Chapitre III : Intégration Numérique

Dans ce chapitre, on va étudier quelques méthodes approximatives pour le calcul des intégrales limitées. Aussi ces méthodes permettent le calcul des intégrales qui n'ont pas de solutions directes ou analytiques. On peut aussi calculer l'intégrale d'une fonction donnée sous forme tabulaire ou discrète.

3.1 Formule du trapèze

Cette formule est très simple, elle permet de remplacer la courbe ***f(x)*** de la fonction à intégrer par une ligne droite qui relie les points ***(a,f(a))*** et ***(b,f(b))*** ce qui donne un trapèze (Fig. 3.1).

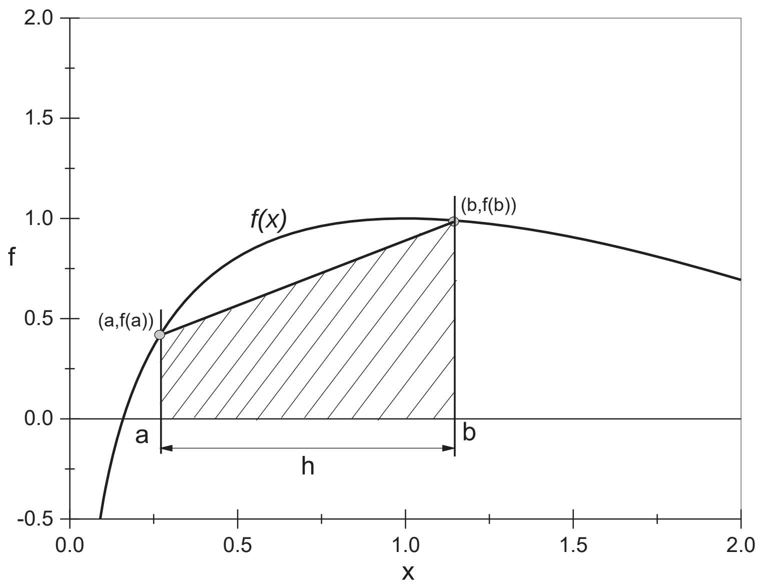

Fig. 3.1 : Méthode du trapèze

L'intégrale est donc remplacée par la surface du trapèze :

$$s = \int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Avec ***h=b-a*** est dit pas d'intégration. On peut remarquer qu'il y'a une différence importante entre la courbe de la fonction et la ligne droite, cela veut qu'on commît une erreur de calcul. Pour minimiser cette erreur, on utilise une autre forme plus adaptée de cette formule.

3.1.1 Formule du trapèze généralisée.

On divise l'intervalle ***[a,b]*** en plusieurs sous intervalles égaux et on applique la formule du trapèze à chaque sous intervalle (Fig. 3.2). On a donc les sous intervalles $[\boldsymbol{a = x_0, x_1}] \cup [\boldsymbol{x_1, x_2}] \cup \ldots\ldots \cup [\boldsymbol{x_{n-1}, x_n = b}]$, l'application de la formule du trapèze donne :

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_3)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

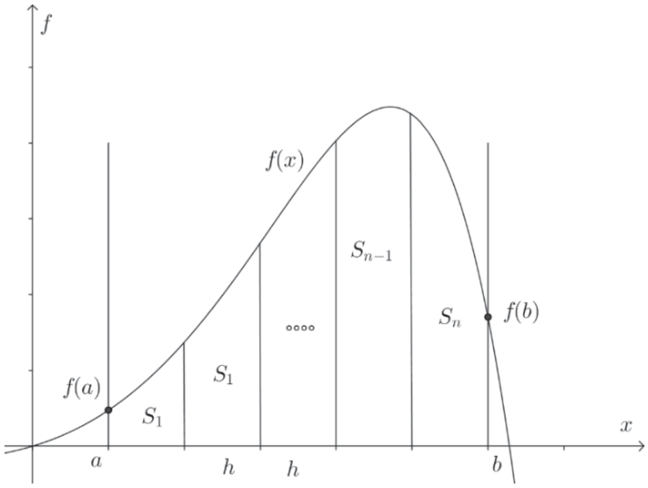

Fig. 3.2. Méthode du trapèze généralisée

3.1.2 Erreur d'intégration

C'est la différence entre l'intégrale exacte de la fonction et celle calculée par la méthode du trapèze, elle est notée par ***R(f)***.

$$\boldsymbol{R(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(z)} \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{z \in [a, b]}$$

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une précision de 0.001 par la méthode du trapèze. On doit premièrement trouver le nombre de division à faire pour obtenir cette précision. L'erreur d'intégration s'écrit $\boldsymbol{R(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(z)}$ sa valeur absolue doit être inférieure ou égale à la précision donnée (0.001), c.à.d. :

$$|\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{12}}\boldsymbol{h^2 f''}(z)\right| \leq \boldsymbol{0.001}$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ donc sa dérivée seconde est $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$, cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle donné (Fig. 3.3).

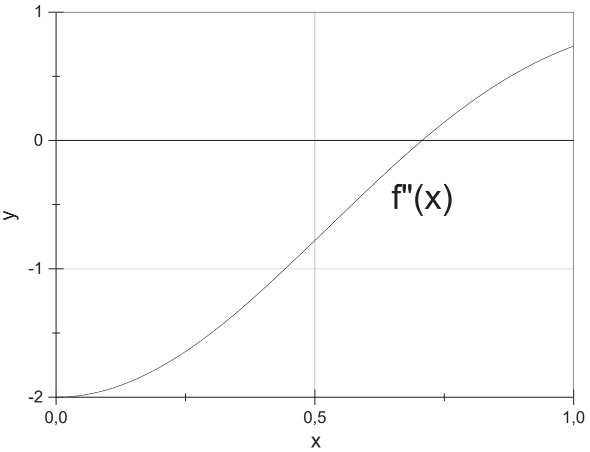

Fig. 3.3. Courbe de la dérivée seconde de e^{-x^2}

On calcule

$$M = max|\boldsymbol{f''(z)}| = \mathbf{2} \text{ à } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

donc $|\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{\boldsymbol{b-a}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{h}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{f''(z)}\right| \leq \mathbf{0.001}$

d'où $\boldsymbol{h} \leq \sqrt{\frac{\mathbf{12*0.001}}{\mathbf{(1-0)*2}}} = \mathbf{0.0774}$ donc n $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.0774}} = \mathbf{12.91}$ on prend 13 divisions.

Le pas d'intégration $h = \frac{1}{13}$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2*13}\left(e^{-0^2} + 2\sum_{i=1}^{12} e^{-(\frac{i}{13})^2} + e^{-1^2}\right) = 0.74646$$

3.2 Formules de Simpson

Dans cette formule on ne remplace pas la fonction par une droite mais par une parabole de degré $\boldsymbol{n}$ inférieure ou égale à deux. Cette dernière doit passer par trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$**et** (x_2, y_2) ce qui fait que cette méthode n'est applicable que pour un nombre pair de tranches (une tranche c'est l'intervalle entre deux points) (Fig. 3.4.). La formule de Simpson s'écrit :

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$$

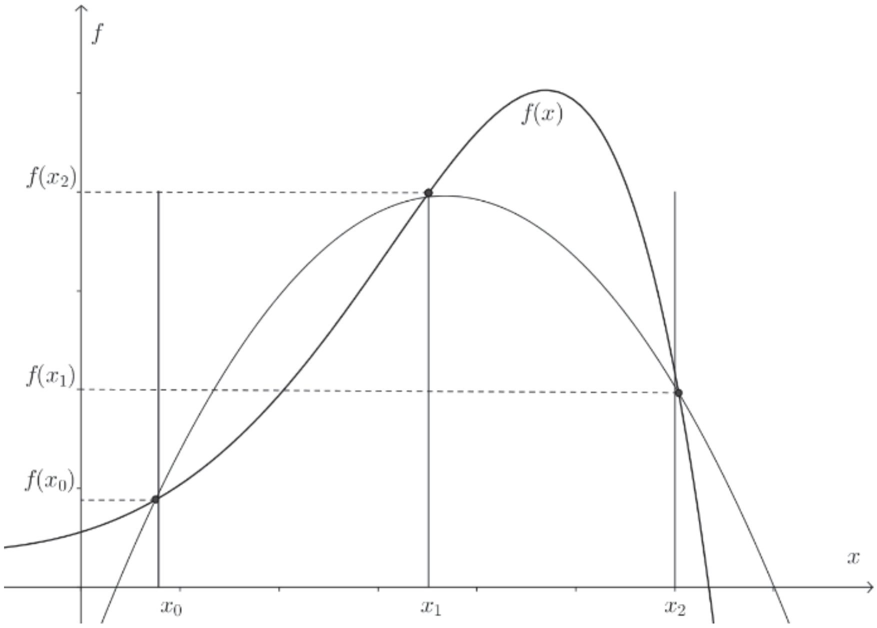

Fig. 3.4. Méthode de Simpson

Si on généralise la formule de Simpson pour $\boldsymbol{2n}$ sous intervalles avec un pas d'intégration $h = \frac{b-a}{2n}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots \ldots < x_{2n} = b$ et $x_k = a + hk$ pour ***k=0,1,2,……,2n***.

La formule de Simpson généralisée s'écrit :

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum\nolimits_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum\nolimits_{i\ impair} f(x_i) + f(x_{2n})\right)$$

L'erreur d'interpolation de la formule de Simpson s'écrit :

$$R(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(z) \quad \text{avec} \quad z \in [a, b]$$

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une précision de 0.001 par la méthode de Simpson. On doit premièrement trouver le nombre de division à faire pour obtenir cette précision.
L'erreur d'intégration s'écrit :

$$\boldsymbol{R(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(z)}$$

sa valeur absolue doit être inférieure ou égale à la précision donnée (0.001), c.à.d. :

$$|\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{\boldsymbol{(b-a)}}{\boldsymbol{180}}\boldsymbol{h^4 f^{(4)}(z)}\right| \leq \boldsymbol{0.001}$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sa dérivée quatrième est $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}$, cette fonction est non monotone dans l'intervalle donné. On calcule son maximum par le traceur Origin (Fig. 3.3.).

$$M = max\left|\boldsymbol{f^{(4)}(z)}\right| = \boldsymbol{12} \text{ à } \boldsymbol{x = 0}.$$

D'ou $\boldsymbol{h \leq \sqrt[4]{\frac{180*0.001}{(1-0)*12}} = 0.35}$

donc $\boldsymbol{2n = \frac{1}{0.35} = 2.85}$ on prend **4** divisions, le pas d'intégration $h = \frac{1}{4} = 0.25$.

On trouve : $\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{0.25}{3}\left(e^{-0^2} + 4(e^{-0.25^2} + e^{-0.75^2}) + 2e^{-0.5^2} + e^{-1^2}\right) = 0.7469$

3.3 Méthode de quadrature

Cette méthode permet l'élaboration de formules d'intégration numériques en se basant sur le polynôme de Lagrange. On peut par exemple retrouver les formules du trapèze et de Simpson par cette méthode ou bien de construire d'autres formules d'intégration plus performantes. Dans cette méthode on remplace la fonction par un polynôme de Lagrange puis on intègre le polynôme trouvé, on écrit donc :

$$f(x) \cong P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

On intègre : $\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b L_i(x)dx$

Si on pose : $A_i = \int_a^b L_i(x)dx$ pour ***i=0,1,…,n***

On obtient la formule de quadrature : $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n} f_i A_i$

On doit maintenant choisir la forme de la fonction ***f(x)***, dans notre cas on prend :

$$f(x) = x^k \quad \text{avec } k=0,1,2,\dots,n$$

On remplace dans l'intégrale : $\int_a^b x^k dx \cong \sum_{i=0}^{n} f_i A_i = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ ***k=0,1,2,….,n***

En variant ***i*** de ***0*** à ***n*** pour chaque valeur de ***k,*** on aura:

pour ***k=0 :*** $x_0^0 A_0 + x_1^0 A_1 + \cdots \dots + x_n^0 A_0 = \frac{b^1-a^1}{1}$

pour ***k=1 :*** $x_0^1 A_0 + x_1^1 A_1 + \cdots \dots + x_n^1 A_0 = \frac{b^2-a^2}{2}$

pour ***k=2 :*** $x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 + \cdots \dots + x_n^2 A_0 = \frac{b^3-a^3}{3}$

…………………………………………………………………………………

pour ***k=n :*** $x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \cdots \dots + x_n^n A_0 = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

D'où on obtient pour toutes les valeurs de ***i*** et ***k*** le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots\dots x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots . x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots . x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } I_k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

Le déterminant de la matrice du système trouvé est dit de "Von-Dermonde" il est non nul d'où la solution de ce système existe et unique $(A_0, A_1, \dots\dots, A_n)$.

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une formule qui a la forme suivante : $\int_0^1 e^{-x^2}dx = \boldsymbol{A_0 f(0) + A_1 f(0.25) + A_2 f(0.5) + A_3 f(0.75) + A_2 f(1.00)}$**.** Dans ce cas on cherche premièrement les constantes A_i puis on calcule l'intégrale. Ces constantes sont données par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.0625 & 0.25 & 0.5626 & 1 \\ 0 & 0.015625 & 0.125 & 0.421875 & 1 \\ 0 & 0.00390625 & 0.0625 & 0.31640625 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_0} \\ \boldsymbol{A_1} \\ \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{A_3} \\ \boldsymbol{A_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.333} \\ \mathbf{0.250} \\ \mathbf{0.200} \end{bmatrix}$$

La solution du système est (0.0691, 0.3812, 0.1052, 0.3694, 0.0751) donc :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.0691\boldsymbol{e^{0}} + 0.3812\boldsymbol{e^{-0.25^2}} + 0.1052\boldsymbol{e^{-0.5^2}} + 0.3694\boldsymbol{e^{-0.75^2}} + 0.0751\boldsymbol{e^{-1^2}} = \mathbf{0.7472}$$