2 Y = 0,$$

d'où le premier problème de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(M) = 0 \end{cases}. \tag{4.2}$$

La résolution de ce problème (4.2) d'équation différentielle ordinaire est donnée par

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

les conditions

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X(M) &= C_2 \sin \lambda M \\ &= 0, \end{aligned}$$

implique que

$$\sin \lambda M = 0 \Rightarrow \lambda M = n\pi,$$

ce qui donne

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{M},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

alors

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{M} x. \tag{4.3}$$

La résolution du deuxieme problème de Sturm Liouville

$$\begin{cases} Y'' - \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 Y = 0 \\ Y(N) = 0 \end{cases},$$

est donnée par

$$Y(y) = C_3 e^{-\frac{n\pi}{M}y} + C_4 e^{\frac{n\pi}{M}y},$$

en utilisant $Y(N) = 0$, on trouve

$$Y(N) = C_3 e^{-\frac{n\pi}{M}N} + C_4 e^{\frac{n\pi}{M}N} = 0,$$

ce qui donne

$$C_3 = -C_4 \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= -C_4 \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right) e^{\frac{-n\pi}{M}y} + C_4 e^{\frac{n\pi}{M}y} \\ Y_n(y) &= 2C_4 \mathbf{e}^{\frac{n\pi}{M}N} \left[\exp\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)\right] \\ Y_n(y) &= 2C_4 e^{\frac{n\pi}{M}N} \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$u_{1,n}(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right),$$

où

$$A_n = 2C_2C_4 \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right).$$

$u_{1,n}(x,y)$ est une solution qui satisfait toutes ses conditions. D'abord par l'utilisation du thèorème de superposition, on trouve :

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right). \tag{4.4}$$

Reste calculer A_n.

Pour satisfaire la dernière condition $u_1(x,0) = f_1(x)$, on a d'une part

$$u_1(x,0) = f_1(x) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \cdot \sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right), \tag{4.5}$$

et d'autre part, développons $f_1(x)$ en série de Fourier en sinus, on obtient

$$f_1(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \cdot \sinh\left(-\frac{n\pi}{M}x\right), \tag{4.6}$$

tel que

$$\alpha_n = \frac{2}{M}\int_0^M f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right)dx,$$

de (4.5) et (4.6) on trouve :

$$A_n = \frac{2}{M\sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right)}\int_0^M f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi, on va obtenir une solution formelle du (P_1); en procédant de façon similaire, on obtient des solutions formelles aux problèmes (P_i) : $i = 2, 3, 4$, ces solutions sont :

$$u_2(x,y) = \sum_{n\geq 1} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right). \sinh\left(\frac{n\pi}{M}y\right),$$

avec

$$B_n = \frac{2}{M\sinh\left(\frac{n\pi N}{M}\right)}\int_0^M f_2(x)\sin\frac{n\pi}{M}x dx,$$

et

$$u_3(x,y) = \sum_{n\geq 1} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{N}y\right). \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right),$$

avec

$$C_n = \frac{2}{N\sinh\left(-\frac{n\pi M}{N}\right)}\int_0^N g_1(y)\sin\frac{n\pi}{N}y dy,$$

et

$$u_4(x,y) = \sum_{n\geq 1} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{N}y\right). \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right),$$

avec

$$D_n = \frac{2}{N\sinh\left(\frac{n\pi M}{N}\right)}\int_0^N g_2(y)\sin\frac{n\pi}{N}y dy.$$

Finalement la solution du (4.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} & u(x,y) \\ = & \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right)\left[A_n\sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) + B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{M}y\right)\right] \\ & + \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n\pi}{N}y\right).\left[C_n\sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right) + D_n\sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right)\right], \end{aligned}$$

où A_n, B_n, C_n et D_n données comme précédemment.

Exemple 4.1 *Résoudre l'équation de Laplace dans le domaine rectangulaire :* $\{0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$*, avec les conditions aux limites de Dirichlet :*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 \leqslant x, y \leqslant \pi \\ u(o, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(x, 0) = 0,\ u(0, \pi) = x(x - \pi) & 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases} . \tag{4.7}$$

Solution 4.1 *On pose*

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x)Y(y) \neq 0, \\ u_{xx} &= X''Y,\ u_{yy} = XY''. \end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$u_{xx} = X''Y, u_{yy} = XY'',$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} X''Y + XY'' &= 0 \\ &\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} u(o, y) &= X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \\ u(\pi, y) &= X(\pi)Y(y) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

D'où le problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

d'après la valeur propre λ, on distingue trois cas
Le premier cas : $\lambda = 0$*; la solution générale pour ce cas a la forme*

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

on calcule les constantes C_1 et C_2 comme suit :

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0, \\ X(\pi) &= C_1 \pi = 0 \Rightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Alors la solution est triviale dans ce cas.
Le deuxième cas : $\lambda < 0$ *; la solution générale pour ce cas a la forme*

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x},$$

on calcule les constantes C_1 *et* C_2 *comme suit :*

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1, \\ X(\pi) &= C_1(e^{-\sqrt{\lambda}x} - C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Alors la solution est triviale dans ce cas.
Le troisième cas : $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$ *; la solution générale pour ce cas a la forme*

$$X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x,$$

on calcule les constantes C_1 *et* C_2 *comme suit :*

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, \\ X(\pi) &= C_2 \sin \omega\pi = 0; \end{aligned}$$

ce qui implique (pour éviter les solutions triviales)

$$\sin \omega\pi = 0 \Longrightarrow \omega\pi = n\pi, \; n = 1, 2, 3, ...$$

donc $\omega = n$ *et* $\lambda = n^2$.
Alors les fonctions propres du problème de Sturm Liouville (4.8) *sont*

$$X_n(x) = C_n \sin nx.$$

D'après

$$-\frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = -n^2,$$

on a

$$Y'' - n^2 Y = 0, \tag{4.9}$$

avec

$$Y(0) = 0. \tag{4.10}$$

Donc la résolution de (4.9), *donne*

$$Y(y) = C_3 e^{-ny} + C_4 e^{ny}.$$

De (4.10)*, on obtient*

$$Y(0) = C_3 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_3,$$

donc, on trouve

$$Y_n(y) = 2C_3 \left(\frac{e^{-ny} - e^{ny}}{2} \right) = -2C_3 \sinh ny.$$

On résulte que

$$u_n(x, y) = A_n \sin nx \cdot \sinh ny, \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$$

D'abord par le principe de superposition, il vient

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin nx \cdot \sinh ny.$$

Maintenant ; on passe à calculer A_n.

De part, on a

$$u(x, \pi) = \sum_{n \geq 1} A_n \sinh n\pi \cdot \sinh nx = x(x - \pi) \;;$$

En developpant $x(x - \pi)$ *en série de Fourier en sinus :*

$$x(x - \pi) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin nx,$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(x - \pi) \sin nx dx \\ &= \frac{-4}{n^3 \pi} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2m \\ \frac{8}{n^3 \pi} & , \quad n = 2m + 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Alors

$$A_n \sinh n\pi = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad n = 2m \\ \frac{8}{n^3 \pi} & \textit{si} \quad n = 2m + 1 \end{cases} , m \in \mathbb{N}^*.$$

Finalemen, on résulte que la solution est :

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{m \geq 0} \frac{\sin(2m + 1)x \cdot \sinh(2m + 1)y}{(2m + 1)^3 \sinh(2m + 1)\pi}.$$

4.2 Problème de Laplace dans les coordonnées polaires (Domaines circulaires)

Il est préférable d'écrire le problème en coordonnées polaires plutot qu'en coordonées cartésiennes notamment si la frontière est circulaire.
Les coordonnées polaires sont définies comme suite :
Si on pose

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases},$$

on trouve

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}.$$

Le Jacobien est

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

L'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

devient l'équation aux dérivées partielles suivant en coordonnées polaires :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0.$$

Donc ; cherchons des solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0; & 0 < \rho < R, -\pi < \theta < \pi \\ u(R,\theta) = f(\theta) \end{cases}.$$

Pour des causes physiques on a :
– (A_1) :

$$u(\rho,\pi) = u(\rho,-\pi),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho,\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho,-\pi),$$

et
– (A_2) :

$$|u(\rho,\theta)| \text{ est bornée si } \rho \to 0.$$

Cherchons des solutions sous la forme

$$u(\rho, \theta) = \varrho(\rho) S(\theta),$$

il vient

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \\ &\Rightarrow \varrho'' S + \frac{1}{\rho}\varrho' S + \frac{1}{\rho^2}\varrho S'' = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\varrho'' + \frac{1}{\rho}\varrho'}{\frac{1}{\rho^2}\varrho} = -\frac{S''}{S} = \lambda. \end{aligned}$$

Pour que la solution $U(r, \theta)$ appartienne à la classe C^2, il faut imposer deux conditions de périodicité :

$$(A_1) : S(\pi) = S(-\pi) et S'(\pi) = S'(-\pi),$$

$$(A_2) : \ |\varrho(\rho)| \text{ bornée lorsque } \rho \to 0.$$

Donc, on obtient un problème de Sturm Liouville et problème d'équation différentielle ordinaire de deuxième ordre suivantes :

$$(P_1) : \begin{cases} \varrho'' + \frac{1}{\rho}\varrho' - \frac{\lambda}{\rho^2}\varrho = 0 \\ |\varrho(\rho)| \ \text{ est bornée si } \rho \to 0 \end{cases},$$

$$(P_2) : \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(\pi) = S(-\pi) \\ S'(\pi) = S'(-\pi) \end{cases}.$$

Pour le problème (P_2), on distingue 3 cas :
1/ si $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, les solutions sont triviaux.
2/ si $\lambda > 0$, alors, on obtient

$$S(\theta) = a \cos \sqrt{\lambda}\theta + b \sin \sqrt{\lambda}\theta.$$

On utilise les conditions aux frontières, et que

$$S'(\theta) = \sqrt{\lambda}\left(-a \sin \sqrt{\lambda}\theta + b \cos \sqrt{\lambda}\theta\right),$$

on trouve

$$a \cos \sqrt{\lambda}\pi + b \sin \sqrt{\lambda}\pi = a \cos \sqrt{\lambda}\pi - b \sin \sqrt{\lambda}\pi,$$

et

$$\sqrt{\lambda}\left(-a \sin \sqrt{\lambda}\pi + b \cos \sqrt{\lambda}\pi\right) = \sqrt{\lambda}\left(a \sin \sqrt{\lambda}\pi + b \cos \sqrt{\lambda}\pi\right).$$

Alors, on obtient

$$\begin{cases} b\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ \sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases},$$

ce qui implique

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions proposer sont :

$$S_n(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta.$$

L'équation de P_1 prend la forme

$$\rho^2\varrho'' + \rho\varrho' - n^2\varrho = 0.$$

L'équation de type Cauchy-Euler dont des solutions particulière du type $(\rho \mapsto \rho^\alpha)$ s'écrit comme suit :

$$\varrho(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n},$$

Car l'équation caractéristique est donnée par :

$$m^2 - n^2 = 0.$$

ce qui donne deux racines distinctes $m = \pm n$.
Ensuite, l'existence de $\varrho(0)$ entaine que

$$D_n = 0, \ (\lim_{\rho\to 0}|\varrho(\rho)| < \infty.$$

Alors, on trouve que

$$\varrho_n(\rho) = C_n\rho^n.$$

Finalement, on a le système de solutions suivants

$$\begin{cases} S_n(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta \\ S_n(\rho) = C_n\rho^n \end{cases},$$

Finalement une solution possible est

$$u(\rho,\theta) = \rho^n[\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta].$$

D'après le principe de superposition, on trouve :

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \sum_{n\geq 0}\varrho_n(\rho)S_n(\rho) \\ &= \sum_{n\geq 0}\rho^n[\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta]. \end{aligned}$$

De part ; l'utilisation du condition $u(R,\theta) = f(\theta)$; donne :

$$\begin{aligned} u(R,\theta) &= \sum_{n\geq 0} R^n[\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta] \\ &= \alpha_0 + \sum_{n\geq 1} R^n[\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta]. \end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$f(\theta) = \widetilde{A}_0 + \sum_{n\geq 1}[\widetilde{A}_n \cos n\theta + \widetilde{B}_n \sin n\theta]$$

où les $\widetilde{A}_n$ et $\widetilde{B}_n$ sont les coéfficients de Fourier de f données comme suit :

$$\begin{cases} \widetilde{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta \\ \widetilde{A}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ n = 1,2,... \\ \widetilde{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,\ n = 1,2,... \end{cases}.$$

Donc la solutions finale est donnée comme suit :

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{n\geq 1}\rho^n[A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta], \tag{4.11}$$

où

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta \\ A_n = \dfrac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ n = 1,2,... \\ B_n = \dfrac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,\ n = 1,2,... \end{cases}.$$

On peut toujours exprimer u comme une intégrale. En effet :

$$\rho^n A_n \cos n\theta = \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n\theta \cos n\xi d\xi, \quad \forall n \geqslant 1$$

$$\rho^n B_n \sin n\theta = \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin n\theta \sin n\xi d\xi, \quad \forall n \geqslant 1$$

il rèsulte :

$$\begin{aligned} &\rho^n[A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] \\ = &\frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)[\cos n\theta \cos n\xi + \sin n\theta \sin n\xi]d\xi \\ = &\frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n(\theta-\xi))d\xi, \end{aligned}$$

la solution (4.11) devient :

$$\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= A_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\rho^n}{R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n(\theta-\xi))d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\rho^n}{R^n}\cos(n(\theta-\xi))\right)d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\left\{\frac{\rho^n}{R^n}e^{(n(\theta-\xi))}\right\}d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\xi)}\right)^n\right\}d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\xi)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\xi)}}\right\}d\xi,
\end{aligned}$$

Car :

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{x}{1-x} \text{ pour } |x|<1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& u(\rho,\theta) \\
1 &= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\rho[\cos(\theta-\xi)+i\sin n(\theta-\xi)]}{R-\rho[\cos(\theta-\xi)+i\sin n(\theta-\xi)]}\right\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\frac{R\rho\cos(\theta-\xi)-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\xi)+\rho^2}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\frac{R\rho\cos(\theta-\xi)-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\xi)+\rho^2}\right\}d\xi.
\end{aligned}$$

Finallement, on trouve que

$$u(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho,\theta-\xi)f(\xi)d\xi,$$

avec

$$K(\rho,\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2\cos\omega-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos\omega+\rho^2}.$$

Cette expréssion appelée le noyeau de poisson.

Exemple 4.2 *Soit*

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}, \\
\Omega &= \{(\rho,\theta) : 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}.
\end{aligned}$$

Résoudre le problème de Diriclet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{sur} \quad \Omega \\ u(1,\theta) = g(\theta) & \textit{pour} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases},$$

Solution 4.2 *On peut résoudre le problème par la même méthode précédente par mettre R=1. Mais ici on utilise la même méthode de séparation de variables avec un petit changement dans la résolution du problème.*
Donc ; le problème en coordonnées polaire donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 & \textit{sur} \quad \Omega \\ u(1,\theta) = g(\theta) & \textit{pour} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases},$$

l'équation de Laplace sera

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0.$$

Soit le changement de variable : $\rho = e^{-t}$, *alors, on a*

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = u_\rho \rho_t = -e^{-t}u_\rho,$$

puis, on a

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (-e^{-t}u_\rho)_t = e^{-t}u_\rho + e^{-2t}u_{\rho\rho} \\ u_{tt} &= \rho u_\rho + \rho^2 u_{\rho\rho}. \end{aligned}$$

Donc on a l'équation elliptique :

$$u_{tt} + u_{\theta\theta} = 0,$$

Soit

$$u(t,\theta) = T(t)\phi(t),$$

alors

$$\frac{T''}{T} = -\frac{\phi''}{\phi} = \lambda,$$

de

$$\phi''(\theta) + \lambda\phi(\theta) = 0,$$

on a

$$\phi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

telle que

$$\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N},$$

de cette valeur de λ_n; *on résoudre*

$$T''(t) - n^2 T(t) = 0.$$

Si

$$n = 0,\ T_0(t) = C_0 t + d_0,$$

alors

$$T_0(\rho) = -C_0 \ln \rho + d_0.$$

Et si

$$n \neq 0,\ T_n(t) = C_n e^{nt} + d_n e^{-nt},$$

alors

$$T_n(\rho) = C_n \rho^{-n} + d_n \rho^n.$$

Donc on trouve :

$$\begin{aligned} u_0(\rho,\theta) &= T_0 \cdot \phi_0 = (-C_0 \ln \rho + d_0) a_0, \\ u_n(\rho,\theta) &= T_n \cdot \phi_n = (C_n \rho^{-n} + d_n \rho^n)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

mais que u est bornée lorsque $\rho \to 0$, donc

$$C_n = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned} u_0(\rho,\theta) &= d_0 a_0, \\ u_n(\rho,\theta) &= d_n \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

Par le principe du superposition, on obtient :

$$u(\rho,\theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{n\geq 1} \rho^n (\widetilde{a_n} \cos n\theta + \widetilde{b_n} \sin n\theta).$$

Ensuite ;

$$u(1,\theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{n\geq 1} (\widetilde{a_n} \cos n\theta + \widetilde{b_n} \sin n\theta) = g(\theta),$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta), \\ \widetilde{a_n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\ \cos n\theta d\theta, \\ \widetilde{b_n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\ \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

4.3 L'équation de Laplace dans les coordonnées cylindriques $(3D)$

Pour étudier le problème de Laplace dans une domaine de $\mathbb{R}^3$, il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques.
Alors, on a l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{4.12}$$

Si on postule une solution de la forme

$$u(\rho, \theta, z) = P(\rho)\phi(\theta)Z(z),$$

l'équation (4.12) devient :

$$P''\phi Z + \frac{1}{\rho}P'\phi Z + \frac{1}{\rho^2}P\phi'' Z + P\phi Z'' = 0. \tag{4.13}$$

En divisant par $P\phi Z$, il vient :

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\phi''}{\phi} + \frac{Z''}{Z} = 0, \tag{4.14}$$

puis, on peut écrire

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\phi''}{\phi} = -\frac{Z''}{Z}. \tag{4.15}$$

Puisque le membre droite ne dépend que de z; tandis que le membre gauche ne dépend que de ρ et θ. Il résulte que chacun des membres doit étre égale à une constante soit $-\lambda^2$, ce qui donne

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\phi''}{\phi} = -\lambda^2, \tag{4.16}$$

et

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0. \tag{4.17}$$

Multiplions (4.16) par ρ^2 on obtient

$$\rho^2\frac{P''}{P} + \rho\frac{P'}{P} + \frac{\phi''}{\phi} = -\lambda^2\rho^2, \tag{4.18}$$

qui peut étre écrit

$$\rho^2\frac{P''}{P} + \rho\frac{P'}{P} + \lambda^2\rho^2 = -\frac{\phi''}{\phi}. \tag{4.19}$$

Comme précédement les deux membres ne dépendant que d'une seul variable, ils doivent étre égaux à une constante disons N^2, ce qui donne

$$\rho^2 \frac{P''}{P} + \rho \frac{P'}{P} + \lambda^2 \rho^2 = N^2,$$

et

$$\phi'' + N^2 \phi = 0, \tag{4.20}$$

d'où

$$\rho^2 P'' + \rho P' + (\lambda^2 \rho^2 - N^2) P = 0, \tag{4.21}$$

qui est l'expression de l'équation de Bessel, où P remplace y, ρ remplace x et N remplace n, maintenant si on pose $\lambda \rho = x$ dans (4.21), il vient

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \mu^2) y = 0.$$

La solution général de (4.21) est de la forme :

$$P(\rho) = A_1 J_\mu(\lambda \rho) + B_1 Y_\mu(\lambda \rho).$$

$P(0) < \infty$ et $P(R) = 0$, et comme P est bornée à $\rho = 0$, alors $B_1 = 0$, ce qui donne

$$P(\rho) = A_1 J_\mu(\lambda \rho). \tag{4.22}$$

Pour montrer que $B_1 = 0$, on doit calculer $Y_\mu(0)$. On a

$$Y_\mu(x) = \lim_{\alpha \to \mu} \frac{\cos(\alpha \pi) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha \pi)}$$

donc

$$Y_\mu(0) = \lim_{\alpha \to \mu} \frac{\cos(\alpha \pi) J_\alpha(0) - J_{-\alpha}(0)}{\sin(\alpha \pi)},$$

et comme $J_\alpha(0) = 0$, on a

$$Y_\mu(0) = \frac{-J_{-\alpha}(0)}{\sin(\mu \pi)} \to \pm\infty.$$

La condition $P(R) = 0$ implique que $A_1 J_\mu(\lambda \rho) = 0$ et $\lambda = \lambda_{\mu k} = \frac{\alpha_{\mu k}}{R}$, $\forall k = 1, 2, \ldots$
Donc

$$P_{\mu k}(\rho) = A_1 J_\mu(\lambda_{\mu k} \rho).$$

Remarque 4.1 *Les $\alpha_{\mu k}$ sont les racines d'ordre k de J_μ.*

Ensuite ; on cherche les solutions de (4.20; où on a :

$$\begin{cases} \phi'' + \mu^2\phi = 0 \\ \phi(\pi) = \phi(-\pi) \\ \phi'(\pi) = \phi'(-\pi) \end{cases},$$

ce qui implique que

$$\phi(\theta) = A_2 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta, \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$$

Aussi, on résolut l'équation (4.17) avec la condition au limite suivante :

$$\begin{cases} Z'' + \lambda^2 Z = 0 \\ Z(0) = 0 \end{cases},$$

on obtient la solution sous la forme :

$$Z(z) = A_3 \sin k\lambda z. \tag{4.23}$$

Par le principe de superposition (sommant sur n et k à la fois), on trouve

$$\begin{aligned} & u(\rho, \theta, z) \\ = & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nk}\rho) \sin k\lambda_{nk} z (A_{nk} \cos n\theta + B_{nk} \sin n\theta), \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \right] \cos n\theta + \left[\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \right] \sin n\theta \right\} \sin k\lambda_{nk} z. \end{aligned} \tag{4.24}$$

La condition $u(\rho, \theta, L) = f(\rho, \theta)$ donne

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n\geq 0} C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta, \tag{4.25}$$

où

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k\geq 1} A_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \sin k\lambda_{nk} L, \\ D_n &= \sum_{k\geq 1} B_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \sin k\lambda_{nk} L. \end{aligned}$$

On remarque que (4.24) est une série de Fourier, donc il vient

$$\begin{aligned} C_n &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \theta) d\theta, & n = 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \theta) \cos n\theta d\theta, & n = 1, 2, 3, ... \end{cases}, \\ D_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \theta) \sin n\theta d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du developpement en série de Bessel.

Théorème 4.1 *Si f et f' sont continues par morceaux dans l'intervalle $[0, R]$, il existe un développement en série de Bessel de la forme*

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} A_k J_n(\lambda_{nk} x),$$

telle que

$$\lambda_{nk} = \frac{\alpha_{nk}}{R},$$

où λ_{n1}, λ_{n2}, λ_{n3}, ... sont les racines positives de la fonction de Bessel J_n et

$$A_k = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nk})} \int_0^R f(x) J_n(\lambda_{nk} x) x dx.$$

A_k est appelés les coéfficients de Bessel de la fonction $f(x)$, donc on obtient

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nk}) \sin k(\lambda_{nk} L)} \int_0^R C_n J_n(\lambda_{nk}\rho)\rho f(\rho, \theta) d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nk}) \sin k(\lambda_{nk} L)} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \rho f(\rho, \theta) J_n(\lambda_{nk}\rho) \cos n\theta d\theta d\rho, & n \geq 1 \\ \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nk}) \sin k(\lambda_{nk} L)} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \rho f(\rho, \theta) J_n(\lambda_{nk}\rho) d\theta d\rho & n = 0 \end{cases}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

où

$$B_{nk} = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{nk}) \sin k(\lambda_{nk} L)} \int_0^R D_n J_n(\lambda_{nk}\rho)\rho d\rho. \tag{4.27}$$

A partir de (4.26) et (4.27) nous obtenons la solution de (4.24).

Chapitre 5

Problèmes hyperboliques

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'équation d'onde unidimensionnelle sur la ligne réelle. La forme canonique de l'équation d'onde sera utilisée pour montrer que le problème de Cauchy est bien posé. De plus, nous allons tirer des formules simples explicites pour les solutions de plusieires problèmes aux limites . Aussi, on discute également certaines propriétés importantes des solutions de l'équation des ondes qui sont typiques des problèmes hyperboliques plus généraux.

5.2 Résolution des problèmes hyperboliques par la méthode de D'Alembert

5.2.1 Forme canonique et solution générale

L'équation d'onde homogène en dimension 1 (spatiale) a la forme

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \ -\infty \leq a < x < b \leq \infty, \ t > 0, \tag{5.1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est appelée la vitesse d'onde, pour obtenir la forme canonique de l'équation d'onde, on définit les nouvelles variables

$$\xi = x + ct, \ \eta = x - ct,$$

et on pose $\omega(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ donc on obtient

$$\begin{aligned} u_t &= \omega_\xi \xi_t + \omega_\eta \eta_t \\ &= c(\omega_\xi - \omega_\eta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_x &= \omega_\xi \xi_x + \omega_\eta \eta_x \\ &= \omega_\xi + \omega_\eta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2(\omega_{\xi\xi} - 2\omega_{\xi\eta} + \omega_{\eta\eta}), \\ u_{xx} &= \omega_{\xi\xi} + 2\omega_{\xi\eta} + \omega_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= -4c^2 \omega_{\xi\eta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est la forme canonique de l'équation d'onde. Puisque

$$(\omega_\xi)_\eta = 0,$$

il s'ensuit que

$$\omega_\xi = f(\xi),$$

et alors

$$\omega = \int f(\xi) d\xi + G(\eta).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $\omega_{\xi\eta} = 0$ a la forme suivante

$$\omega(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

où $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ sont deux fonctions arbitraires. Ainsi, dans les variables de l'origine, la solution générale de l'équation d'onde est

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \tag{5.2}$$

Autrement dit, si u est une solution de l'équation d'onde unidimensionnelle, il existe deux fonctions réelles $F, G \in C^2$ tel que (5.2) est vérifiée.
Pour un $t_0 > 0$ fixé, le graphe de la fonction $G(x - ct_0)$ a la même forme que le grape de la fonction $G(x)$, sauf qu'il est décalé vers la droite d'une distance ct_0. Par conséquent, la fonction $G(x - ct)$ représente une onde se déplaçant vers la droite avec la vitesse c, et cela s'appelle une onde en avant. La fonction $F(x - ct)$ est une onde se déplaçant vers la gauche à la même vitesse, on l'appelle une onde en arrière. En effet c peut être appelé la vitesse des ondes.

L'équation (5.2) démontre que toute solution de l'équation d'onde est la somme de deux ondes progressives. Cette observation nous permettra d'obtenir des représentations graphiques des solutions (la méthode graphique).
Discutons plus en détail de la solution générale (5.2). Considérons le plan (x, t). Les deux familles de droites suivantes

$$\begin{aligned} x - ct &= \text{constant}, \\ x + ct &= \text{constant}, \end{aligned}$$

sont appelés les caractéristiques de l'équation d'onde.
On arrive maintenant à l'une des propriétés les plus importantes des caractéristiques.
Supposons que pour un temp fixé t_0, la solution u est une fonction suffisamment régulière sauf en un point (x_0, t_0). Clairement, soit F n'est pas régulière à $x_0 + ct_0$, et / ou la fonction G n'est pas régulière à $x_0 - ct_0$. Il y a deux caractéristiques qui passent par le point (x_0, t_0), ces sont les droites

$$\begin{aligned} x - ct &= x_0 - ct_0, \\ x + ct &= x_0 + ct_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout temp $t_1 \neq t_0$ la solution u est suffisamment régulière sauf en un point $x_{\pm}$ qui satisfait

$$\begin{aligned} x_- - ct_1 &= x_0 - ct_0, \\ x_+ + ct_1 &= x_0 - ct_0. \end{aligned}$$

5.2.2 Le problème de Cauchy homogène et la formule de d'Alembert

Le problème de Cauchy pour l'équation d'onde homogène unidimensionnelle est donné par

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \tag{5.3}$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.4}$$
$$u_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.5}$$

Une solution à ce problème peut être interprétée comme l'amplitude d'une onde sonore se propageant dans un tuyau très long et étroit, qui en pratique peut être considéré comme un milieu infini à une dimension. Ce système représente également la vibration d'une corde infinie. Les conditions initiales f et g sont des fonctions donnés qui représentent l'amplitude u, et la vitesse u_t d'une corde en temp $t = 0$.

Une solution classique du problème de Cauchy $(5.3) - (5.5)$ est une fonction u qui est deux fois différentiable pour tous $t > 0$, telle que u et u_t sont continues dans le demi-espace $t \geq 0$, et tels que $(5.3) - (5.5)$ sont satisfaits. De manière générale, **les solutions classiques** doivent avoir des propriétés de régularités minimales afin de satisfaire toutes les conditions données au sens classique.

Rappelons que la solution générale de l'équation d'onde est de la forme

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \tag{5.6}$$

Notre objectif est de trouver F et G telle que les conditions initiales (5.4) et (5.5) sont satisfaites. En remplaçant $t = 0$ dans (5.6), on obtient

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x). \tag{5.7}$$

Différencier (5.6) par rapport à t et en remplaçant par $t = 0$, on trouve

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x). \tag{5.8}$$

L'intégration de (5.8) sur $[0, x]$ donne

$$F(x) + G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + C, \tag{5.9}$$

où $C = F(0) - G(0)$.

Les équations (5.7) et (5.9) donnent les solutions suivates :

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + \frac{C}{2}, \tag{5.10}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - \frac{C}{2}. \tag{5.11}$$

Par substituant ces expressions de F et G dans la solution générale (5.6), on obtient la formule

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, \tag{5.12}$$

qui s'appelle **la formule de d'Alembert**.

Notez que parfois $(5.10)-(5.11)$ sont également utiles, car ils nous donnent des formules explicites pour les ondes en avant et en arrière.

Les exemples suivants illustrent l'utilisation de la formule de d'Alembert.

Exemple 5.1 (Exercice d'illustration) *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} u_{tt}+u_{xx} &= 0; \qquad -\infty<x<+\infty,\ t>0, \\ u(x,0) &= f(x)=\begin{cases} 0 & -\infty<x<-1, \\ x+1 & -1\le x\le 0, \\ 1-x & 0\le x\le 1, \\ 0 & 1<x<\infty, \end{cases}, \\ u_t(x,0) &= g(x)=\begin{cases} 0 & -\infty<x<-1 \\ 1 & -1\le x\le 1 \\ 0 & 1<x<\infty \end{cases}. \end{aligned}$$

1. *Evaluer u au point $(1,\frac{1}{2})$.*
2. *Discuter la régalutitée de la solution u.*

1. En utilisant la formule de d'Alembert, on trouve que

$$u(1,\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{3}{2})+f(\frac{1}{2})}{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(s)ds.$$

Puisque $\frac{3}{2}>1$ il s'ensuit que $f(\frac{3}{2})=0$. D'autre part, $0\le\frac{1}{2}\le 1$, donc $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, évidemment,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(s)ds=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1ds=\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$u(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

2. La solution n'est pas classique, puisque $u\notin C^1$. Mais la fonction u est une solution généralisée du problème. Noter que même si g ne soit pas continu, cependant la solution u est une fonction continue. Les singularités de la solution se propagent le long de caractéristiques qui intersectent avec la ligne initiale $t=0$ aux singularités des conditions initiales. Il ya ce sont exactement les caractéristiques (les droites) $x\pm t=-1,0,1$. Par conséquent, la solution est régulière dans un voisinage du point $(1,\frac{1}{2})$ qui ne coupe pas ces caractéristiques.

Exemple 5.2 *Soit $u(x,t)$ la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} u_{tt}-9u_{xx} &= 0 \qquad -\infty<x<\infty, t>0, \\ u(x,0) &= f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 2 \\ 0 & |x|>2 \end{cases}, \\ u_t(x,0) &= g(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 2 \\ 0 & |x|>2 \end{cases}. \end{aligned}$$

(a) *Trouver* $u(\frac{1}{6})$.

(b) *Discuter le comportement en temps long de la solution.*

(c) *Trouver la valeur maximale de* $u(x,t)$, *et les points où ce maximum est atteint.*

(d) *Trouvez tous les points où* $u \in C^2$.

(a) Puisque

$$u(x,t) = \frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)ds,$$

il s'ensuit que pour $x = 0$ et $t = \frac{1}{6}$, on a

$$\begin{aligned} u(0, \frac{1}{6}) &= \frac{f(\frac{1}{2}) + f(\frac{-1}{2})}{2} + \frac{1}{6}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)ds \\ &= \frac{1+1}{2} + \frac{1}{6}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1ds \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

(b) Fixer $\xi \in \mathbb{R}$ et calculer $\lim_{t\to\infty} u(\xi,t)$. Clairement,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} f(\xi, 3t) &= 0, \ \lim_{t\to\infty} f(\xi - 3t) = 0, \\ \lim_{t\to\infty} \int_{\xi-3t}^{\xi+3t} g(s)ds &= \int_{-2}^{2} 1ds = 4. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to\infty} u(\xi,t) = \frac{2}{3}.$$

(c) Rappelons que pour toutes les fonctions réelles f, g,

$$\max\{f(x)+g(x)\} \le \max f(x) + \max g(x).$$

Il se trouve que dans notre cas particulier, il existe un point (x,t), où tous les termes de (5.11) atteignent leur valeur maximale simultanément, et donc à un tel point, le maximum de u est atteint.

Effectivement,

$$\max\{f(x+3t)\} = 1,$$

qui est atteint sur la bande

$$-2 \le x + 3t \le 2.$$

De même,

$$\max\{f(x-3t)\} = 1,$$

qui est atteint sur la bande

$$-2 \leq x - 3t \leq 2.$$

Tandis que

$$\max\left\{\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)ds\right\} = \int_{-2}^{2} 1ds = 4,$$

et il est atteint à l'intersection des demi-plans $x + 3t \geq 2$ et $x - 3t \geq 2$. L'intersection de tous ces ensembles est l'ensemble de tous les points qui satisfait les deux équations

$$\begin{aligned} x + 3t &= 2, \\ x - 3t &= -2. \end{aligned}$$

Ce système a une solution unique à $(x, t) = (0, \frac{2}{3})$. Ainsi, la solution u atteint son maximum au point $(0, \frac{2}{3})$, où $u(0, \frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$.
(d) Les conditions initiales sont régulières sauf aux points $x = \pm 2$. Par conséquent, la solution est régulière à tous les points qui ne sont pas sur les droites

$$x \pm 3t = -2, \quad x \pm 3t = 2$$

La fonction u est une solution généralisée continue par morceaux pour un temps fixe $t > 0$.
Le problème de Cauchy est bien posé découle de la formule de d'Alembert.

Théorème 5.1 *Fixer $T > 0$. Le problème de Cauchy $(5.3) - (5.5)$ dans le domaine $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$ est bien posé pour $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. L'existence et l'unicité découlent directement de la formule de D'Alembert. En effet, cette formule nous fournit une solution, et nous avons montré que toute solution du problème de Cauchy est nécessairement égale à la solution de d'Alembert. Notez que de les hypothèses de régularités $(f \in C^2(\mathbb{R}),\ g \in C^1(\mathbb{R}))$, il s'ensuit que

$$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)),$$

et par conséquent, la solution de D'Alembert est une solution classique. Par contre, pour $f \in C(\mathbb{R})$ et que g est localement intégrable, la solution de D'Alembert est une solution généralisée.
Il reste à prouver la stabilité du problème de Cauchy, c'est-à-dire que nous devons montrer qu'un petit changement dans les conditions initiales entraînent un petit changement dans la solution. Soient u_i, $i = 1, 2$ deux solutions du problème de Cauchy avec les conditions initiales f_i , g_i, $i = 1, 2$. Maintenant si

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \delta \text{ et } |g_1(x) - g_2(x)| < \delta,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned}
& |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \\
\leq \;& \frac{|f_1(x+ct) - f_2(x+ct)|}{2} + \frac{|f_1(x-ct) - f_2(x-ct)|}{2} \\
& + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(s) - g_2(s)|\, ds \\
< \;& \frac{1}{2}(\delta + \delta) + \frac{1}{2c} 2ct\delta \\
\leq \;& (1+T)\delta.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta < \dfrac{\varepsilon}{(1+T)}$. Ensuite, pour tous $x \in \mathbb{R}$ and $0 \leq t \leq T$, on obtient

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon.$$

Remarque 5.1 *Le problème de Cauchy est mal posé sur le domaine* $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$.

■

5.2.3 Le problème de Cauchy pour l'équation d'onde non homogène

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= F(x,t), \qquad -\infty < x < \infty,\; t > 0 &\quad (5.13)\\
u(x,0) &= f(x),\; u_t(x,0) = g(x). \; -\infty < x < \infty &\quad (5.14)
\end{aligned}$$

Ce problème modélise, par exemple, la vibration d'une très longue chaîne en présence d'une force externe F.

Proposition 5.1 *Le problème de Cauchy* $(5.13)-(5.14)$ *admet au plus une solution.*

Preuve. Supposons que u_1 et u_2 sont des solutions du problème $(5.13)-(5.14)$. Il faut prouver que $u_1 = u_2$. La fonction $u = u_1 - u_2$ est une solution du problème homogène

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty,\; t > 0 &\quad (5.15)\\
u(x,0) &= 0,\; u_t(x,0) = 0. \; -\infty < x < \infty &\quad (5.16)
\end{aligned}$$

D'autre part, $v(x,t) = 0$ est également une solution du même problème (homogène). Par le théorème 5.1, $u = v = 0$, par conséquent, $u_1 = u_2$.
Ensuite, en utilisant une formule explicite, on prouve, comme dans le cas homogène, l'existence d'une solution du problème de Cauchy $(5.13)-(5.14)$.

A cet effet, rappeler la formule de Green pour une paire de fonctions P, Q dans le domaine Ω avec une frontière régulière Γ :

$$\int\int_{\Omega}[Q(x,t)_x - P(x,t)_t]dxdt = \oint_{\Gamma}[P(x,t)dx - Q(x,t)dt].$$

Soit $u(x,t)$ une solution du problème $(5.13) - (5.14)$. Intégrer les deux côtés de l'EDP (5.13) sur un triangle caractéristique Δ avec un sommet supérieur fixe (x_0, t_0). Les trois arêtes de ce triangle (base, arêtes droite et gauche) seront désignées par B, R, L,respectivement On a

$$-\int\int_{\Delta} F(x,t)dxdt = \int\int_{\Delta}(c^2u_{xx} - u_{tt})dxdt.$$

En utilisant la formule de Green avec $Q = c^2u_x$ et $P = u_t$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\int\int_{\Delta} F(x,t)dxdt \\ = & \oint_{\Gamma}(u_t dx - c^2u_x dt) \\ = & \int_B + \int_R + \int_L (u_t dx + c^2u_x dt). \end{aligned}$$

Sur la base B on a $dt = 0$, donc, en utilisant les conditions initiales, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_B (u_t dx + c^2u_x dt) \\ = & \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)dx \\ = & \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx. \end{aligned}$$

Sur le bord droit **R,** $x + ct = x_0 + ct_0$, et $dx = -cdt$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int_R (u_t dx + c^2u_x dt) \\ = & -c\int_R (u_t dt + u_x dx) = -c\int_R du \\ = & -c[u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] \\ = & -c[u(x_0,t_0) - f(x_0 + ct_0)]. \end{aligned}$$

De même, sur le bord gauche $\mathbf{L}$, $x - ct = x_0 - ct_0$, impliquant $dx = cdt$, et

$$\begin{aligned} & \int_L (u_t dx + c^2u_x dt) \\ = & c\int_L (u_t dt + u_x dx) = c\int_L du \\ = & c[u(x_0 - ct_0, 0) - u(x_0, t_0)] \\ = & c[f(x - ct_0) - u(x_0, t_0)]. \end{aligned}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&-\int\int_{\Delta} F(x,t)dxdt \\
&= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx + c[f(x_0-ct_0)+f(x_0+ct_0)-2u(x_0,t_0)].
\end{aligned}
$$

Résoudre pour u donne

$$
\begin{aligned}
& u(x_0,t_0) \\
= & \frac{f(x_0-ct_0)+f(x_0+ct_0)}{2} \\
& +\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx + \frac{1}{2c}\int\int_{\Delta} F(x,t)dxdt.
\end{aligned}
$$

Nous obtenons finalement une formule explicite pour la solution en un point arbitraire (x,t) :

$$
\begin{aligned}
& u(x,t) \\
= & \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} \\
& +\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int\int_{\Delta} F(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

Cette formule s'appelle également **la formule de d'Alembert.**
Il reste à prouver que la fonction u dans (5.17) est en effet une solution du problème de Cauchy. Du principe de superposition, il en résulte que u dans (5.17) est la solution souhaitée, si et seulement si la fonction

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2c}\int\int_{\Delta} F(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&= \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau,
\end{aligned}
$$

est une solution du problème de Cauchy

$$
u_{tt}-c^2u_{xx} = F(x,t), \qquad -\infty<x<\infty,\ t>0 \tag{5.18}
$$

$$
u(x,0) = 0,\ u_t(x,0)=0. \quad -\infty<x<\infty \tag{5.19}
$$

Nous allons prouver que v est une solution du problème de valeur initiale $(5.18)-(5.19)$ en supposant que F et F_x sont continus. Clairement

$$
v(x,0)=0.
$$

Pour prendre des dérivés, on utilise la formule

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} G(\xi,t)d\xi \\
&= G(b(t),t)b'(t) - G(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(\xi,t)d\xi.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&v_t(x,t) \\
&= \frac{1}{2c}\int_x^x F(\xi,t)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) + F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) + F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$v_t(x,0) = 0.$$

En prenant la dérivée seconde par rapport à t, on a

$$\begin{aligned}
&v_{tt}(x,t) \\
&= F(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^t [F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
v_x(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) - F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau, \\
v_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_0^t [F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau.
\end{aligned}$$

Donc, $v(x,t)$ est une solution de l'équation d'onde non homogène (5.18), et les conditions initiales homogènes (5.19) sont satisfait. Notez que toutes les différenciations ci-dessus sont justifiées à condition que F, $F_x \in C(\mathbb{R}^2)$. ■

Remarque 5.2 (1) *Notez que pour $F = 0$ les deux formules de d'Alembert coïncident, et en réalité, nous avons obtenu une autre preuve de la formule d'Alembert* (5.12).
(2) *La valeur de u en un point (x_0, t_0) est déterminé par les valeurs des données, données sur tout le triangle caractéristique dont le sommet supérieur et le point (x_0, t_0). C'est le domaine de dépendance du problème non homogène de Cauchy.*

Théorème 5.2 *Fixer $T > 0$. Le problème de Cauchy $(5.13) - (5.14)$ dans le domaine $-\infty < x < \infty$, $0 \le t \le T$ est bien posé pour F, $F_x \in C(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. Rappelons que le caractère unique a déjà été prouvé et que l'existence découle de la formule de d'Alembert. Il reste à prouver la stabilité, c'est-à-dire qu'il nous faut montrer que de petits changements dans les conditions initiales et la force externe entraînent un petit changement dans la solution. Pour $i = 1, 2$, soit u_i être la solution du problème de Cauchy avec la fonction correspondante F_i, et les conditions initiales f_i, g_i. Maintenant si

$$\begin{aligned} |F_1(x,t) - F_2(x,t)| &< \delta, \\ |f_1(x) - f_2(x)| &< \delta, \\ |g_1(x) - g_2(x)| &< \delta, \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} & |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \\ \leq\ & \frac{f_1(x+ct) - f_2(x+ct)}{2} \\ & + \frac{f(x-ct) - f(x-ct)}{2} \\ & + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(s) - g_2(s)|\, ds \\ & + \frac{1}{2c} \int\int_{\Delta} |F_1(\xi,\tau) - F_2(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau \\ <\ & \frac{1}{2}(\delta + \delta) + \frac{1}{2c} 2ct\delta + \frac{1}{2c} ct^2\delta \\ \leq\ & (1 + T + \frac{T^2}{2})\delta. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour une donnée $\varepsilon > 0$, nous choisissons $\delta < \frac{\varepsilon}{(1+T+\frac{T^2}{2})}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t \leq T$, on a

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon.$$

Notez que δ ne dépend pas de la vitesse des vagues c. ■

5.2.4 Résolution du problème d'équations d'ondes avec des conditions aux limites

Maintenant on va résoudre le problème de Cauchy avec des conditions aux limites, mais en demi-plan $[0, +\infty[$.

Problème de Dirichlet homogène

Le problème de Dirichlet au valeur limite homogène s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = 0 & 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) & = \varphi(x) & \forall\, x > 0, \\ u_t(x,0) & = \Psi(x) & \forall\, x > 0, \\ u(0,t) & = 0 & t \geq 1, \end{cases}$$

La solution est donnée par modifier la formule de D'Alembert
On a que dans l'étude précedentes, la solution est donnée par :

$$u(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct), \tag{5.20}$$

Où

$$\begin{aligned} C(X) &= \frac{1}{2}\varphi(X) + \frac{1}{2c}\int_{X_0}^{X} \Psi(\xi) d\xi, \\ D(X) &= \frac{1}{2}\varphi(X) - \frac{1}{2c}\int_{X_0}^{X} \Psi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

alors si $t > 0, x > 0$, il faut trouver les valeurs de $D(x-ct)$ pour tous les valeurs $-\infty < x - ct < +\infty$, et $C(x+ct)$ aussi, malheureusement $D(x-ct)$ existe si $x - ct > 0$, c'est-à-dire $x > ct$.
Mais la question c'est : si $x < ct$ que faisons nous ? ici on applique la condition au bord $u(0,t) = 0$ pour trouver $D(x-ct)$. Alors, on remplaçe $u(0,t)$ dans la solution générale (5.20), on obtient

$$\begin{aligned} u(0,t) &= C(ct) + D(-ct) \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$D(-ct) = -C(ct).$$

On pose

$$-ct = z,$$

alors

$$D(z) = -C(-z),$$

si

$$z = x - ct,$$

on obtient

$$D(x-ct) = -C(ct-x),$$

et

$$D(x-ct) = -\frac{1}{2}\varphi(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{ct-x} \Psi(\xi)d\xi.$$

Alor la solution est

$$\begin{aligned} & u(x,t) \\ = \; & C(x+ct) + D(x-ct) \\ = \; & \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\varphi(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{ct-x} \Psi(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi, \; x < ct.$$

Alors la solution générale est donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi & x > ct. \\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi & x < ct. \end{cases}$$

Problème de Dirichlet non-homogène

Soit le problème d'equation d'onde avec une condition au limite de Dirichlet non-homogène :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = 0 & 0 < x < +\infty \,, t > 0, \\ u(x,0) & = \varphi(x) & 0 > x, \\ u_t(x,0) & = \Psi(x) & 0 > x, \\ u(0,t) & = P(t) & t \geq 0, \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} C(X) &= \frac{1}{2}\varphi(X) + \frac{1}{2c}\int_{X_0}^{X} \Psi(\xi)d\xi, \\ D(X) &= \frac{1}{2}\varphi(X) - \frac{1}{2c}\int_{X_0}^{X} \Psi(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

et

$$u(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct).$$

Si $x - ct \geq 0$, alors $x \geq ct$ et donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+ct\right) + \varphi\left(x-ct\right)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi.$$

Si $x - ct \leq 0$, alors $x \leq ct$, dans ce cas on va chercher la valeur de $D(x-ct)$ où on a besoin d'utiliser la condition initiale :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= C(ct) + D(-ct) \\ &= p(t), \end{aligned}$$

on pose

$$-ct = z < 0,$$

on a donc

$$C(-z) + D(z) = p(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} D(z) &= p(t) - C(-z) \\ &= p(\frac{-z}{c}) - C(-z), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} D(x-ct) &= p(\frac{ct-x}{c}) - C(ct-x) \\ &= -\frac{1}{2}\varphi\left(ct-x\right) - \frac{1}{2c}\int\limits_{x_0}^{ct-x} \Psi(\xi)d\xi + p(\frac{ct-x}{c}). \end{aligned}$$

alors la solution générale est donée par

$$\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+ct\right) - \varphi\left(ct-x\right)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{x+ct} \Psi(\xi)d\xi + p(\frac{ct-x}{c}).$$

Problème de Neumann non-homogène

Soit le problème d'equation d'onde avec une condition au limite de Neumann non-homogène :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < +\infty\ , t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad 0 > x, \\ u_t(x,0) &= \Psi(x) \qquad 0 > x, \\ u_x(0,t) &= q(t) \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

Pur résoudre ce problème, on detingue 2 cas :

1) Si $x \leq ct$: On a

$$u(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct),$$

tout d'abord, on va déterminer $D(x-ct)$ en utilisant la condition de Neumann, on a

$$u_x(x,t) = C_x(x+ct) + D_x(x-ct),$$

d'où

$$q(t) = C_x(ct) + D_x(-ct),$$

on pose

$$z = -ct,$$

il vient alors

$$\begin{aligned} D_x(z) &= q(t) - C_x(-z) \\ &= q(\frac{-z}{c}) - C_x(-z), \end{aligned}$$

et soit $h = z$, on obtient alors

$$\int_0^z D_x(h)dh = \int_0^z q(\frac{-h}{c})dh - \int_0^z C_x(-h)dh,$$

d'où

$$D(z) - D(0) = \int_0^z q(\frac{-h}{c})dh - \int_0^z C_x(-h)dh.$$

Posons

$$\begin{aligned} y &= \frac{-h}{c}, \\ h &= k, \end{aligned}$$

on obtient

$$D(z) - D(0) = \int_0^{-z} C_x(k)dk - c\int_0^{-\frac{z}{c}} q(y)dy,$$

donc

$$\begin{cases} D(z) = \frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2c}\int_0^{-z}\Psi(\xi)d\xi - C(0) - c\int_0^{-\frac{z}{c}} q(y)dy + D(0) & \forall z < 0, \\ D(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2c}\int_0^{z}\Psi(\xi)d\xi - c\int_0^{-\frac{z}{c}} q(y)dy & \forall z > 0, \end{cases} \tag{5.21}$$

D'autre part, comme D est continue, alors

$$\lim_{z\longrightarrow 0^+} D(z) = \lim_{z\longrightarrow 0^-} D(z),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\varphi(0) - C(0) + D(0) = \frac{1}{2}\varphi(0),$$

ce qui donne

$$C(0) = D(0). \tag{5.22}$$

En remplaçant (5.22) dans (5.21), il vient

$$D(z) = \frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2c}\int_0^{-z}\Psi(\xi)d\xi - c\int_0^{-\frac{z}{c}} q(y)dy.$$

Alors

$$\begin{aligned} & u(x,t) \\ = & \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(ct-x)\right] \\ & + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\Psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x}\Psi(\xi)d\xi - c\int_0^{\frac{ct-x}{c}} q(y)dy. \end{aligned}$$

2) Si $x \geq ct$, la solutin est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(\xi)d\xi.$$

5.3 Résolution d'un problème hyperbolique non homogène par la méthode de séparation des variables

Il est possible de mettre à niveau la méthode de séparation des variables en méthode de résolution d'EDPs non homogènes. Cette technique s'appelle aussi la méthode des série des fonctions propres. Par exemple, considérons le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} & = \cos 2\pi x \cos 2\pi t & & 0 < x < 1, t > 1, \\ u_x(0,t) & = u_x(1,t) & = 0 & t \geq 1, \\ u(x,0) & f(x) & = \cos^2 \pi x & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) & g(x) & = 2\cos 2\pi x & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{5.23}$$

Dans la section précédente, nous avons trouvé le système de toutes les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes du problème homogène. Elles sont

$$X_n(x) = \cos n\pi x, \quad \lambda_n = (n\pi)^2 \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Rappelez l'affirmation de Fourier. selon laquelle toute fonction raisonnable satisfaisant les conditions aux limites peut être développée de manière unique en séries de Fourier (généralisées) en ce qui concerne le système des fonctions propres du problème. Puisque la solution $u(x,t)$ du problème (5.23) est une fonction double différentiable satisfaisant les conditions aux limites, il en résulte que pour un t fixe, la solution u peut être représentée par

$$u(x,t) = \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos n\pi x, \tag{5.24}$$

où $T_n(t)$ sont les coefficients de Fourier (dépendant du temps) de la fonction $u(.,t)$. Il faut donc trouver ces coefficients.

Substituant (5.24) à l'équation d'onde (5.23) et de différencier la série terme à terme implique que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'' + n^2\pi^2 T_n\right)\cos n\pi x \\ = \; & \cos n\pi t \cos 2\pi x. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Notez que dans l'exemple actuel, le côté droit de l'équation est déjà donné sous la forme d'une série de Fourier. Le caractère unique de l'extension de Fourier implique que les coefficients de Fourier de la série du côté gauche de (5.25) sont égaux aux coefficients de Fourier de la série du côté droit. En particulier, pour $n = 0$ on obtient l'EDO :

$$T_0'' = 0, \tag{5.26}$$

dont la solution générale est

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

De même nous obtenons pour $n = 2$

$$T_2'' + 4\pi^2 T_2 = \cos 2\pi t. \tag{5.27}$$

La solution générale de cette EDO de second ordre linéaire non homogène est la suivante :

$$T_2(t) = A_2\cos 2\pi t + B_2 \sin 2\pi t + \frac{t}{4\pi}\sin 2\pi t.$$

Pour $n \neq 0, 2$, on a

$$T_n'' + n^2\pi^2 T_n = 0, \quad \forall\, n \neq 0, 2. \tag{5.28}$$

La solution est

$$T_n(t) = A_2 \cos 2\pi t + B_n \sin 2\pi t + \frac{t}{4\pi} \sin 2\pi t, \quad \forall\, n \neq 0, 2. \tag{5.29}$$

Remplacer les solutions de (5.26), (5.27) et (5.28) par (5.24) implique que la solution du problème est de la forme

$$\frac{A_0 + B_0 t}{2} + \frac{t}{4\pi} \sin 2\pi t \cos 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \cos n\pi x. \tag{5.30}$$

Substituant (5.30) dans la première condition initiale (5.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x \\ &= \cos^2 \pi x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\pi x, \end{aligned}$$

donc,

$$A_0 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \ \ \forall\, n \neq 0, 2.$$

En différenciant (terme par terme) la solution u vis-à-vis de t et en substituant $u_t\,(x,0)$ à la deuxième condition initiale de (5.23), on trouve

$$\begin{aligned} & u_t\,(x,0) \\ =\ & \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \cos n\pi x \\ =\ & 2 \cos 2\pi x. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B_2 = \frac{1}{\pi}, \quad B_n = 0 \quad \forall\, n \neq 2.$$

finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi t + \frac{t+4}{4\pi} \sin 2\pi t \right) \cos 2\pi x.$$

Il est clair que cette solution est classique car la série de Fourier (généralisée) ne comporte qu'un nombre fini de termes lisses non nuls, de sorte que toutes les opérations formelles sont justifiées. Notez que l'amplitude de la corde vibrante croît linéairement dans t et qu'elle est non-bornée si $t \longrightarrow \infty$.

Bibliographie

[1] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein, An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.

[2] Nakhle H. Asmar, Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Fourier Series, 2nd Edition, University of Missouri, Columbia, 2004.

[3] Sandro Salsa, Gianmaria Verzini, Partial Differential Equations in Action : Complements and Exercises, Springer ; 2015.

[4] Stanley J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Courier Corporation, 1 janv. 1993 - 414 pages