Chapitre 2

Elasticité linéaire anisotrope

2.1 Introduction

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liées par des lois appelées 'lois de comportement', caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. Nous allons étudié dans ce chapitre, la ~~fameuse~~ loi de comportement régie par les relations ***contraintes - déformations*** pour les matériaux anisotropes. Les tenseurs de rigidité et de souplesse, qui en découlent, seront établis pour les différents cas d'anisotropie, sous forme symbolique. La forme explicite de toutes ces relations sera traitée dans le chapitre tois.

2.2 Relations contraintes - déformations pour les matériaux anisotrope

La loi de comportement régissant une traction simple sur une barre homogène isotrope s'écrit :

$$\epsilon = S.\sigma \quad \rightarrow \quad \sigma \quad \text{appliquée}$$

$$\text{ou bien} \quad \sigma = C.\epsilon \quad \rightarrow \quad \epsilon \quad \text{appliquée}$$

ϵ et σ sont, respectivement, la déformation et la contrainte ; C est une rigidité ou constante élastique et S une fléxibilité ou coefficient de souplesse.

Par la loi de Hook, on cherche à généraliser ces expressions pour avoir :

$$\sigma_{ij} = f_{ijkl}\left(\epsilon_{kl}\right) \tag{2.1}$$

La fonction f peut être linéaire ou non linéaire. L'expérience montre que de nombreux milieux élastiques déformables ont, pour une température donnée, un *comportement élastique linéaire*. Pour un milieu linéaire et élastique, l'éqaution2.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\,\epsilon_{kl} \\ \text{et} \quad \epsilon_{ij} &= S_{ijkl}\,\sigma_{kl} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Avec :

- C_{ijkl} : Tensur de rigidité, d'ordre 4 ;
- S_{ijkl} : Tensur de souplesse, d'ordre 4 ;

Sous forme matricielle, les relations contraintes -déformations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

Sachant que,

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl}$

$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \quad \Rightarrow \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}$

La relation 2.3 comporte six contraintes et six déformations indépendantes, et donc la matrice de rigidité est de dimension 6×6.

La loi de Hook généralisée reliant les contraintes aux déformations peut s'écrire sous la forme contractée suivante :

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j \qquad i, j = 1, \cdots, 6 \tag{2.4}$$

Où les σ_i représentent les composantes de contraintes, ϵ_i les composantes de déformation, et C_{ij} la matrice de rigidité. Cette notaion contractée est comparée à la notation tensorielle usuelle dans le tableau 2.1 dans les situations où les tenseurs de contraintes et de déformations sont symétriques (situation correspondant aussi à l'absence des forces de volume).

Contraintes	Déformations		
Notation tensorielle	Notation contractée	Notation tensorielle	Notation contractée
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	ϵ_6

TABLE 2.1 – Notation tensorielle et notation contractée pour les contraintes et les déformations

En vertu du tableau 2.1, les déformations sous forme contractée sont définies par :

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \tag{2.5}$$

Oú u, v et w sont les déplacements dans les directions x, y et z.
Dans l'équation 2.4, la matrice de rigidité, C_{ij} possède 36 constantes élastiques. Tandis que, le nombre de constantes actuellement indépendantes, dans le domaine élastique, s'avere moins de 36 et ce en considérant le concept de l'énergie de déformation. Les matériaux élastiques pour lesquels une énergie potentielle ou une densité d'énergie de déformation existe, possède un invcrément de travail par unité de volume qui s'exprime par :

$$dW = \sigma_i d\epsilon_i \tag{2.6}$$

Avec, pour rappel, σ_i agissant le long des $d\epsilon_i$. En se servant de la relation 2.4, l'incrément de travail sera :

$$dW = C_{ij}\epsilon_j d\epsilon_i \tag{2.7}$$

Par intégration pour toutes les déformations, le travail par unité de volume s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \tag{2.8}$$

En outre, la loi de Hook, equation 2.4, peut être dérivée de l'équation 2.8 :

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = C_{ij} \epsilon_j \tag{2.9}$$

et par suite,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = C_{ij} \tag{2.10}$$

D'une façon similaire, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} = C_{ji} \tag{2.11}$$

L'ordre de différentiation étant indifférent, on obtient :

$$C_{ij} = C_{ji} \tag{2.12}$$

Ainsi, la matrice de rigidité est symétrique et par conséquent seulement 21 des constantes sont indépendants.
De la même manière, on peut prouver que :

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{2.13}$$

Avec, S_{ij} la matrice de souplesse définie par l'inverse de la relation contraintes - déformations. La relation déformations - contraintes suivante :

$$\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j \qquad i, j = 1, \cdots, 6 \tag{2.14}$$

Un raisonnement analogue à celui des paragraphes précédents, conduit à la conclusion suivante :

$$S_{ij} = S_{ji} \tag{2.15}$$

Dans laquelle la matrice de souplesse admet aussi 21 constantes indépendantes. Notons, qu'à ce moment, pour définir les souplesses et les rigidités on utilise une notation symbolique d'usage. Les composantes de rigidité et de souplesse sont communément considérées comme constantes élastiques.

Avec cette dernière réduction de 36 à 21 constantes indépendantes, les relations contraintes déformations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

Actuellement, les relations résultants de l'équation 2.16 caractérisent l'anisotropie complète du matériau, c'est - à - dire que dans ces conditions il n'existe aucun plan de symétrie matérielle. Il s'agit du cas général anisotrope où les matrices de rigidité $[C]$ et de souplesse $[S]$ possèdent 21 constantes indépendantes. Le matériau est dit ***triclinique***.

2.2.1 Symétrie du matériau

Les matériaux composites possèdent une architecture interne de symétrie donnée, celle - ci se retouve dans les propriétés élastiques du matériau. La considération de la symétrie matérielle affecte directement la nature de la matrice de rigidité, et donc de souplesse, et ce en dimunuant le nombre de constantes élastiques indépendantes. Ce - ci a permis de ressortir différents cas de matériaux composites.

Principe : La matrice de rigidité doit conserver les mêmes valeurs des coéfficients C_{ij} pour une rotation de π à travers le plan de symétrie considéré. D'après la théorie de transformation des tenseurs, expliquée en annexe A section A.1.1, le tenseur de rigité C'_{ij} sera donné par :

$$C' = T_\sigma \, C \, T_\sigma^T \tag{2.17}$$

Avec T_σ, la matrice de changement de base du tenseur des contraintes. De la même façon, on écrit pour le tenseur de souplesse :

$$S^{'} = T_{\epsilon}\, S\, T_{\epsilon}^{T} \tag{2.18}$$

T_{ϵ} étant la matrice de changement de base du tenseur des déformations.

a- Matériau monoclinique

On démontre que l'existance d'un plan de symétrie, par exemple le plan $z = 0$, réduit les relations contraintes déformations à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

Avec 13 constantes élastiques indépendantes, un tel matériau est dit ***monoclinique***.

b- Matériau orthotrope

Le solide orthotrope possède 3 plans de symétrie orthogonaux. Les normales à ces plans sont les directions principales 1, 2 et 3, appelées ausi directions ou axes d'orthotropie.

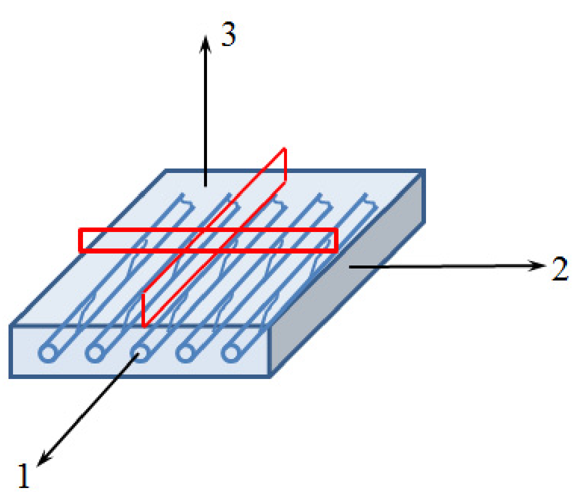

FIGURE 2.1 – Schématisation d'un matériau orthotrope

Dans les directions principales, la relation contraintes - déformations s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Dans ces conditions, le matériau est dit ***orthotrope***. IL possède 9 constantes élastiques indépendantes.

Notons que d'après l'équation 2.19 il n'y a pas de couplage contraintes normales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et les déformations de glissement ou distortions $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ comme c'est le cas pour les matériaux completement anisotropes (par la présence, par exemple du coefficient C_{14}). Il en va de même pour les contraintes de cisaillement et les déformations normales dans les différents plans.

Remarques :

- une contrainte uniaxiale ne provoquera ni cisaillement ni torsion si elle est appliquée suivant une direction de symétrie ;
- un cisaillement ne provoquera ni allongement ni torsion s'il est appliqué dans un plan de symétrie.

c- Matériau isotrope transverse

Le matériau orthotrope présente en plus, un axe de révolution, c'est - à - dire dans l'un des plans de symétrie, les propriétés élastiques sont indépendantes de l'orientation considérée. Le matériau est dit orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Si par exemple, le plan $1-2$ est le plan d'isotropie, dans les coefficeints de rigidité les indices 1, 2 seront interchangeables. la relation contraintes - déformations met en évidence seulement 5 constantes élastiques indépendantes (équation 2.21).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

d- Matériau isotrope

Dans ces conditions, une infinité de plans de symétrie matérielle se présente. les relations précédentes se simplifient au cas du matériau ***isotrope*** avec seulement 2 constantes élastiques indépendantes dans la matrice de rigidité (équation 2.22).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

On conclu que les relations inverses, c'est - à - dire déformations - contraintes pour les cinq cas de symétrie matérielle sont représentées dans les équations 2.23, 2.24, 2.25, 2.26 et 2.27.

Anisotrope (21 constantes indépendantes)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

Monoclique (13 constantes indépendantes)
(symétrie autour de $z = 0$)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

Orthotrope (9 constantes indépendantes)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Isotrope transverse (5 constantes indépendantes)
(Plan de symétrie 1-2)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

Isotrope (2 constantes indépendantes)

$$\left\{\begin{array}{c}\epsilon_1\\\epsilon_2\\\epsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccc}S_{11}&S_{12}&S_{12}&0&0&0\\S_{12}&S_{11}&S_{12}&0&0&0\\S_{12}&S_{12}&S_{11}&0&0&0\\0&0&0&2(S_{11}-S_{12})&0&0\\0&0&0&0&2(S_{11}-S_{12})&0\\0&0&0&0&0&2(S_{11}-S_{12})\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{array}\right\} \tag{2.27}$$