Chapitre VI : Résolution numérique des équations différentielles ordinaires : Problème de Cauchy

Les équations différentielles sont utilisées dans la modélisation mathématique de la quasi- totalité des phénomènes physiques. Une équation différentielle est une relation entre une variable et sa ou ses dérivées de divers ordres. Dans ce chapitre, on va considérer les équations différentielles ordinaires du premier ordre avec une condition initiale imposée (problème de Cauchy).

Le problème de Cauchy est défini par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y' = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad y(t_0) = y_0 \text{ est une condition initiale imposée.}$$

On remarque que la solution doit obligatoirement passer par le point (t_0, y_0).

La solution du problème de Cauchy existe et unique si la fonction $f\big(t, y(t)\big)$ satisfait la condition de Lipschitz en y sur un rectangle R définit par $a \le t \le b$ et $c \le y \le d$. Cette condition nécessite que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$.

En pratique pour vérifier cette condition, on calcule $Max\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \le L$ sur R

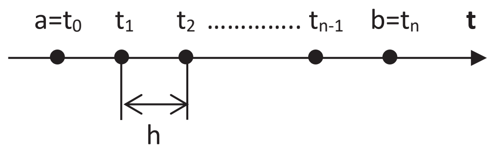
4.1 Méthode d'Euler

Soit un intervalle ***[a,b]*** sur lequel on cherche la solution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y' = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0 = a) = y_0 \end{cases}$$

La fonction $f\big(t, y(t)\big)$ vérifie la condition de Lipschitz en y sur le rectangle R.

La première étape consiste à diviser l'intervalle donné en n points équidistants ce qui donne un pas d'intégration $h = \frac{b-a}{n}$, le point d'abscisse t_i est donné par $t_i = a + ih$ (pour ***i=1,2,…,n***).



On va donc résoudre le problème sur l'intervalle $[\boldsymbol{a = t_0, b = t_n}]$ avec $\boldsymbol{y(t_0 = a)} = \boldsymbol{y_0}$. Si les fonctions $y(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})$ et $\boldsymbol{y}''(\boldsymbol{t})$ sont continues, on peut écrire le développement en série de Taylor pour $\boldsymbol{y(t)}$ au voisinage de $\boldsymbol{t_0}$.

$$\boldsymbol{y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!} + y''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots}$$

Sachant que $\boldsymbol{y'(t_0) = f\big(t_0, y(t_0)\big)}$ et $\boldsymbol{h = t_1 - t_0}$,

Ecrivons $\boldsymbol{y(t_1) = y(t_0) + f\big(t_0, y(t_0)\big)h + y''(t_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots}$

Si $\boldsymbol{h}$ est suffisamment petit alors on peut négliger $\boldsymbol{h^2}$ et donc les termes d'ordre deux et plus, on obtient donc :

$$\boldsymbol{y(t_1) = y(t_0) + hf\big(t_0, y(t_0)\big) \rightarrow y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)}$$

C'est l'approximation d'Euler d'ordre ***1***, en répétant le procédé on génère une séquence de points $\boldsymbol{y_1, y_2, y_3, \dots\dots, y_{n-1}, y_n}$ approximant $\boldsymbol{y = y(t)}$, en général :

$$\begin{cases} \boldsymbol{t_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, 2, \dots\dots, n-1} \\ \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \;\; y_0 = y(t_0)} \end{cases}$$

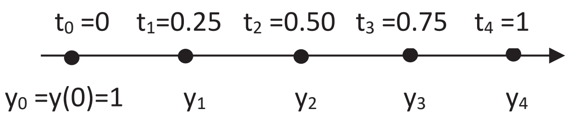
<u>Exemple :</u> Résoudre le problème de Cauchy suivant par la méthode d'Euler en prenant un pas d'intégration h=0.25.

$$\begin{cases} y' = 2 - ty^2 \;\; t \in [0,1], y \in [0,1] \\ \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

Vérifions la condition de Lipchitz sur le rectangle R défini par $t \in [0,1], y \in [0,1]$.

$$\text{Max}\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = \text{Max}\left|\frac{\partial(2-ty^2)}{\partial y}\right| = |\boldsymbol{-2ty}| = \boldsymbol{2 < L} \text{ Condition vérifiée}$$

On divise l'intervalle de t, [0,1] avec une pas h=0.25, soit 0, 0.25, 0.50, 0.75 et 1.



On écrit : $\begin{cases} \boldsymbol{t_i = ih, \;\; i = 0, 1, 2} \text{ et } \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i + 0.25(2 - t_i y_i^2), \;\; y_0 = 1} \end{cases}$

$$\boldsymbol{i = 0}, \quad y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.25(2 - 0 * 1^2) = 1.5$$

$$\boldsymbol{i = 1}, \quad y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.5 + 0.25(2 - 0.25 * 1.5^2) = 1.8594$$

$$\boldsymbol{i = 2}, \quad y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.859 + 0.25(2 - 0.5 * 1.859^2) = 1.9272$$

$$\boldsymbol{i = 3}, \quad y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = 1.927 + 0.25(2 - 0.75 * 1.927^2) = 1.7308$$

La solution exacte est :

$$y(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}c_1 t Ai(2^{2/3}t) + 2\sqrt[3]{2} t Bi(2^{2/3}t)}{2t(c_1 A_i'(2^{2/3}t) + B_i'(2^{2/3}t))}$$

Avec ***Ai*** et ***Bi*** sont les fonctions d'Airy et d'Airy de seconde espèce.

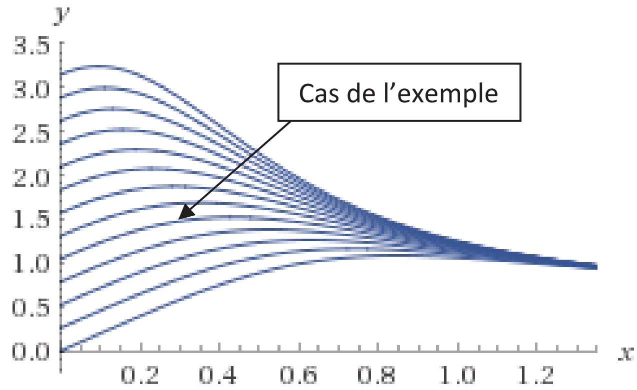


Fig. 4.1. Solutions ***y(t)*** pour différentes conditions initiales ***y(0)***.

4.2 Méthode d'Euler améliorée(Huns)

D'après le développement en série de Taylor, on a :

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!} + y''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + y'''(t_0)\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \cdots$$

Si on prend les trois premiers termes et on néglige les autres d'ordre supérieur, on obtient :

$$y(t) \cong y(t_0) + y'(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!} + y''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots$$

En remplaçant t par t_1 cela donne :

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)\frac{(t_1-t_0)}{1!} + y''(t_0)\frac{(t_1-t_0)^2}{2!} = y(t_0) + y'(t_0)h + y''(t_0)\frac{h^2}{2!}$$

Or $y''(t_0) = \frac{y\prime(t_1)-y\prime(t_0)}{h}$ on aura $y(t_1) = y(t_0) + \frac{h}{2}[f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)]$

En général la formule d'Euler améliorée s'écrit :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^E\right) + f(t_i, y_i)]$$

On remarque que cette formule donne y_{i+1} en fonction de y_{i+1}^E qui doit être calculée par la méthode d'Euler.

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode d'Euler améliorée en prenant un pas d'intégration h=0.25.

On a :

$$\begin{cases} t_i = ih, \ \ i = 0, 1, 2 \text{ et } 3 \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^E\right) + f(t_i, y_i)] = y_i + \frac{h}{2}[\left(2 - t_i y_i^2\right) + \left(2 - t_{i+1} y_{i+1}^{2\ E}\right)], \end{cases} \quad y_0 = 1$$

Avec **:** $y_{i+1}^E = y_i + h(2 - t_i y_i^2)$ la solution obtenue par la méthode d'Euler modifiée ou améliorée (Huns). On remplace y_{i+1}^E**,** on aura **:** $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\left(2 - t_i y_i^2\right) + \left(2 - t_{i+1}\left(y_i + h\left(2 - t_i y_i^2\right)\right)^2\right)],$

$y_1 = 1.4297,\ y_2 = 1.6629,\ y_3 = 1.6805,\ y_4 = 1.5750$

4.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est la méthode la plus précise et la plus utilisée, elle est d'ordre quatre. L'intervalle ***[a,b]*** est divisé en $\boldsymbol{n}$ sous intervalles de largeur $\boldsymbol{h}$, cette formule s'écrit :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4)$$

$$K_1 = f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_3)$$

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode de Runge-Kutta d'ordre *4* en prenant un pas d'intégration *h=0.25*.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4)$$

$$K_1 = f(t_i, y_i) = 2 - t_i y_i^2$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) = 2 - \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{h}{2}K_1\right)^2$$

$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right) = 2 - \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{h}{2}K_2\right)^2$$

$$K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_3) = 2 - (t_i + h)(y_i + hK_3)^2$$

i=0, $K_1 = 2$, $K_2 = 1.8047$, $K_3 = 1.8122$, $K_4 = 1.4722$, $y_1 = 1.4461$

y_2=1.7028, y_3=1.7317, y_4=1.6148

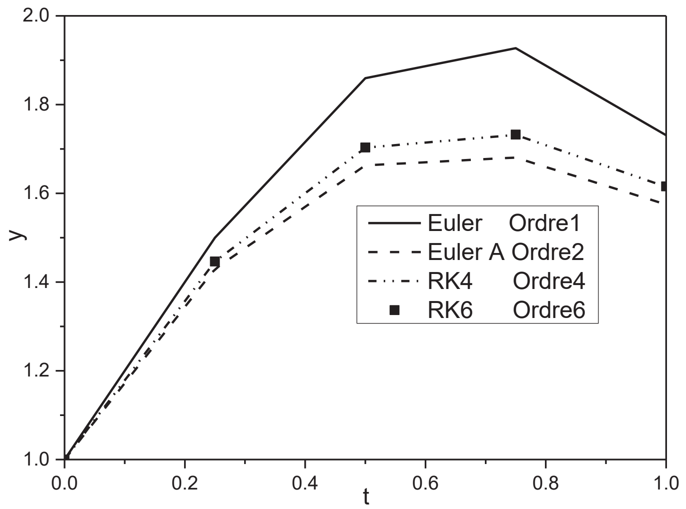


Fig. 4.2. Comparaison entre différentes méthodes