Chapitre V : Résolution directe des systèmes d'équations linéaires

On rencontre souvent le problème de résolution des systèmes d'équations linéaires. Ces dernières sont présentes par exemple dans différentes méthodes de résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles. Ces dernières modélisent la majorité des phénomènes physiques tels que les transferts de chaleur et de masse, la mécanique des fluides, ….

On va traiter dans ce chapitre les systèmes d'équations linéaires dont le nombre d'équations est égal à ceux d'inconnues et dont le déterminant est non nul. C'est-à-dire les systèmes qui ont une solution unique. Un système d'équations linéaire de n équations avec n inconnues s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut être écrit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow AX = B$$

Ce système peut être résolu directement par différentes méthodes, on peut citer celle de Kramer (des déterminants) où celle d'élimination.

<u>Systèmes à matrices triangulaires</u>

Commençons par quelques définitions, on dit qu'un système UX=Y est à matrice triangulaire supérieure si $u_{ij} = 0$ pour $> j$, on écrit :

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad u_{33}x_3 + \cdots + u_{3n}x_n = y_3 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

La solution de ce système est calculée facilement par substitution en arrière. De l'équation n, on calcule $x_n = y_n/u_{nn}$

On remplace x_n dans l'équation n-1 pour calculer $x_{n-1} = (y_{n-1} - u_{n-1n}x_n)/u_{n-1n-1}$

Pour le calcul de x_i, les composantes $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{i+1}$ sont connues, on les remplace dans l'équation i, ce qui donne :

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j)/u_{ii} \quad i=n-1,\ n-2,\ldots,1.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments de la diagonale (du pivot) de cette matrice.

$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}$$

Exemple : Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous la forme matricielle.
2. Trouver la solution du système.
3. Calculer le déterminant de la matrice du système.

Solution

1. Ecriture du système sous la forme matricielle en permutant les lignes 2 et 3 pour avoir un système triangulaire supérieur. N'oublions pas que le déterminant sera multiplié par -1 à cause de la permutation.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. La substitution en arrière donne :

   $eq.3 : z = \frac{3}{3} = 1, \ \ eq.2 : y = \frac{1+1}{2} = 1 \ \ et\ x = 1 + 1 - 1 = 1$

3. $\mathrm{Det(A)} = (-1) * 1 * 2 * 3 = -6.$

5.1 Méthode d'élimination de GAUSS

Dans ce chapitre, on va commencer par la méthode d'élimination de GAUSS qui est similaire à celle de l'élimination avec une modification très importante qui facilite énormément la résolution même de systèmes à grandes tailles (des milliers où même des millions). Cette modification transforme un système à matrice A pleine, en un autre système à matrice U triangulaire supérieure, de telle façon que les deux systèmes AX=B et UX=Y soient équivalent c. à. d. ont la même solution.

L'algèbre linaire montre que certaines transformations apportées aux systèmes d'équations ne changent pas leurs solutions, dans notre cas les opérations qu'on va appliquer sont les suivantes :

- Multiplication de l'équation E_i par une constante α non nulle, la nouvelle équation obtenue $E_{in} = \alpha E_i$ remplacera l'ancienne E_i.
- Multiplication de l'équation E_j par α non nulle et son ajout à E_i, $E_{in} = E_i + \alpha E_j$, l'équation obtenue E_{in} remplacera E_i.
- Permutation des équations E_i et E_j.

L'application d'une série de ces opérations transformera le système AX=B en UX=Y puis une substitution en arrière donnera la solution du système.

5.1.1 Description de la méthode d'élimination de GAUSS

On va montrer comment appliquer les transformations au système **AX=B**, pour cela le second membre **B** sera considéré comme la colonne **(n+1)** et sera aussi affecté par les opérations. On divise le travail en **(n-1)** étapes chacune d'elle annule les éléments au-dessous du pivot de la colonne ($\boldsymbol{a_{ij}}$ pour $\boldsymbol{i > j}$). Au début chaque étape, on vérifie que le pivot est non nul. Pour l'étape ***i*** le pivot est $\boldsymbol{a_{ii}^{(i-1)}}$ à l'étape ***(i-1)***.

Le système à l'état initial où à l'étape ***(0)*** est donné par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}^{(0)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}^{(0)}$$

<u>Première étape :</u> On vérifie tout d'abord que le pivot de la première étape qui est $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ pour $i = 1$ i.e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

Pour annuler l'élément $a_{21}^{(0)}$ de la deuxième ligne, on multiplie la première équation par $a_{21}^{(0)}$ et on la divise par $a_{11}^{(0)}$ puis on fait la différence de cette nouvelle équation avec la deuxième. L'équation obtenue remplacera la deuxième. $E_2^{(1)} = E_2^{(0)} - E_1^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

Cette opération donne $a_{21}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, ..., $a_{2n+1}^{(1)} = a_{2n+1}^{(0)} - a_{1n+1}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

En général, on écrit : $a_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(0)} - a_{1j}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ Pour $j = 2, n+1$

On continue cette procédure avec les lignes 3,4,..., pour la ligne i on a :

$E_i^{(1)} = E_i^{(0)} - E_1^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

Cette opération donne $a_{i1}^{(1)} = 0,\ \ a_{i2}^{(1)} = a_{i2}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\ \ldots..,\ a_{in+1}^{(1)} = a_{in+1}^{(0)} - a_{1n+1}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

En général, on écrit : $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ Pour $\mathrm{i} = 2, \mathrm{n}$ et $j = 2, n+1$

A la fin de la première étape, on obtient des éléments nuls au-dessous du pivot de la première étape. Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} \\ & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{(0)} \\ a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

<u>Deuxième étape :</u> $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ pour $i = 2$ i.e $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

De la même façon, on obtient pour le cas général

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad \text{Pour } \mathrm{i} = 3, \mathrm{n} \text{ et } j = 3, n+1$$

<u>Etape *k* :</u> $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ pour $i = k$ i.e $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Pour une étape k quelconque, on a :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k-1)} \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad \text{Pour } k = \overline{1, n-1},\quad i = \overline{k+1, n} \text{ et } j = \overline{k+1, n+1}$$

A la fin de la procédure, on obtient un système à matrice triangulaire supérieure qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{(0)} \\ a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système se fait par substitution en arrière.

<u>5.1.2 Le nombre d'opérations nécessaires pour l'application de l'algorithme de GAUSS est :</u>

<u>Nombre de multiplications et d'additions :</u>

$$nm = na = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

Nombre de divisions :

$$nd = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.1.3 Applications de la méthode de GAUSS.

a) Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire :

Le déterminant d'une matrice triangulaire est donné par :

$$\det(U) = (-1)^P \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = (-1)^P u_{11}u_{22} \dots . u_{nn}$$

Avec P le nombre de permutation de lignes ou de colonnes effectuées lors de l'application de l'algorithme de GAUSS.

Exemple : Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 5y + z = 16 \\ -x + 4y + 7z = 28 \end{cases}$$

1. Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour la méthode de Gauss.
2. Calculer le déterminant de la matrice du système.
3. Résoudre le système par l'élimination de Gauss.
4. Recalculer le déterminant de la matrice du système.

b) Résolution simultanée de plusieurs systèmes à même matrice A :

Dans la pratique, on rencontre souvent le cas de plusieurs systèmes d'équations qui ne différent que par le second membre B. On peut appliquer l'algorithme de GAUSS sur la matrice A augmentée par tous les seconds membres. De cette façon, on fait les calculs une seule fois sur la matrice A, la substitution se fait avec chaque second membre obtenu à part.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \; \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \; \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \; \cdots & z_1 \\ b_2 & c_2 \; \cdots & z_2 \\ & \vdots & \\ b_n & c_n \; \dots & z_n \end{bmatrix}$$

c) Calcul de l'inverse d'une matrice :

Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice d'ordre $\boldsymbol{n}$, la matrice $\boldsymbol{A^{-1}}$ tel que $\boldsymbol{A.A^{-1}} = \boldsymbol{I}$ est dite matrice inverse de $\boldsymbol{A}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \vdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \vdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Utiliser la méthode de Gauss pour calculer la matrice inverse.
2. Calculer le nombre d'opérations.

5.2. Utilisation de la pivotation.

Dans l'élaboration de l'algorithme de GAUSS, on a supposé que le pivot ne soit pas nul, ce n'est pas le cas toujours. Parfois le pivot est très petit comparativement aux autres termes ou même nul, dans ce cas on peut utiliser la technique de la pivotation soit partielle ou totale.

Pivotation partielle :

Dans ce cas on choisit comme pivot l'élément $a_{lk}^{(k-1)}$ tel que :

$$a_{lk}^{(k-1)} = \max_{i \in [k,n]} \left| a_{ik}^{(k-1)} \right|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \ldots & a_{1k} & a_{1n} \\ 0 \ldots & \boldsymbol{a_{kk}} & \cdots a_{kn} \\ & \vdots & \\ 0 \ldots & \boldsymbol{a_{nk}} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dans la pivotation partielle, on utilise la permutation des lignes ceci n'a aucun effet sur la solution du système.

Pivotation totale :

Dans la pivotation totale le choix du pivot se fait à partir d'une sous matrice incluant la permutation des lignes et des colonnes tel que :

$$a_{lm}^{(k-1)} = \max_{i,j \in [k,n]} \left| a_{ij}^{(k-1)} \right|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ 0 \dots & \boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{a_{kk}} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{matrix}} & \\ 0 \dots & & \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss avec pivotation partielle ensuite totale pour résoudre le système.

5.2 Algorithme de THOMAS

Dans les méthodes numériques de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, on rencontre des matrices à trois diagonales (principale, sous diagonale et sur diagonale). Ce type de matrices est dit tri diagonales. L'algorithme de résolution de ce type de système est un cas particulier de l'élimination de GAUSS. Soit le système à matrice tri diagonale suivant :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \cdots & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

On divise la première ligne par b_1 cela donne $\quad 1 \quad c_1/b_1 \quad \cdots \; y_1/b_1$

On note $\gamma_1 = c_1/b_1$ et $\beta_1 = y_1/b_1$

Ensuite on transforme la deuxième ligne par $E_2^{(1)} = E_2^{(0)} - E_1^{(0)} a_2$ cela donne

$$0 \qquad b_2 - a_2\gamma_1 \qquad c_2 \dots \dots \; y_2 - a_2\beta_1$$

On divise la nouvelle deuxième ligne par $b_2 - a_2\gamma_1$ cela donne :

$$0 \qquad 1 \qquad c_2/(b_2 - a_2\gamma_1) \dots \dots \; (y_2 - a_2\beta_1)/(b_2 - a_2\gamma_1)$$

On note $\gamma_2 = c_2/(b_2 - a_2\gamma_1)$ et $\beta_2 = (y_2 - a_2\beta_1)/(b_2 - a_2\gamma_1)$

De la même façon on continue avec la ligne trois ce qui donne

$$0 \qquad 0 \qquad 1 \qquad c_3/(b_3 - a_3\gamma_2) \qquad \dots \dots (y_3 - a_3\beta_2)/(b_3 - a_3\gamma_2)$$

On note $\gamma_3 = c_3/(b_3 - a_3\gamma_2)$ et $\beta_3 = (y_3 - a_3\beta_2)/(b_3 - a_3\gamma_2)$

En général pour une ligne i on a :

$$0 \quad 0 \ldots..0 \quad 1 \quad c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad \ldots \ldots (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1})$$

Avec $\gamma_i = c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \qquad i = \overline{2, n-1}$

et $\beta_i = (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n}$

On continue jusqu'à obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & \\ & 1 & \gamma_2 & \cdots & & & \\ & & 1 & \gamma_3 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1 & \gamma_{n-2} & \\ & & & \cdots & & 1 & \gamma_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

La solution du système est facilement obtenue par substitution en arrière :

$$x_n = \beta_n$$
$$x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = \overline{n-1, 1}$$

En résumé, pour appliquer l'algorithme de Thomas on calcule

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{c_1}{b_1} \\ \gamma_i = c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{y_1}{b_1} \\ \beta_i = (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = \beta_n \\ x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = \overline{n-1, 1} \end{cases}$$

Exemple : Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Utiliser l'algorithme de Thomas pour résoudre le système.

5.3 Méthode de Crout-Dolitle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice ***A*** pleine en deux matrices triangulaires ***L*** et ***U***, tel que ***L*** est triangulaire inférieure et ***U*** est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ($u_{ii} = 1$).

On a donc AX=B (1) et A=LU donc LUX=B, on pose UX=Y (Y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases} \quad (2)$$

Le système (1) est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre (2). Le système à matrice triangulaire supérieure et résolue par substitution en arrière, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution en avant.

5.3.1 Détermination des matrices L et U

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & 1 & & u_{2n-2} & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji} \\ u_{ik} = \left[a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk}\right]/l_{ii} \end{cases} \quad i = 2,3,\ldots,n \text{ et } k = i, i+1, \ldots, n$$

En pratique pour calculer les éléments des deux matrices, on divise la tâche en plusieurs étapes. Par exemple dans l'étape i on détermine :

- La colonne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{L}$ en multipliant $\boldsymbol{L}$ par la colonne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{U}$.
- La ligne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{U}$ en multipliant la ligne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{L}$ par $\boldsymbol{U}$.

Exemple : Utiliser la méthode de factorisation LU pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5.4 Méthode de Choleski :

Cette méthode est applicable aux systèmes à matrices symétriques définies positives ($\boldsymbol{Det(A)} > \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{a_{ij}}$ réels). Cherchons une matrice $\boldsymbol{M}$ telle que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{MM^t}$ ou $\boldsymbol{M}$ est triangulaire inférieure et $\boldsymbol{M^t}$ la matrice transposée de $\boldsymbol{M}$.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n-1} & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & & m_{2n-2} & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & & \cdots & m_{n-1n-1} & m_{n-1n} \\ & & & 0 & m_{nn}1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice ***M*** sont donnés par :

$$\begin{cases} m_{ii} = \sqrt{a_{ii-\sum_{j=1}^{i-1} m_{ij}^2}} \\ m_{ji} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik}\, m_{jk}\right] / m_{ii} \end{cases} \quad i = \overline{1,n} \text{ et } j = \overline{\imath + 1, n}$$

Exemple : Utiliser la méthode de factorisation de Choleski pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$